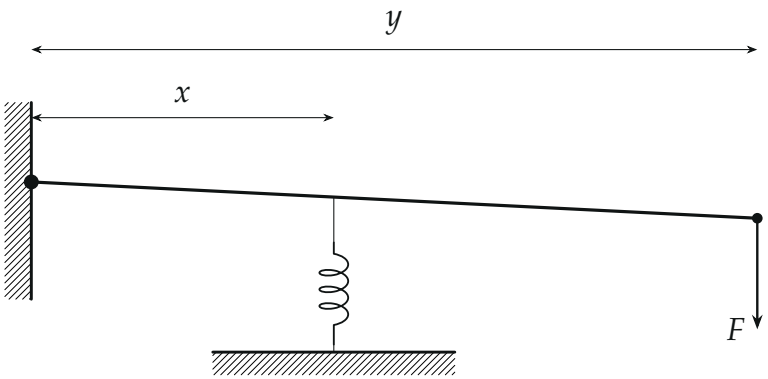
Стенд для испытания пружин

Задача 4. [ВсОШ 2025/26, школьный этап, 8 класс, задача 4] «Стенд для испытания пружин».

Когда механик массой $m = 75$ кг садится в автомобиль, суммарное дополнительное сжатие четырёх одинаковых автомобильных пружин под действием его веса составляет $d = 2{,}4$ см. Механик извлёк одну пружину и установил её в стенд для испытания пружин (см. рисунок). Стенд представляет собой лёгкий рычаг длиной $y = 60$ см, который шарнирно прикреплён к стене. Под рычагом на расстоянии $x = 6$ см от стены механик разместил пружину, а к свободному концу рычага приложил вертикально вниз силу F. В ходе испытания пружина в стенде сжалась на $z = 0{,}4$ см. Пружина и смещение конца рычага вертикальны. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



1. Определите коэффициент жёсткости пружины k. Ответ выразите в кН/м, округлив до сотых долей.
2. На какое расстояние в ходе испытания сместился свободный конец рычага? Ответ выразите в см, округлив до десятых долей.
3. Определите величину силы F. Ответ выразите в ньютонах, округлив до целого числа.
4. Механик планирует модернизировать стенд, передвинув пружину на $\Delta x = 1{,}7$ см ближе к стене. Каким будет вертикальное смещение свободного конца рычага в модернизированном стенде при

приложении к нему прежней вертикальной силы F? Ответ выразите в метрах, округлив до сотых долей.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на закон Гука и правило моментов для рычага. Жёсткость пружины узнаём из автомобиля: вес механика делится между четырьмя одинаковыми пружинами. В стенде лёгкий рычаг поворачивается вокруг шарнира на малый угол, поэтому вертикальные смещения его точек пропорциональны расстоянию до шарнира (подобные треугольники), а силы связаны правилом моментов. Выигрыш в силе у рычага оборачивается проигрышем в перемещении — отсюда квадрат в пункте 4.

Обозначения. k — жёсткость одной пружины; Δ — смещение свободного конца рычага; $F_{\text{упр}} = kz$ — сила упругости пружины, действующая на рычаг; штрих — величины модернизированного стенда, $x' = x - \Delta x$.

Пункт 1. Жёсткость пружины. Пружины одинаковые и нагружены одинаково, поэтому каждая сжалась на $d/4$ (рис. 1). Условие равновесия добавочного груза: вес механика уравновешен суммой добавочных сил упругости четырёх пружин (закон Гука для каждой):

$$mg = 4 \cdot k\,\frac{d}{4} = kd,$$

$$k = \frac{mg}{d} = \frac{75 \cdot 10}{0{,}024}\ \text{Н/м} = 31\,250\ \text{Н/м} = 31{,}25\ \text{кН/м}.$$

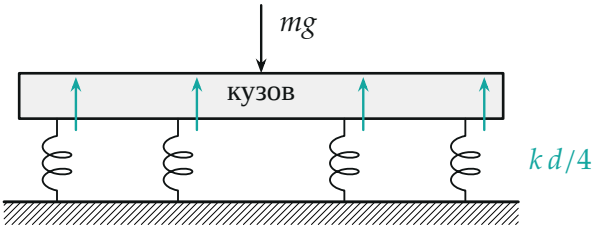


Рис. 1. Добавочный вес механика mg поровну делят четыре пружины, каждая сжата на $d/4$ и давит с силой $kd/4$

Пункт 2. Смещение конца рычага. Рычаг — жёсткий стержень, вращающийся вокруг шарнира O. Точка над пружиной опустилась на z, ко-

нец — на Δ (рис. 2). Треугольники с катетами x, z и y, Δ подобны (общий угол поворота при вершине O):

$$\frac{\Delta}{y} = \frac{z}{x} \quad \Rightarrow \quad \Delta = z\,\frac{y}{x} = 0{,}4 \cdot \frac{60}{6}\ \text{см} = 4{,}0\ \text{см}.$$

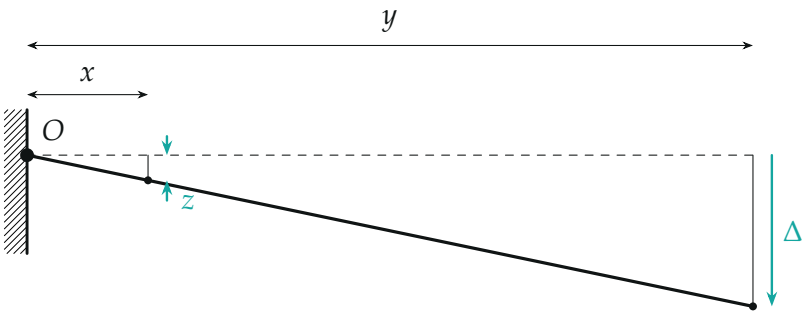


Рис. 2. Поворот рычага (наклон увеличен): смещения точек пропорциональны расстоянию до шарнира, $\Delta/y = z/x$

Пункт 3. Сила F. На лёгкий рычаг действуют три силы (рис. 3, длины стрелок примерно по модулю, F увеличена): F вниз на конце, сила упругости пружины $F_{\text{упр}} = kz$ вверх в точке на расстоянии x, реакция шарнира $\vec{R}$. Массы у рычага нет, поэтому сумма моментов сил относительно шарнира равна нулю (правило моментов; ось через O выбрана, чтобы неизвестная $\vec{R}$ выпала). Плечи — y и x (силы вертикальны, угол наклона мал):

$$Fy = kz\,x,$$

$$F = \frac{kzx}{y} = \frac{31\,250 \cdot 0{,}004 \cdot 0{,}06}{0{,}60}\ \text{Н} = 12{,}5\ \text{Н} \approx 13\ \text{Н}.$$

Сила упругости $kz = 125$ Н в $y/x = 10$ раз больше F, а конец рычага сместился в 10 раз больше, чем точка над пружиной: выигрыш в силе равен проигрышу в перемещении.

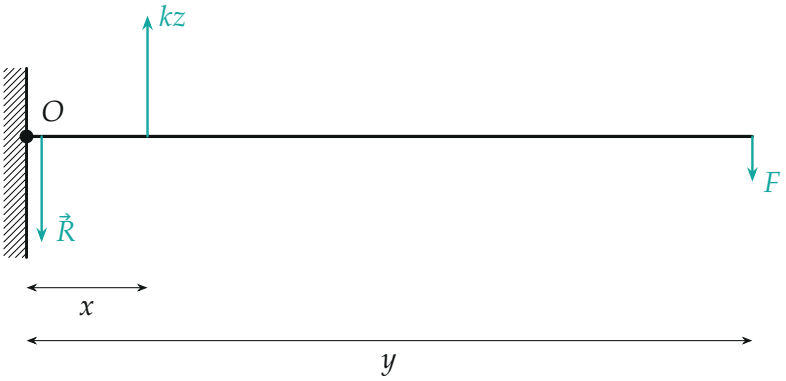


Рис. 3. Силы на лёгкий рычаг; моменты относительно шарнира: $Fy = kzx$

Пункт 4. Модернизированный стенд. Пружина теперь на расстоянии $x' = x - \Delta x = 6 - 1{,}7 = 4{,}3$ см от стены (рис. 4). Сила F прежняя. Сначала правило моментов — новое сжатие пружины:

$$Fy = kz'x' \quad \Rightarrow \quad z' = \frac{Fy}{kx'}.$$

Затем подобие треугольников — смещение конца:

$$\Delta' = z'\,\frac{y}{x'} = \frac{Fy^2}{kx'^2}.$$

Сравним с исходным стендом, где $\Delta = \dfrac{Fy^2}{kx^2}$ (та же цепочка): $\Delta' = \Delta\left(\dfrac{x}{x'}\right)^2$. Пружина ближе к оси — она сжимается сильнее (меньше плечо её силы) *и* это сжатие сильнее «раздувается» до конца рычага; оба множителя дают x/x':

$$\Delta' = 4{,}0 \cdot \left(\frac{6}{4{,}3}\right)^2 \text{ см} = 4{,}0 \cdot 1{,}947 \text{ см} = 7{,}8 \text{ см} \approx 0{,}08 \text{ м}.$$

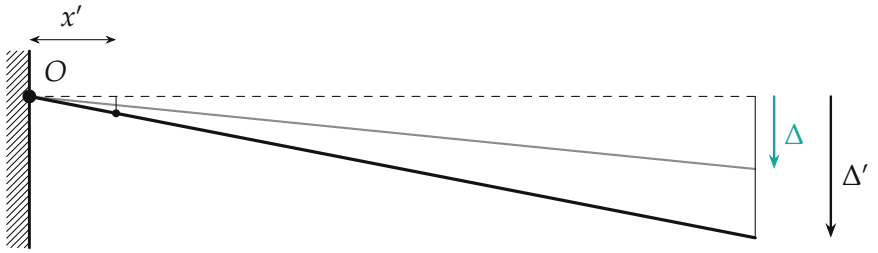


Рис. 4. Пружина ближе к шарниру: при той же силе F рычаг (чёрный) поворачивается сильнее, чем в исходном стенде (серый), $\Delta' = \Delta\,(x/x')^2$ (наклон увеличен)

Зависимость $\Delta(x) = \dfrac{Fy^2}{kx^2}$ при прежних F, k, y — на рис. 5 (точки посчитаны по формуле).

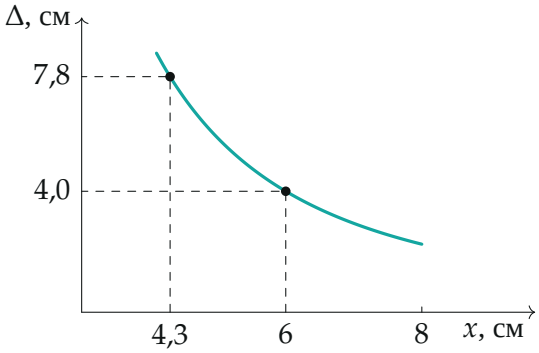


Рис. 5. Смещение конца рычага при той же силе F растёт как $1/x^2$ при приближении пружины к шарниру (ось x начинается с 3 см)

Обратите внимание. Сжатие $d = 2{,}4$ см — *суммарное* для четырёх пружин; каждая сжата на 0,6 см. Если принять d за сжатие одной пружины, жёсткость выйдет вчетверо меньше. И при переносе пружины меняется не только «передаточное отношение» смещений y/x, но и сжатие самой пружины — зависимость квадратичная, а не линейная.

Проверка. Размерность: $[mg/d]$ = Н/м, $[Fy^2/(kx^2)]$ = Н/(Н/м) = м. Второй способ для пункта 4 — энергия: работа силы F при медленном нагружении $\frac{1}{2}F\Delta'$ равна энергии пружины $\frac{1}{2}kz'^2$; с $z' = Fy/(kx') =$

5,58 мм получаем $\Delta' = kz'^2/F = 31\,250 \cdot 0{,}00558^2/12{,}5$ м $= 0{,}078$ м — совпадает. Предел $x' \to y$: пружина под концом, $\Delta' = F/k$ — просто закон Гука.

Смысл: рычаг выигрывает в силе ровно во столько раз, во сколько проигрывает в перемещении, поэтому смещение конца растёт как квадрат отношения плеч.

Ответ. 1) $k = mg/d = 31{,}25$ кН/м; 2) $\Delta = zy/x = 4{,}0$ см; 3) $F = kzx/y = 12{,}5$ Н ≈ 13 Н; 4) $\Delta' = \Delta\,(x/x')^2 \approx 0{,}08$ м.