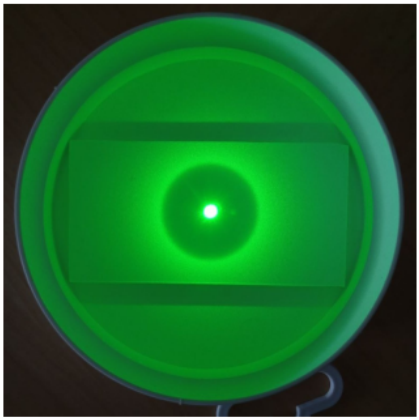
Тёмное пятно

Задача 1. [ВсОШ 2025/26, 10 класс, практический тур, задача 1]

Оборудование: лазерная указка (крепится к штативу с помощью прищепки); цилиндрический сосуд № 1 с прямоугольной пластиной; цилиндрический сосуд № 2 с круглой пластиной внутри; пластиковая линейка с длиной шкалы 8 см; стакан с неизвестной жидкостью; стакан с водой; шприц объёмом 22 мл; ламинированный шаблон, на который нанесена шкала; миллиметровая бумага для построения графика (3 листа); салфетки для поддержания чистоты. Неизвестную жидкость не пить! При случайном попадании небольшого количества жидкости в рот прополощите его большим количеством воды. При контакте с кожей неизвестная жидкость опасности не представляет. Не светить лазером в глаза себе и окружающим!

1.1. Возьмите сосуд № 1. Если на дно сосуда налить слой жидкости и посветить на него сверху лазером, можно увидеть следующую картину (см. фото 1).



Предложите теоретическую модель образования тёмного пятна и выведите теоретическую зависимость диаметра D пятна от толщины слоя h жидкости и показателя преломления $n_{ж}$ жидкости. При выводе считайте, что дно сосуда плоское и горизонтальное.

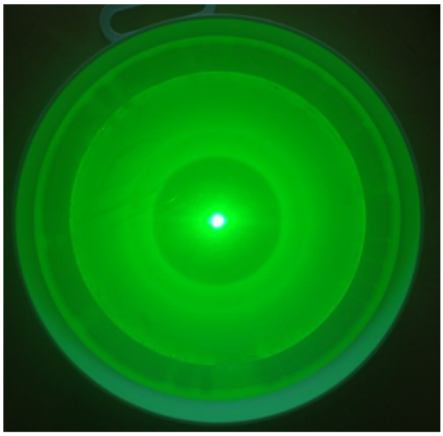
1.2. Наливая в сосуд № 1 воду, экспериментально исследуйте зависимость диаметра D тёмного пятна от объёма V воды в сосуде. Снимите не менее 7 точек в диапазоне $V \geqslant 50$ мл.

1.3. Повторите эксперимент, описанный в предыдущем пункте, взяв вместо воды неизвестную жидкость (НЖ). Снимите не менее 7 точек в диапазоне $V \geqslant 50$ мл.

1.4. Постройте в общей системе координат графики полученных в пп. 1.2 и 1.3 зависимостей. С помощью графиков определите показатель преломления $n_{нж}$ неизвестной жидкости. Оцените погрешность полученного значения. Здесь и далее показатель преломления воды примите равным $n_в = 1{,}334 \pm 0{,}001$.

2.1. Возьмите сосуд № 2. Если посветить лазером на пластину, можно увидеть картину, аналогичную фото 1. Измерьте диаметр D_0 тёмного пятна в данном случае. В задании 2.1 жидкость внутрь сосуда наливать не нужно!

2.2. Если пластина покрыта слоем жидкости, то картина меняется (см. фото 2). Предложите теоретическую модель и выведите теоретическую зависимость диаметра D тёмного пятна от толщины d пластины, высоты h слоя жидкости относительно пластины и показателей преломления материала пластины $n_{пл}$ и жидкости $n_ж$. При выводе зависимости считайте, что $n_{пл} > n_ж$.



2.3. Наливая воду в сосуд № 2, экспериментально исследуйте зависимость диаметра D тёмного пятна от объёма V воды. Снимите не менее 10 точек в диапазоне $V \geqslant 80$ мл.

2.4. Постройте график зависимости диаметра D тёмного пятна, образующегося в пластине (см. пп. 2.1 и 2.3), от объёма V налитой воды в диапазоне $0 \leqslant V \leqslant 200$ мл.

2.5. При наличии у графика особых точек (изломов, максимумов, минимумов и т.п.), укажите их координаты.

2.6. С помощью графика, построенного в п. 2.4, определите: а) показатель преломления материала пластины; б) толщину пластины. Оцените погрешности полученных значений.

3.1. Возьмите ламинированный шаблон и аккуратно налейте на его поверхность слой воды. Следите за тем, чтобы вода не достигала границы шаблона! Посветите на получившийся слой воды лазером. Измерьте диаметр D получившегося тёмного пятна. Используя формулу из п. 1.1, вычислите толщину h слоя воды. Оцените погрешность полученного значения.

3.2. Вычислите краевой угол θ (угол смачивания) поверхности шаблона водой, ответ приведите в угловых градусах. Оцените погрешность полученного значения. При вычислениях считайте, что коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma = (72 \pm 1)$ мН/м; плотность воды $\rho_в = (997 \pm 2)$ кг/м^3; ускорение свободного падения $g = (9{,}81 \pm 0{,}02)$ м/с^2.

▲ **Решение. Что происходит.** Дно сосуда матовое: луч лазера, попав на него, рассеивается, и освещённая точка становится точечным источником, излучающим во все стороны вверх. Дойдя до границы жидкости с воздухом, лучи с большим углом падения испытывают полное внутреннее отражение и возвращаются на дно, подсвечивая его. Лучи с малым углом падения выходят в воздух и обратно не возвращаются. Поэтому вокруг точки падения лазера остаётся тёмный круг, граница которого определяется лучом, идущим под предельным углом. Главная идея всей работы — записать радиус этого круга через толщины слоёв и показатели преломления, а потом превратить зависимость $D(V)$ в линейную и по наклонам найти показатели преломления.

Обозначения. D — диаметр тёмного пятна, h — толщина слоя жидкости, n — показатель преломления жидкости, $\alpha_{кр}$ — предельный угол полного отражения на границе жидкость–воздух, S — площадь сечения

сосуда.

Пункт 1.1. Модель тёмного пятна.

1. Предельный угол. На границе жидкости с воздухом полное отражение наступает при угле падения $\alpha \geq \alpha_{\text{кр}}$, где $\sin\alpha_{\text{кр}} = 1/n$. Для воды $\alpha_{\text{кр}} = \arcsin(1/1{,}334) \approx 48{,}6°$.

2. Радиус пятна. Луч, идущий от освещённой точки под предельным углом, проходит вверх на h, сдвигаясь по горизонтали на $h\,\text{tg}\,\alpha_{\text{кр}}$, отражается и за тот же путь вниз сдвигается ещё на $h\,\text{tg}\,\alpha_{\text{кр}}$ (рис. 1). Лучи с большими углами возвращаются на дно дальше, лучи с меньшими углами уходят в воздух. Поэтому радиус тёмного круга равен $2h\,\text{tg}\,\alpha_{\text{кр}}$, а диаметр $D = 4h\,\text{tg}\,\alpha_{\text{кр}}$. Выразим тангенс через $\sin\alpha_{\text{кр}} = 1/n$: $\text{tg}\,\alpha_{\text{кр}} = 1/\sqrt{n^2-1}$, и

$$D = \frac{4h}{\sqrt{n_{\text{ж}}^2 - 1}}. \qquad (1)$$

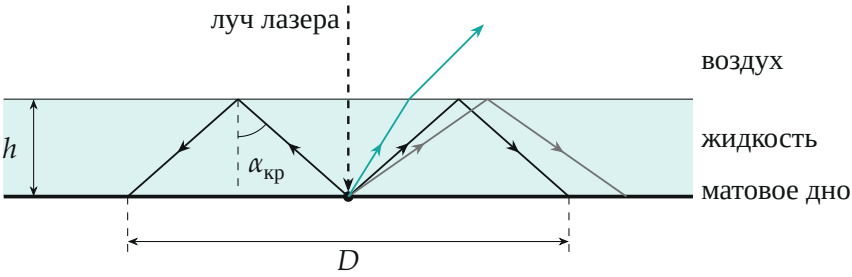


Рис. 1. Ход лучей от освещённой точки дна: луч под предельным углом (чёрный) возвращается на расстоянии $2h\,\text{tg}\,\alpha_{кр}$, луч с большим углом (серый) — дальше, луч с меньшим углом (бирюзовый) выходит наружу

Обратите внимание: тёмный круг не абсолютно чёрный: небольшая доля света отражается от границы и при углах меньше предельного (отражение Френеля), поэтому он слегка подсвечен, но граница заметна по резкому росту яркости.

Пункты 1.2–1.4. Опыт с водой и неизвестной жидкостью.

3. Линеаризация. В сосуд ставим линейку и шприцем доливаем жидкость порциями по 15 мл, после каждой измеряем диаметр пятна по

линейке. Толщина слоя над плоской площадкой дна растёт пропорционально объёму: $h = (V - V_0)/S$, где V_0 — объём пустого места вокруг площадки и линейки. По формуле (1)

$$D = k\,(V - V_0), \qquad k = \frac{4}{S\sqrt{n^2 - 1}}.$$

Зависимость линейна, а неизвестная площадь S одна и та же для обеих жидкостей и сокращается в отношении наклонов.

4. Результаты.

V, мл	50	65	80	95	110	125	140
$D_{\text{в}}$, мм	24	33	42	50	59	68	77
$D_{\text{нж}}$, мм	22	30	39	47	55	64	72

Таблица — типичный результат опыта (данные организаторов). Построим график (рис. 2) и проведём прямые методом наименьших квадратов:

$$k_{\text{в}} = 0{,}586 \text{ мм/мл}, \qquad k_{\text{нж}} = 0{,}557 \text{ мм/мл}.$$

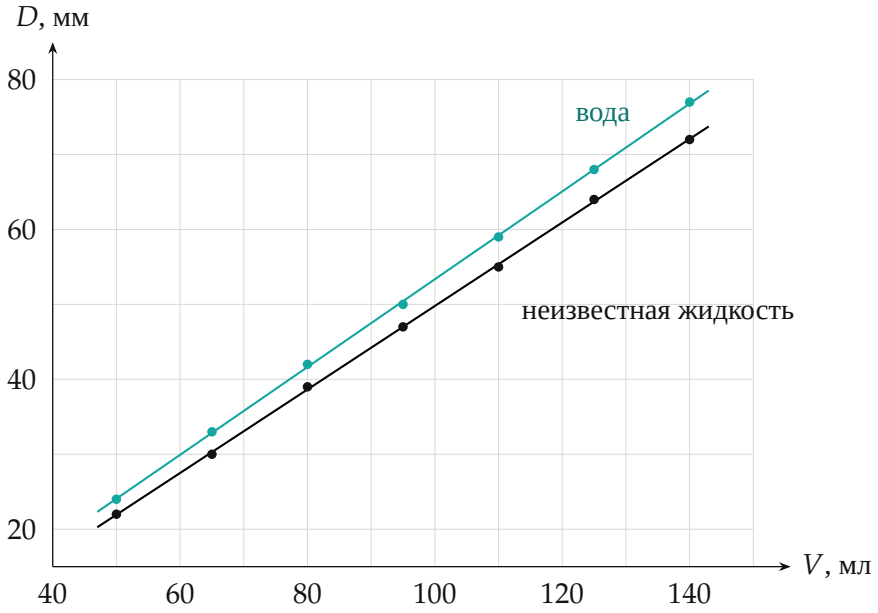


Рис. 2. Зависимость диаметра пятна от объёма жидкости (бары — $\pm 0{,}5$ мм); обе оси начинаются не с нуля: V — с 40 мл, D — с 15 мм

5. Показатель преломления. Из $k \propto 1/\sqrt{n^2-1}$ получаем

$$\gamma = \frac{k_\text{в}}{k_\text{нж}} = \sqrt{\frac{n_\text{нж}^2-1}{n_\text{в}^2-1}} \quad \Rightarrow \quad n_\text{нж} = \sqrt{1+\gamma^2\,(n_\text{в}^2-1)}.$$

По МНК $\gamma = 0{,}586/0{,}557 = 1{,}051$, откуда $n_\text{нж} = \sqrt{1+1{,}105\cdot 0{,}780} \approx 1{,}36$.

6. Погрешность. Диаметр отсчитан до 1 мм, так что статистический разброс точек вокруг прямых (0,3 мм) занижает ошибку; оценим её методом границ: сдвинем крайние точки на $\pm 0{,}5$ мм (половина деления). Тогда $\gamma_\text{max} = \frac{77{,}5-23{,}5}{71{,}5-22{,}5} = 1{,}10$ и $\gamma_\text{min} = \frac{76{,}5-24{,}5}{72{,}5-21{,}5} = 1{,}02$, откуда $n_\text{нж}$ лежит в интервале 1,35–1,40. Принимаем

$$n_\text{нж} = 1{,}36 \pm 0{,}03.$$

Пункты 2.1–2.2. Пластина под слоем жидкости.

7. Пластина в воздухе. Без жидкости пятно в пластине подчиняется формуле (1) с d вместо h и $n_{пл}$ вместо n: $D_0 = 4d/\sqrt{n_{пл}^2 - 1}$. Измерение даёт $D_0 = 34$ мм.

8. Два способа вернуться на дно. Свет рассеивается на нижней поверхности пластины и идёт вверх под углом β к нормали. Если на границе пластина–жидкость $\sin\beta < n_ж/n_{пл}$, луч входит в жидкость под углом γ: $n_{пл}\sin\beta = n_ж\sin\gamma$. На границе жидкость–воздух отражение полное при $\sin\gamma \geq 1/n_ж$, то есть при $\sin\beta \geq 1/n_{пл}$ — жидкость в условие не входит (рис. 3). Если же $\sin\beta \geq n_ж/n_{пл}$, луч полностью отражается уже от границы пластина–жидкость. Получаем две характерные точки возврата:

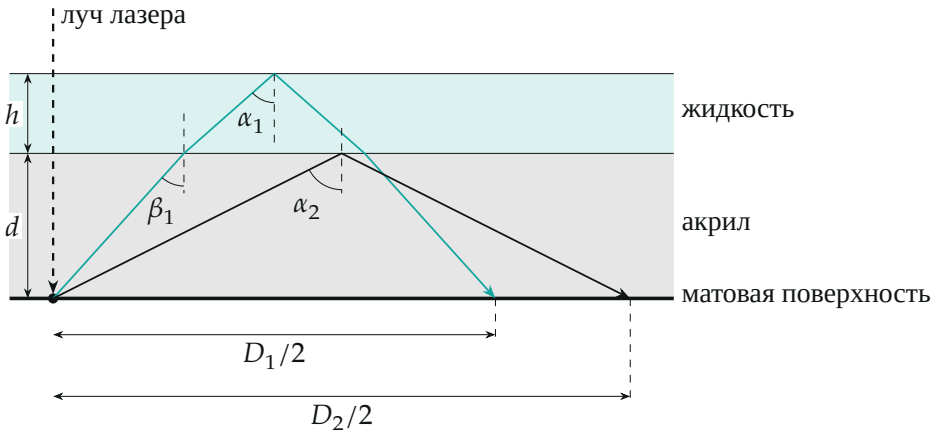


Рис. 3. Ход лучей в пластине с жидкостью: β_1 — угол, при котором луч полностью отражается от границы с воздухом (бирюзовый), α_2 — угол полного отражения от границы пластина–жидкость (чёрный)

а) луч с $\sin\beta_1 = 1/n_{пл}$ доходит до границы с воздухом под углом α_1, $\sin\alpha_1 = 1/n_ж$, и возвращается на расстоянии $D_1/2 = 2d\,\mathrm{tg}\,\beta_1 + 2h\,\mathrm{tg}\,\alpha_1$:

$$D_1 = \frac{4d}{\sqrt{n_{пл}^2 - 1}} + \frac{4h}{\sqrt{n_ж^2 - 1}}; \qquad (2)$$

б) луч с $\sin\alpha_2 = n_ж/n_{пл}$ отражается от границы пластина–жидкость

и возвращается на расстоянии $D_2/2 = 2d\,\mathrm{tg}\,\alpha_2$:

$$D_2 = \frac{4d}{\sqrt{(n_{\text{пл}}/n_{\text{ж}})^2 - 1}}. \qquad (3)$$

9. Что видно на пластине. Лучи с $\beta < \beta_1$ уходят в воздух, лучи с $\beta_1 \le \beta < \beta_2$ возвращаются на расстоянии не меньше $D_1/2$ (оно растёт до бесконечности при $\beta \to \beta_2$), лучи с $\beta \ge \beta_2$ — не ближе $D_2/2$. Значит, тёмное пятно ограничено меньшим из двух радиусов, а большее значение определяет внешнее светлое кольцо (фото 2):

$$D = \min(D_1, D_2).$$

При $h = 0$ формула (2) даёт D_0 — совпадает с п. 7.

Пункты 2.3–2.6. Опыт и график.

10. Опыт. Наливаем воду в сосуд № 2 и измеряем диаметр пятна. Пока вода ($V < V_1$) занимает лишь зазор между стенками и пластиной и не покрывает её, диаметр постоянен: $D = D_0$. После покрытия пластины $h = (V - V_1)/S$, и (2) даёт линейный рост. Когда D_1 сравнивается с D_2, диаметр перестаёт расти: $D = D_2$.

V, мл	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180
D, мм	46	51	55	58	63	66	70	73	76	75	75

11. График и особые точки. Точки с $V = 80$–150 мл по МНК ложатся на прямую $D = 16{,}2 + 0{,}383\,V$ (мм, V в мл). Постоянные участки: $D_0 = 34$ мм (при $V < V_1$) и $D_2 = 75$ мм (при $V > V_2$; среднее трёх последних точек 75,3 мм). Излом при $D = D_0$ даёт $V_1 \approx 46$ мл, излом при $D = D_2$ — $V_2 \approx 154$ мл. График — ломаная из трёх участков, два из них горизонтальны (рис. 4); особые точки (46 мл; 34 мм) и (154 мл; 75 мм) с погрешностью по объёму ± 3 мл (экстраполяция до D_0 идёт от $V = 80$ мл).

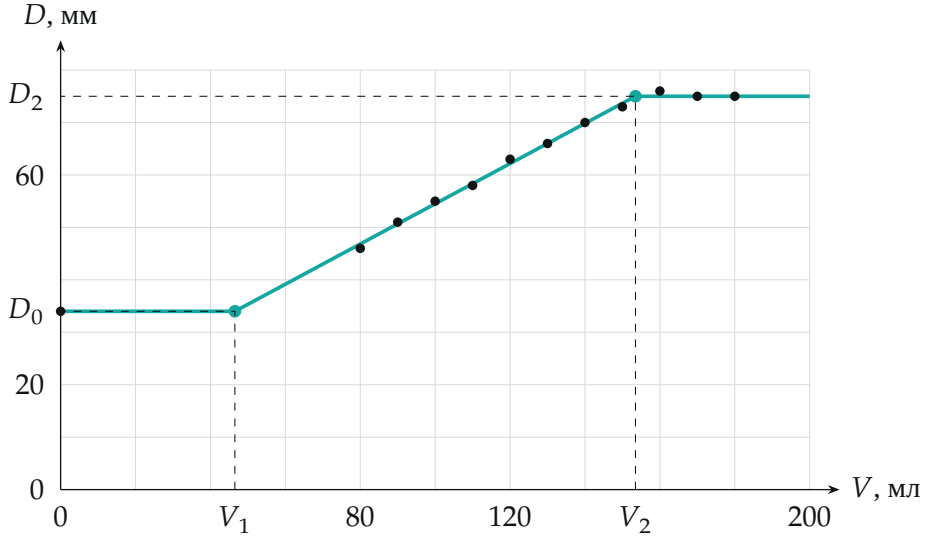


Рис. 4. $D(V)$ для сосуда № 2: ломаная с изломами V_1 и V_2 (точки — измерения)

12. Показатель преломления пластины. Из (3) и D_0: $D_2^2/D_0^2 = \dfrac{n_{\text{пл}}^2 - 1}{(n_{\text{пл}}/n_{\text{в}})^2 - 1} = \delta$, откуда

$$n_{\text{пл}} = n_{\text{в}}\sqrt{\frac{\delta - 1}{\delta - n_{\text{в}}^2}}, \qquad \delta = \left(\frac{75}{34}\right)^2 = 4{,}87,$$

$$n_{\text{пл}} = 1{,}334\sqrt{\frac{3{,}87}{4{,}87 - 1{,}78}} \approx 1{,}49.$$

13. Толщина пластины. Из $D_0 = 4d/\sqrt{n_{\text{пл}}^2 - 1}$:

$$d = \frac{D_0}{4}\sqrt{n_{\text{пл}}^2 - 1} = \frac{34}{4}\sqrt{1{,}49^2 - 1}\ \text{мм} \approx 9{,}4\ \text{мм}.$$

14. Погрешности. Примем $\Delta D_0 = \Delta D_2 = 1$ мм. Пересчёт при сдвиге D_0 на ± 1 мм даёт $n_{\text{пл}}$ от 1,48 до 1,51, d от 9,0 до 9,9 мм; сдвиг D_2 на ± 1

мм — ещё $\pm 0{,}007$ по $n_{\text{пл}}$ и $\pm 0{,}06$ мм по d. Складывая:

$$n_{\text{пл}} = 1{,}49 \pm 0{,}02, \qquad d = 9{,}4 \pm 0{,}5 \text{ мм}.$$

Пункты 3.1–3.2. Лужа на шаблоне.

15. Толщина слоя. Диаметр пятна измеряем по шкале шаблона: цена деления $C = 80$ мм$/105 \approx 0{,}762$ мм; в опыте $D_{\text{к}} = 19$ делений $\approx 14{,}5$ мм (данные организаторов; погрешность 1 деление, около 5–6 %). По формуле (1) для воды

$$h = \frac{D_{\text{к}}}{4}\sqrt{n_{\text{в}}^2 - 1} = \frac{14{,}5}{4} \cdot 0{,}883 \text{ мм} \approx 3{,}2 \text{ мм}, \qquad \Delta h \approx 0{,}2 \text{ мм}.$$

16. Краевой угол. Лужа много больше своей толщины, поэтому её верхняя поверхность плоская, а у края поверхность загибается и образует с шаблоном угол θ. Выделим вертикальный слой жидкости от края до области, где поверхность уже горизонтальна, и запишем условие равновесия в проекции на горизонтальную ось, на единицу длины края (рис. 5). Справа поверхностное натяжение плоской поверхности тянет слой вправо с силой σ, а гидростатическое давление жидкости справа давит влево со средней силой $\frac{1}{2}\rho g h^2$ (среднее давление $\rho g h/2$ на высоте h). Слева край удерживается шаблоном с силой $\sigma\cos\theta$ в сторону от лужи (по условию равновесия линии смачивания). Тогда

$$\sigma - \sigma\cos\theta - \frac{1}{2}\rho g h^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt{\frac{2\sigma(1-\cos\theta)}{\rho g}} = 2\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}\,\sin\frac{\theta}{2}.$$

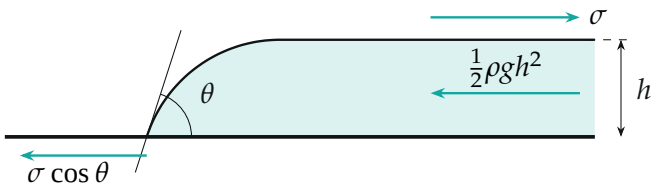


Рис. 5. Горизонтальные силы на вертикальный слой воды у края лужи (на единицу длины края)

Отсюда

$$\theta = 2\arcsin\Big(\frac{h}{2}\sqrt{\frac{\rho g}{\sigma}}\Big) = 2\arcsin\Big(\frac{3{,}2\cdot 10^{-3}}{2}\sqrt{\frac{997\cdot 9{,}81}{0{,}072}}\Big),$$

$$\theta = 2\arcsin 0{,}59 \approx 72^\circ.$$

17. Погрешность угла. Относительная погрешность аргумента арксинуса $A = 0{,}59$: $\varepsilon_A = \varepsilon_h + \frac{1}{2}(\varepsilon_\sigma + \varepsilon_\rho + \varepsilon_g) \approx 5{,}5\,\% + 0{,}9\,\% \approx 6\,\%$. Тогда

$$\Delta\theta = \frac{180^\circ}{\pi}\cdot\frac{2A\,\varepsilon_A}{\sqrt{1-A^2}} \approx 5^\circ, \qquad \theta = 72^\circ \pm 5^\circ.$$

Проверка. Размерности: $D = 4h/\sqrt{n^2-1}$ — длина, $\sqrt{\sigma/(\rho g)}$ — длина (капиллярная длина 2,7 мм). Предельные случаи: при $n \to 1$ диаметр растёт неограниченно (полного отражения нет, всё уходит), при $n \to \infty$ пятно сжимается в точку; при $\theta \to 180^\circ$ толщина лужи $h \to 2\sqrt{\sigma/(\rho g)} = 5{,}4$ мм — максимально возможная, при $\theta \to 0$ лужа бесконечно тонкая. Для угла: $h/(2l) = 3{,}2/5{,}4 = 0{,}59 = \sin(\theta/2)$, где $l = \sqrt{\sigma/(\rho g)}$, то есть $\theta/2 \approx 36^\circ$; типичные углы смачивания воды на гладком пластике лежат в пределах 70°–90°, результат разумен. Проверка размеров сосудов по наклонам: $k = 4/(S\sqrt{n^2-1})$ даёт $S \approx 7{,}7\cdot 10^3$ мм^2 (диаметр около 10 см) для сосуда № 1 и $S \approx 1{,}2\cdot 10^4$ мм^2 (около 12 см) для сосуда № 2 — разумные размеры.

Ответ. 1.1) $D = 4h/\sqrt{n_\text{ж}^2-1}$; 1.4) $n_\text{нж} = 1{,}36 \pm 0{,}03$; 2.1) $D_0 = 34$ мм; 2.2) $D = \min(D_1, D_2)$ с D_1 из (2) и D_2 из (3); 2.5) излом в (46 мл; 34 мм) и (154 мл; 75 мм); 2.6) $n_\text{пл} = 1{,}49 \pm 0{,}02$, $d = 9{,}4 \pm 0{,}5$ мм; 3.1) $h \approx 3{,}2 \pm 0{,}2$ мм; 3.2) $\theta \approx 72^\circ \pm 5^\circ$.