Вытекающая вода

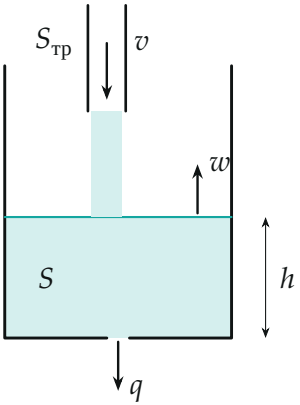
Задача 3. [ВсОШ 2025/26, школьный этап, 8 класс, задача 3] «Вытекающая вода».

В вертикальный цилиндрический сосуд с площадью поперечного сечения $S = 0{,}024$ м^2 по трубе поступает вода с плотностью $\rho = 1000$ кг/м^3 и скоростью $v = 2{,}0$ м/с. Через малое отверстие в дне вода вытекает, причём объёмный расход q зависит от разности давлений у дна и у поверхности воды ΔP по закону $q = \alpha \Delta P$, $\alpha = 3{,}0$ см^3/(с·Па). В изначально пустом сосуде уровень воды начинает подниматься со скоростью $w_0 = 0{,}060$ м/с. Ускорение свободного падения составляет $g = 9{,}8$ м/с^2. Объёмный расход воды через отверстие — это объём воды, протекающий через отверстие за единицу времени.

1. Определите площадь сечения трубы $S_{\text{тр}}$. Ответ выразите в см^2, округлив до сотых.
2. До какой максимальной высоты $h_{\max}$ может подняться вода в сосуде? Ответ выразите в см, округлив до сотых.
3. С какой скоростью поднимается уровень воды в тот момент, когда высота уровня в два раза меньше максимальной высоты $h_{\max}$? Ответ выразите в см/с, округлив до сотых.

Пусть теперь изначально пустой сосуд движется вертикально вниз со скоростью $u = 0{,}40$ м/с.

4. С какой скоростью w_0' начнёт подниматься уровень воды, когда вода из трубы достигнет дна сосуда? Ответ выразите в см/с, округлив до сотых долей.
5. До какой максимальной высоты $h_{\max}'$ может подняться вода в этом случае? Ответ выразите в см, округлив до сотых долей.



Поясняющий рисунок: в сосуд сечения S по трубе сечения $S_{тр}$ входит вода, через отверстие в дне вытекает расход q, уровень h поднимается со скоростью w

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на баланс объёма (уравнение неразрывности). За время Δt в сосуд входит объём $q_{вх}\Delta t$, выходит $q\Delta t$, а разница поднимает уровень: $S\,w\,\Delta t$. Вначале вода не вытекает — весь приток идёт на подъём. С ростом h давление у дна растёт, отток растёт; когда он сравняется с притоком, уровень встанет. Во второй части сосуд движется вниз — считаем всё в системе отсчёта сосуда: она инерциальная (скорость постоянна), там уровень и отток описываются так же, но вода из трубы входит медленнее.

Обозначения. $q_{вх}$ — объёмный приток в сосуд; q — отток через отверстие; h — высота уровня; $w = \Delta h/\Delta t$ — скорость подъёма уровня; штрих — величины для движущегося сосуда.

Пункт 1. Сечение трубы. Приток — объём столба воды длиной $v\Delta t$ и сечением $S_{тр}$ за время Δt: $q_{вх} = S_{тр}v$. Баланс объёма за Δt:

$$S\,w\,\Delta t = q_{вх}\Delta t - q\Delta t \quad \Rightarrow \quad Sw = S_{тр}v - q.$$

В начальный момент $h = 0$, $\Delta P = 0$ и $q = 0$, поэтому $Sw_0 = S_{тр}v$:

$$S_{тр} = \frac{w_0 S}{v} = \frac{0{,}060 \cdot 0{,}024}{2{,}0}\ \text{м}^2 = 7{,}2 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^2 = 7{,}20\ \text{см}^2.$$

Приток $q_{\text{вх}} = w_0 S = 1{,}44 \cdot 10^{-3}$ м^3/с.

Пункт 2. Максимальная высота. Разность давлений у дна и у поверхности — гидростатическое давление столба (вода в сосуде почти покоится): $\Delta P = \rho g h$, значит $q = \alpha \rho g h$ (рис. 1). Уровень растёт, пока $q < q_{\text{вх}}$, и останавливается, когда $q = q_{\text{вх}}$:

$$\alpha \rho g h_{\max} = w_0 S \quad \Rightarrow \quad h_{\max} = \frac{w_0 S}{\alpha \rho g}.$$

Перевод: $\alpha = 3{,}0$ см^3/(с·Па) $= 3{,}0 \cdot 10^{-6}$ м^3/(с·Па).

$$h_{\max} = \frac{1{,}44 \cdot 10^{-3}}{3{,}0 \cdot 10^{-6} \cdot 1000 \cdot 9{,}8}\ \text{м} = 0{,}0490\ \text{м} = 4{,}90\ \text{см}.$$

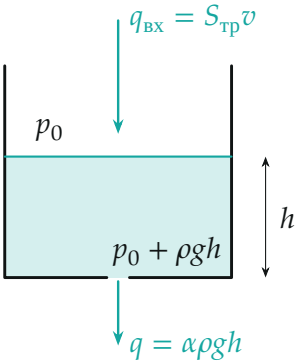


Рис. 1. Приток не зависит от h, отток пропорционален разности давлений $\rho g h$ у дна и у поверхности

Пункт 3. Скорость подъёма на половине высоты. Из баланса объёма при произвольной высоте h:

$$w = \frac{S_{\text{тр}} v - \alpha \rho g h}{S} = w_0 - \frac{\alpha \rho g}{S} h = w_0 \left(1 - \frac{h}{h_{\max}}\right)$$

(во втором слагаемом использовали $\alpha \rho g / S = w_0 / h_{\max}$ из пункта 2). Ско-

рость подъёма убывает линейно с высотой (рис. 2). При $h = h_{\max}/2$:

$$w = \frac{w_0}{2} = 0{,}030 \text{ м/с} = 3{,}00 \text{ см/с}.$$

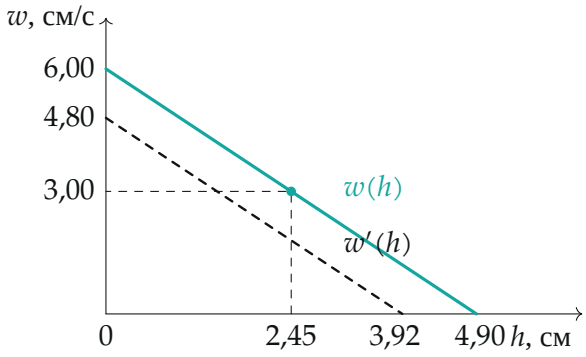


Рис. 2. Скорость подъёма уровня убывает линейно с высотой: бирюзовая — неподвижный сосуд, пунктир — сосуд, движущийся вниз (пункты 4–5)

Пункт 4. Сосуд движется вниз: начальная скорость подъёма. Перейдём в систему отсчёта сосуда. Она движется с постоянной скоростью u, поэтому инерциальная: давление в воде по-прежнему $\rho g h$, закон оттока тот же. Меняется только приток. Закон сложения скоростей: скорость воды в трубе относительно сосуда

$$\vec{v}_{\text{отн}} = \vec{v} - \vec{u},$$

оба вектора направлены вниз, поэтому в проекции на вертикаль вниз $v_{\text{отн}} = v - u = 1{,}6$ м/с (рис. 3). Вода из неподвижной трубы «догоняет» уходящий от неё сосуд, и за время Δt в сосуд входит только столб длиной $(v - u)\Delta t$:

$$q'_{\text{вх}} = S_{\text{тр}}(v - u).$$

Когда вода достигает дна, $h = 0$ и оттока нет:

$$w'_0 = \frac{S_{\text{тр}}(v - u)}{S} = w_0\left(1 - \frac{u}{v}\right),$$

$$w'_0 = 0{,}060 \cdot 0{,}8 \text{ м/с} = 0{,}048 \text{ м/с} = 4{,}80 \text{ см/с}.$$

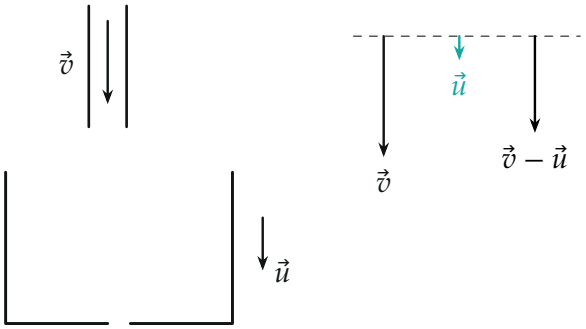


Рис. 3. Сосуд уходит вниз со скоростью u; относительно сосуда вода в трубе движется со скоростью $v - u$

Пункт 5. Максимальная высота в движущемся сосуде. Условие остановки уровня — отток равен новому притоку:

$$\alpha\rho g h'_{\max} = S_{\text{тр}}(v - u),$$

$$h'_{\max} = h_{\max}\left(1 - \frac{u}{v}\right) = 4{,}898 \cdot 0{,}8 \text{ см} = 3{,}92 \text{ см}.$$

Прямой счёт: $h'_{\max} = \dfrac{7{,}2 \cdot 10^{-4} \cdot 1{,}6}{3{,}0 \cdot 10^{-6} \cdot 9800}$ м $= 0{,}0392$ м — совпадает. На рис. 2 обе зависимости: пунктирная прямая начинается ниже (4,80 вместо 6,00 см/с) и обнуляется раньше (3,92 вместо 4,90 см).

Обратите внимание. Скорость w — это скорость уровня, а не скорость воды в струе: уровень поднимается в $S/S_{\text{тр}} = 33$ раза медленнее, чем течёт вода в трубе. И в пункте 2 высота $h_{\max}$ не достигается за конечное время — уровень приближается к ней всё медленнее, поэтому в условии «может подняться».

Проверка. Размерность $h_{\max}$: $\dfrac{\text{м/с} \cdot \text{м}^2}{\text{м}^3/(\text{с} \cdot \text{Па}) \cdot \text{Па/м}} = \text{м}$ (ρg имеет размерность Па/м). Предел $u \to v$: сосуд «убегает» от воды с её же скоростью, приток нулевой, и $w'_0 = h'_{\max} = 0$ — формулы это дают. Предел $u = 0$ возвращает пункты 1–2.

Смысл: приток постоянен, отток растёт с уровнем, поэтому уровень стремится к высоте, где они равны; движение сосуда уменьшает только приток.

Ответ. 1) $S_{\text{тр}} = 7{,}20$ см^2; 2) $h_{\max} = 4{,}90$ см; 3) $w = 3{,}00$ см/с; 4) $w'_0 = 4{,}80$ см/с; 5) $h'_{\max} = 3{,}92$ см.