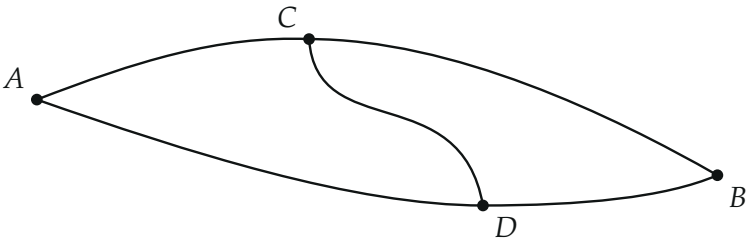
Оптимальный маршрут туриста

Задача 2. [ВсОШ 2025/26, школьный этап, 9 класс, задача 2] «Оптимальный маршрут туриста».

Железнодорожные станции A, B, C и D связаны несколькими маршрутами. От станции A до станции B с промежуточной остановкой на станции C ходит поезд «Аист». Он отправляется от A с интервалами 2 ч, начиная с 5:30, а весь маршрут занимает у «Аиста» 280 минут. Также из A в B, но с остановкой в D, ходит поезд «Журавль». Интервалы его следования составляют 50 минут, первый «Журавль» отправляется в 5:50, а весь маршрут занимает у него 240 минут. Временем остановок поездов можно пренебречь. На всём своём маршруте «Аисты» следуют с постоянной средней скоростью. Средняя скорость «Журавлей» также постоянна, но отличается от скорости «Аистов».

Между станциями C и D курсируют в обоих направлениях электрички «Беркут». От станции C в направлении D и от станции D в направлении C «Беркуты» отправляются одновременно с интервалами 30 минут, начиная с 6:00. Маршрут между C и D занимает у них 20 минут.

В приведённой ниже таблице указаны расстояния между станциями и стоимость проезда от одной до другой.



Участок	Длина, км	Стоимость, руб
AC	180	140
CB	270	210
AD	220	320
DB	190	120
CD	60	80

Турист прибыл на станцию A в 9:20, ему нужно добраться до станции B. Временем пересадок между поездами и электричками можно пренебречь.

1. Найдите минимальную стоимость проезда от A до B. Ответ выразите в рублях, округлив до целого числа. (2 балла)
2. Найдите минимальное общее время пути по маршруту A → D → C → B (включая время ожидания на станциях). Ответ выразите в минутах, округлив до целого числа. (2 балла)
3. Найдите среднюю скорость по маршруту A → D → C → B, считая всё время с момента прибытия туриста на станцию A до прибытия в B (включая ожидания). Ответ выразите в км/ч, округлив до десятых долей. (3 балла)
4. Найдите минимально возможное время пути из A в B для любых маршрутов (включая время ожидания на станциях). Ответ выразите в минутах, округлив до целого числа. (3 балла)

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на равномерное движение и расписание. Сначала нужно узнать, когда каждый поезд проходит каждую станцию: скорость поезда на всём маршруте одна и та же, поэтому время на участке пропорционально его длине. Дальше турист на каждой станции садится на ближайший подходящий поезд — ждать следующего никогда не выгодно, все поезда одной линии идут одинаково быстро.

Обозначения. Время считаем в минутах от полуночи: 9:20 = 560 мин. t_{AC}, t_{CB} — время «Аиста» на участках, t_{AD}, t_{DB} — время «Журавля»; $t_{CD} = 20$ мин — «Беркут».

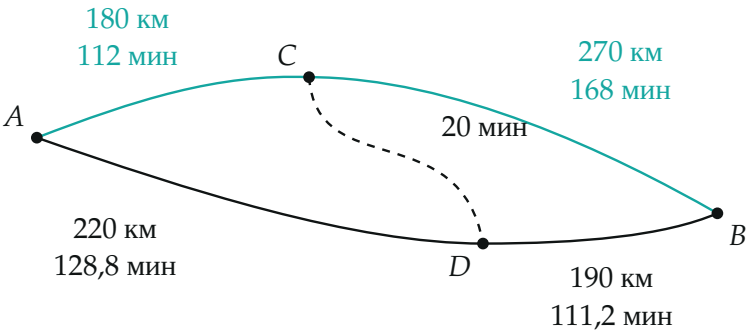


Рис. 1. Время в пути на участках: «Аист» (бирюзовый), «Журавль» (чёрный), «Беркут» (пунктир)

1. Время на участках. Скорость «Аиста» постоянна, поэтому время на участке пропорционально длине:

$$t_{AC} = 280 \cdot \frac{180}{180+270} = 112 \text{ мин}, \qquad t_{CB} = 280 - 112 = 168 \text{ мин}.$$

Так же для «Журавля» на маршруте $AD + DB = 220 + 190 = 410$ км:

$$t_{AD} = 240 \cdot \frac{220}{410} = 128{,}8 \text{ мин}, \qquad t_{DB} = 240 - 128{,}8 = 111{,}2 \text{ мин}.$$

2. Расписание проходов станций. Отправления из A: «Аист» — $330, 450, 570, 690, \ldots$; «Журавль» — $350, 400, \ldots, 550, 600, 650, \ldots$; «Беркут» из C и из D — $360, 390, \ldots$ (каждые 30 мин). Проход станции = отправление из A + время участка: «Аист» проходит C в $442, 562, 682, 802, \ldots$; «Журавль» проходит D в $\ldots, 678{,}8,\ 728{,}8,\ 778{,}8, \ldots$.

Пункт 1. Минимальная стоимость. Из A в B ведут четыре маршрута без повторов станций; складываем цены участков:

$$\begin{aligned} ACB &: \quad 140 + 210 = 350 \text{ руб}, \\ ADB &: \quad 320 + 120 = 440 \text{ руб}, \\ ACDB &: \quad 140 + 80 + 120 = 340 \text{ руб}, \\ ADCB &: \quad 320 + 80 + 210 = 610 \text{ руб}. \end{aligned}$$

Самый дешёвый — $ACDB$: 340 руб.

Пункт 2. Маршрут A → D → C → B. Идём по станциям и каждый раз берём ближайший поезд:

- в A турист в 560; ближайший «Журавль» — в 600 (предыдущий ушёл в 550). В D он прибывает в $600 + 128{,}8 = 728{,}8$;
- «Беркуты» из D уходят в $720, 750, \ldots$; ближайший — 750, в C он прибывает в 770;
- «Аисты» проходят C в $682, 802, \ldots$; ближайший — 802, в B — в $802 + 168 = 970$ (16:10).

Полное время

$$t_{ADCB} = 970 - 560 = 410 \text{ мин.}$$

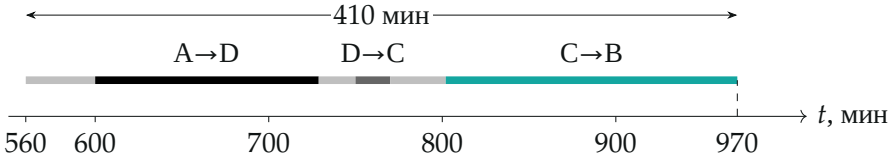


Рис. 2. Маршрут ADCB во времени: светло-серое — ожидание на станциях (40 + 21,2 + 32 = 93,2 мин), цветное — движение

Пункт 3. Средняя скорость — весь путь, делённый на всё время, включая ожидания:

$$s = AD + DC + CB = 220 + 60 + 270 = 550 \text{ км},$$

$$v_{\text{ср}} = \frac{s}{t_{ADCB}} = \frac{550 \text{ км}}{410/60 \text{ ч}} = 80{,}5 \text{ км/ч}.$$

Пункт 4. Самый быстрый маршрут. Переберём все четыре маршрута, на каждой станции беря ближайший поезд:

ADB :	«Журавль» 600 → B 600 + 240 = 840,	280 мин;
ACB :	«Аист» 570 → B 570 + 280 = 850,	290 мин;
$ACDB$:	«Аист» 570 → C 682; «Беркут» 690 → D 710;	
	«Журавль» 728,8 → B 840,	280 мин;
$ADCB$:	(пункт 2) → B 970,	410 мин.

Раньше всех турист попадает в B в 840 (14:00): минимальное время 280 мин. Его дают два маршрута: прямо на «Журавле» ADB и самый дешёвый $ACDB$ — на «Беркуте» турист догоняет тот же «Журавль», что ушёл из A в 600.

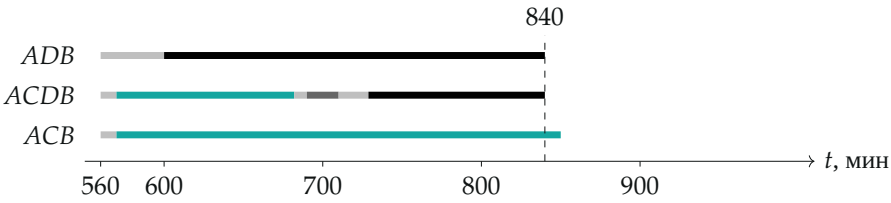


Рис. 3. Три быстрых маршрута: ADB и ACDB приводят в B одновременно, в 840; ACB — на 10 мин позже

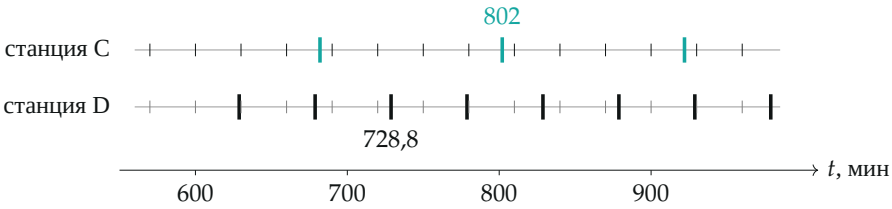


Рис. 4. Проходы станций: длинные штрихи — «Аист» через C (бирюзовые) и «Журавль» через D (чёрные), короткие — отправления «Беркутов» (каждые 30 мин)

Обратите внимание. Время «Журавля» на участке AD — не половина от 240 мин, а доля по длине: 220/410. А самый дешёвый маршрут *ACDB* оказывается и самым быстрым — так бывает только при удачном расписании.

Проверка. Размерность $v_{ср}$ — км/ч. Скорости поездов: «Аист» $450/(280/60) = 96$ км/ч, «Журавль» $410/4 = 102{,}5$ км/ч, «Беркут» $60/(20/60) = 180$ км/ч. Средняя скорость по ADCB 80,5 км/ч меньше всех них — так и должно быть из-за ожиданий (93 мин из 410).

Смысл: в задаче на расписание всё решает момент прохода станции, а он складывается из времени отправления и времени на участке.

Ответ. 1) 340 руб (маршрут ACDB); 2) 410 мин; 3) 80,5 км/ч; 4) 280 мин.