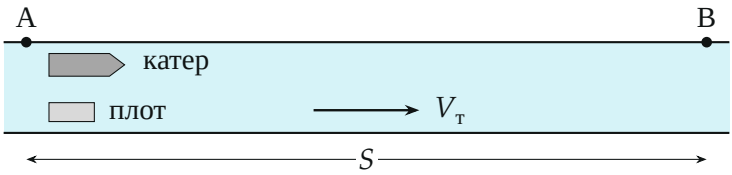
Катер и плот

Задача 5. [ВсОШ 2025/26, школьный этап, 9 класс, задача 5] «Катер и плот».

Между пунктами A и B, находящимися на одной реке на расстоянии $S = 18$ км, курсирует катер, мгновенно разворачиваясь без остановок в пунктах. В тот момент, когда катер выходит из пункта A, вместе с ним также отправляется плот в направлении пункта B. Скорость катера относительно воды равна $V_к = 21$ км/ч, скорость течения реки равна $V_т = 3$ км/ч.

1. На каком расстоянии d_1 от A произойдёт первая встреча? Ответ выразите в километрах, округлив до десятых долей. (2 балла)
2. На каком расстоянии d_2 от A произойдёт вторая встреча? Ответ выразите в километрах, округлив до десятых долей. (2 балла)
3. Сколько раз встретятся катер и плот, не считая встречу в начальный момент времени? (3 балла)
4. Каково максимальное расстояние L_{max} между катером и плотом до прибытия плота в пункт B? Ответ выразите в километрах, округлив до десятых долей. (3 балла)



Поясняющий рисунок. Катер и плот одновременно выходят из A; течение направлено от A к B

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на относительность движения. Плот плывёт со скоростью течения, катер относительно берега движется со скоростью $V_к + V_т$ вниз по реке и $V_к - V_т$ вверх. Удобнее всего смотреть на всё из системы отсчёта воды: в ней плот стоит на месте, а катер ходит туда и обратно с одной и той же скоростью $V_к$; поэтому от разворота до встречи катер идёт ровно столько, сколько шёл от плота до разворота. Ответы проверим графиком координат $x(t)$: встречи — пересечения графиков.

Обозначения. Ось x от А к В, начало в А; $v_{\downarrow} = V_к + V_т = 24$ км/ч, $v_{\uparrow} = V_к - V_т = 18$ км/ч — скорости катера относительно берега; $x_п = V_т t$ — координата плота; $t_п = S/V_т = 6$ ч — плот приходит в В.

1. Расписание катера. Из А в В катер идёт $S/v_{\downarrow} = 18/24 = 0{,}75$ ч, обратно $S/v_{\uparrow} = 18/18 = 1{,}0$ ч; полный круг 1,75 ч. Развороты в В: 0,75; 2,5; 4,25; 6,0 ч; в А: 1,75; 3,5; 5,25 ч.

Пункт 1. Первая встреча. Катер дошёл до В и идёт навстречу плоту. Координата катера после разворота $x_к = S - v_{\uparrow}(t - 0{,}75)$. Встреча — координаты равны:

$$S - v_{\uparrow}(t_1 - 0{,}75) = V_т t_1 \implies 18 - 18t_1 + 13{,}5 = 3t_1 \implies t_1 = 1{,}5 \text{ ч},$$

$$d_1 = V_т t_1 = 4{,}5 \text{ км}.$$

Второй способ, в системе воды: катер удалялся от плота 0,75 ч со скоростью $V_к$, столько же и возвращается: $t_1 = 2 \cdot 0{,}75 = 1{,}5$ ч — то же.

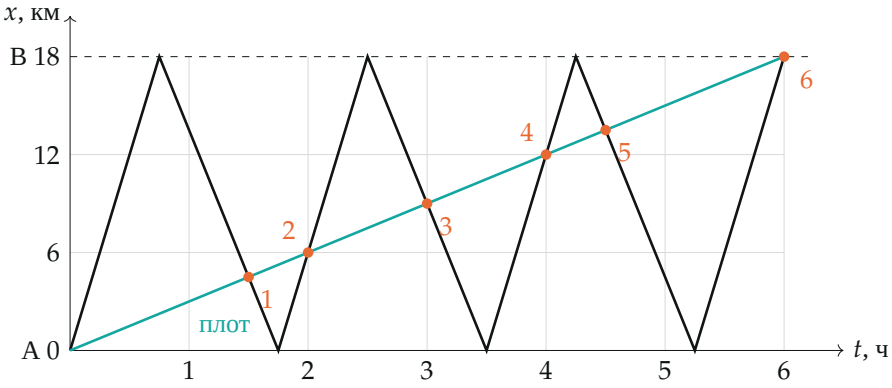


Рис. 1. Графики $x(t)$: катер — ломаная, плот — бирюзовая прямая $x = 3t$. Точки пересечения (красные) — встречи; их шесть

Пункт 2. Вторая встреча. Катер разворачивается в А в момент 1,75 ч и догоняет плот, идя по течению: $x_к = v_{\downarrow}(t - 1{,}75)$:

$$24(t_2 - 1{,}75) = 3t_2 \implies 21t_2 = 42 \implies t_2 = 2{,}0 \text{ ч}, \qquad d_2 = V_т t_2 = 6{,}0 \text{ км}.$$

Проверка в системе воды: от встречи в 1,5 ч до разворота в А прошло 0,25 ч, столько же катер возвращается к плоту: 1,75 + 0,25 = 2,0 ч.

Пункт 3. Число встреч. Встречи бывают на каждом участке ломаной, пока плот не дошёл до B. Так же, как в пунктах 1–2, находим все моменты (рис. 1):

№	1	2	3	4	5	6
t, ч	1,5	2,0	3,0	4,0	4,5	6,0
x, км	4,5	6,0	9,0	12,0	13,5	18,0

Встречи против течения (катер идёт от B) — в 1,5; 3,0; 4,5 ч, то есть через 1,5 ч; встречи по течению (катер догоняет плот) — в 2,0; 4,0 ч. Последняя, в 6,0 ч, — в самом пункте B: катер приходит в B ровно тогда же, когда и плот ($3 \cdot 1{,}75 + 0{,}75 = 6{,}0$ ч). Всего 6 встреч.

Пункт 4. Наибольшее расстояние. Между разворотами обе скорости постоянны, поэтому расстояние $L = |x_к - x_п|$ меняется линейно, а наибольшее значение принимает в момент разворота катера. Считаем во всех разворотах:

t, ч	0,75	1,75	2,5	3,5	4,25	5,25	6,0
$x_к$, км	18	0	18	0	18	0	18
$x_п$, км	2,25	5,25	7,5	10,5	12,75	15,75	18
L, км	15,75	5,25	10,5	10,5	5,25	15,75	0

Наибольшее $L_{max} = 15{,}75 \approx 15{,}8$ км — при первом развороте в B (и ещё раз при развороте в A в 5,25 ч). Формулой: $L_{max} = S - V_т \dfrac{S}{V_к + V_т} = S\dfrac{V_к}{V_к + V_т} = 18 \cdot \dfrac{21}{24} = 15{,}75$ км.

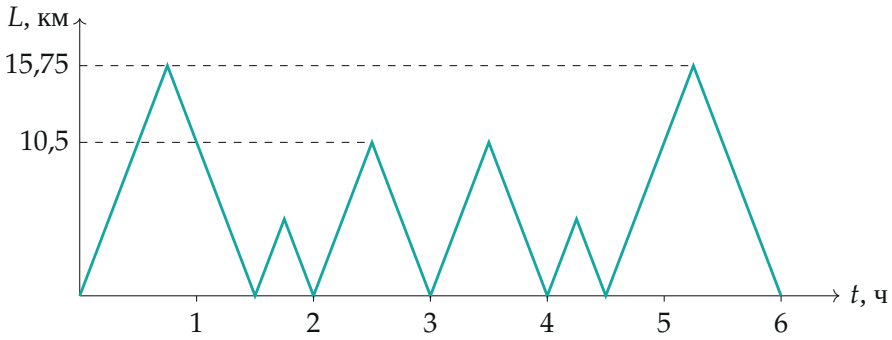


Рис. 2. Расстояние между катером и плотом: пилообразный график, нули — встречи, вершины — развороты катера

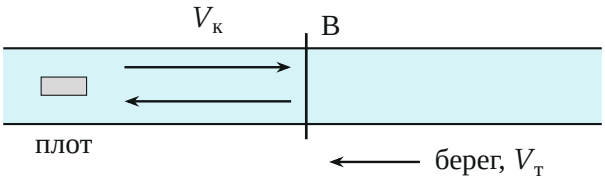


Рис. 3. В системе отсчёта воды плот покоится, катер уходит и возвращается с одной скоростью $V_к$ (туда и обратно по 0,75 ч), а берег с пунктом B плывёт навстречу со скоростью $V_т$

Обратите внимание. Встречу в момент 6,0 ч в пункте B нужно считать: плот ещё не «пришёл» раньше катера, они оказываются в B одновременно. Без неё получилось бы 5.

Проверка. Размерности: км/(км/ч) = ч. Предел $V_т \to 0$: плот стоит в A, $d_1 = 2SV_т/(V_к + V_т) \to 0$ — катер встречает его только у A, верно. Все встречи лежат на прямой $x = 3t$: например, $12{,}0 = 3 \cdot 4{,}0$.

Смысл: в системе отсчёта воды катер ходит туда и обратно одинаково быстро, и моменты встреч получаются почти без счёта.

Ответ. 1) $d_1 = \dfrac{2SV_т}{V_к + V_т} = 4{,}5$ км; 2) $d_2 = \dfrac{2SV_т}{V_к - V_т} = 6{,}0$ км; 3) 6 встреч; 4) $L_{max} = \dfrac{SV_к}{V_к + V_т} \approx 15{,}8$ км.