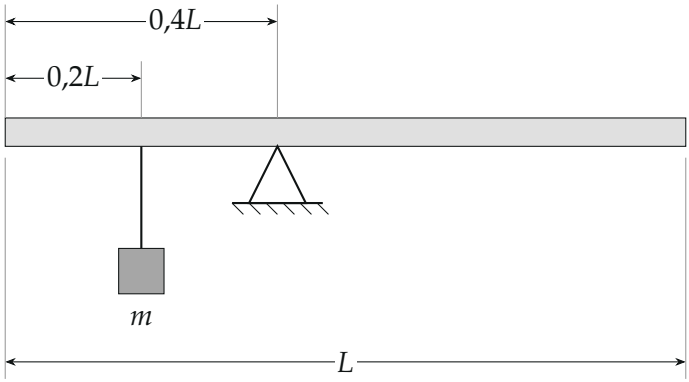
Груз над водой, груз в воде

Задача 1. [ВсОШ 2025/26, школьный этап, 9 класс, задача 1] «Груз над водой, груз в воде».

Однородная доска длиной $L = 1{,}20$ м с прямоугольным сечением площадью $S = 24$ см^2 уравновешена горизонтально на единственной опоре. Точка опоры находится на расстоянии $0{,}4L$ от левого конца доски. К доске на расстоянии $0{,}2L$ от того же конца подвешен алюминиевый груз. Плотности древесины и алюминия равны соответственно $\rho_д = 750$ кг/м^3 и $\rho_{ал} = 2700$ кг/м^3. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2.

1. Найдите массу доски M. Ответ выразите в кг, округлив до сотых долей. (2 балла)
2. Определите массу груза m, при которой система находится в равновесии. Ответ выразите в кг, округлив до сотых долей. (2 балла)
3. Найдите силу реакции опоры N_0 в этом положении. Ответ выразите в Н, округлив до десятых долей. (2 балла)
4. Груз полностью погружают в воду плотностью $\rho_в = 1000$ кг/м^3, при этом точку его подвеса смещают на расстояние Δx, чтобы доска осталась в горизонтальном положении равновесия. Точка опоры не меняется. Определите расстояние Δx. Ответ выразите в м, округлив до сотых долей. (2 балла)
5. Найдите отношение силы реакции опоры N_1 в новом состоянии равновесия к её значению N_0 в первоначальном состоянии, $\dfrac{N_1}{N_0}$. Ответ округлите до тысячных долей. (2 балла)



Поясняющий рисунок. Доска на опоре, груз подвешен левее опоры

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равновесие рычага и закон Архимеда. Доска — рычаг с осью в точке опоры. Справа от опоры доску тянет вниз её собственная сила тяжести (центр доски правее опоры), слева — груз. Равновесие задаёт правило моментов относительно опоры: туда реакция опоры вклада не даёт, её плечо ноль. Реакцию опоры найдём из равенства нулю суммы сил. В воде на груз действует ещё сила Архимеда, нить тянет доску слабее — чтобы момент сохранился, груз надо отодвинуть дальше от опоры.

Обозначения. O — точка опоры, $x_O = 0{,}4L$; центр доски C, $x_C = 0{,}5L$; $a = x_C - x_O = 0{,}1L = 0{,}12$ м — плечо силы тяжести доски; $b = x_O - 0{,}2L = 0{,}2L = 0{,}24$ м — плечо груза; T — сила натяжения нити; F_A — сила Архимеда; b' — новое плечо груза.

1. Масса доски. Доска однородная, её объём SL:

$$M = \rho_\text{д} SL = 750 \cdot 24 \cdot 10^{-4} \cdot 1{,}20 \text{ кг} = 2{,}16 \text{ кг}.$$

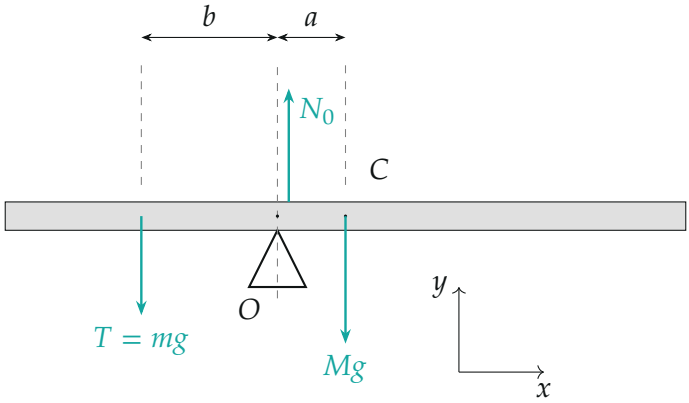


Рис. 1. Силы, действующие на доску в первом положении, и их плечи относительно опоры O

2. Масса груза. Груз висит неподвижно, значит, нить тянет его вверх с силой mg, а доску — вниз с той же силой $T = mg$ (третий закон Ньютона, нить невесома). Правило моментов для доски относительно точки O: момент силы тяжести доски (поворачивает по часовой стрелке) равен моменту силы натяжения (против часовой):

$$Mg\,a = mg\,b \implies m = M\frac{a}{b} = 2{,}16 \cdot \frac{0{,}12}{0{,}24}\ \text{кг} = 1{,}08\ \text{кг}.$$

3. Реакция опоры. Доска покоится — сумма сил на неё равна нулю. В проекции на ось y:

$$N_0 - Mg - mg = 0 \implies N_0 = (M + m)g = 3{,}24 \cdot 10\ \text{Н} = 32{,}4\ \text{Н}.$$

4. Силы на груз в воде. Объём груза $V = m/\rho_{\text{ал}}$. Закон Архимеда:

$$F_{\text{А}} = \rho_{\text{в}} g V = \rho_{\text{в}} g \frac{m}{\rho_{\text{ал}}} = 1000 \cdot 10 \cdot \frac{1{,}08}{2700}\ \text{Н} = 4{,}0\ \text{Н}.$$

Тело m (рис. 2): на него действуют mg вниз, T и $F_{\text{А}}$ вверх. Груз покоится — второй закон Ньютона в проекции на ось y:

$$T + F_{\text{А}} - mg = 0 \implies T = mg - F_{\text{А}} = 10{,}8 - 4{,}0 = 6{,}8\ \text{Н}.$$

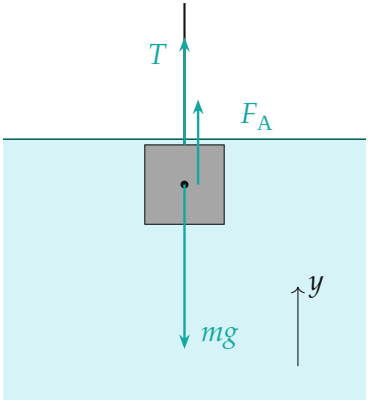


Рис. 2. Тело m в воде: сила Архимеда берёт на себя часть веса, нить тянет слабее

5. Смещение точки подвеса. Правило моментов для доски относительно той же опоры O, но с новым плечом груза b':

$$Mg\,a = T\,b' \implies b' = \frac{Mga}{T} = \frac{21{,}6 \cdot 0{,}12}{6{,}8}\ \text{м} = 0{,}381\ \text{м}.$$

Нить тянет слабее, поэтому плечо нужно больше: точку подвеса сдвигают влево, дальше от опоры, на

$$\Delta x = b' - b = 0{,}381 - 0{,}240 = 0{,}141\ \text{м} \approx 0{,}14\ \text{м}.$$

Новая точка подвеса — на расстоянии $0{,}48 - 0{,}381 = 0{,}099$ м от левого конца, на доске хватает места.

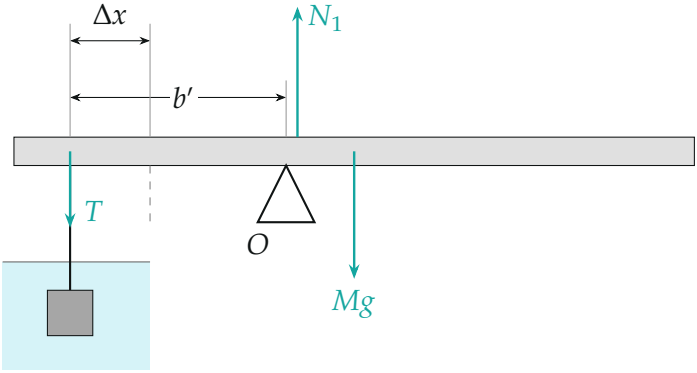


Рис. 3. Груз в воде: точку подвеса сдвинули от опоры на Δx, плечо выросло до b'

6. Новая реакция опоры. Равенство нулю суммы сил на доску в проекции на ось y:

$$N_1 = Mg + T = 21{,}6 + 6{,}8 = 28{,}4\ \text{Н}, \qquad \frac{N_1}{N_0} = \frac{28{,}4}{32{,}4} = 0{,}877.$$

Второй способ — рассмотреть систему «доска + груз»: снаружи на неё действуют $(M+m)g$, N_1 и $F_\text{А}$ (вода выталкивает груз вверх), поэтому $N_1 = (M+m)g - F_\text{А}$ и

$$\frac{N_1}{N_0} = 1 - \frac{F_\text{А}}{(M+m)g} = 1 - \frac{4{,}0}{32{,}4} = 0{,}877.$$

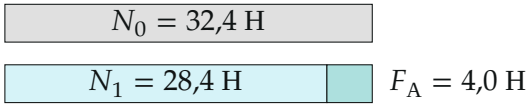


Рис. 4. Реакция опоры уменьшилась ровно на силу Архимеда: часть веса груза держит вода

Обратите внимание. Если бы точку подвеса не двигали, доска бы повернулась: момент нити Tb стал меньше момента Mga. Сдвиг нужен именно *от* опоры, а не к ней.

Проверка. Размерности: кг, Н, м. Предел: при $\rho_\text{в} \to 0$ сила Архимеда исчезает, $T \to mg$, $b' \to b$, $\Delta x \to 0$, $N_1 \to N_0$ — верно.

Смысл: вода уменьшает силу, с которой груз тянет доску, и равновесие восстанавливают увеличением плеча.

Ответ. 1) $M = 2{,}16$ кг; 2) $m = 1{,}08$ кг; 3) $N_0 = 32{,}4$ Н; 4) $\Delta x \approx 0{,}14$ м; 5) $N_1/N_0 \approx 0{,}877$.