Веретено

Задача 1. [ВсОШ 2025/26, 11 класс, практический тур, задача 1]

Оборудование: мотор с редуктором; колесо, надевающееся на ось ведомого вала редуктора; шкив с отверстием под леску; лабораторный источник питания; два мультиметра со щупами; отрезок изоленты; соединительные провода крокодил–крокодил (3 шт.) и банан–крокодил (2 шт.); секундомер; леска длиной около 1,5 м (замена лески при необходимости производится только один раз); набор грузов (5 г, 10 г, 25 г, 36 г, 50 г); рулетка; штатив с лапкой и муфтой; ножницы; защитные очки; струбцина; пассатижи для затягивания узлов на леске. Внимание! Для измерения тока и напряжения используйте мультиметры. Показания измерительных блоков источника питания имеют большую погрешность. Не фиксируйте вал мотора при напряжениях его питания более 1 В. Не пропускайте через мультиметр в режиме 200 мА ток более 200 мА. Используйте только ручки регулировки напряжения на источнике питания.

Часть 1.

1.1. Зафиксируйте вал мотора и подайте на него напряжение, приблизительно равное 0,5 В. Измерьте значение силы тока, текущего через мотор, и напряжение на нём. Рассчитайте сопротивление обмоток мотора. Проведите измерения при 5 разных положениях вала мотора. Усредните полученные значения. Зарисуйте схему подключения измерительных приборов.

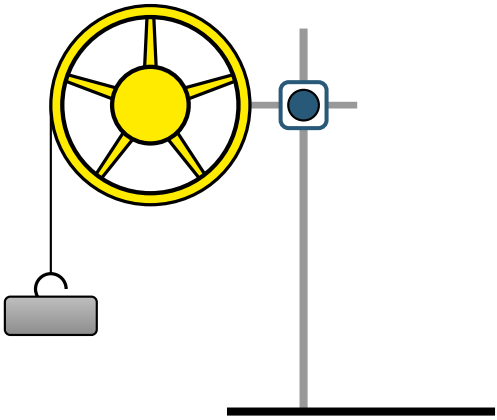
1.2. Наденьте колесо на вал редуктора. Подайте на мотор с надетым редуктором напряжение, превышающее $U_{\min} = 0{,}7$ В, но не более $U_{\max} = 4{,}5$ В. Измерьте для семи различных значений поданного напряжения ток, текущий через мотор, и частоту вращения колеса, приводимого в движение редуктором.

1.3. Рассчитайте значение ЭДС индукции мотора для каждой из измеренных точек и постройте график зависимости частоты вращения колеса от ЭДС индукции мотора. Какой функцией описывается измеренная зависимость? Аппроксимируйте экспериментальные точки данной функцией и рассчитайте её коэффициенты (или коэффициент).

1.4. Привяжите к колесу леску. Используйте для этого два просверлённых отверстия в колесе. Подайте напряжение на мотор, так чтобы колесо редуктора вращалось. Измерьте силу тока I, текущего через мо-

тор. Остановите мотор. Привяжите к концу лески грузик массой 50 г. Подайте то же самое напряжение на мотор. Если ограничение силы тока источника питания не позволяет привести в движение колесо, подтолкните его рукой. Измерьте силу тока I', текущего через мотор в этом случае. Рассчитайте разность измеренных сил тока $\Delta I = I' - I$. Проделайте данный эксперимент для нескольких значений поданного напряжения и усредните измеренные разности тока.

1.5. Рассчитайте отношение β момента силы (относительно оси вращения), действующего на колесо со стороны груза, к приращению силы тока ΔI. Определите теоретически, какой должна быть эта величина β_{theor}, если её рассчитать из коэффициента(-ов), найденного(-ых) в пункте 1.3. В теоретических расчётах предполагайте, что момент силы трения в редукторе не зависит от скорости вращения мотора и нагрузки на нём. Сравните полученные значения β и β_{theor}.



Мотор с редуктором.

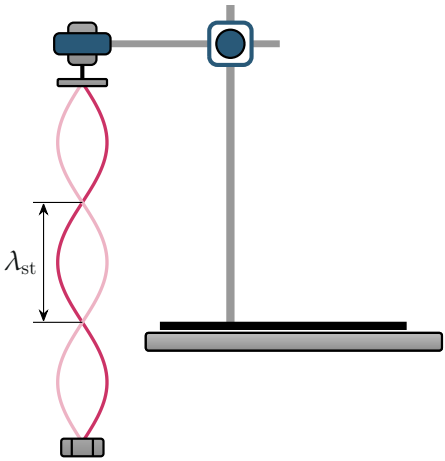
1.6. Редуктор, прикреплённый к мотору, вращает колесо с частотой в n раз меньшей частоты вращения основного вала мотора. Измерьте коэффициент редукции n. Подробно объясните метод измерения.

Часть 2.

Внимание! Эту часть задачи выполняйте в защитных очках!

Снимите с мотора редуктор. Поменяйте шестерню, надетую на вал, на шкив с отверстием. Шестерню можно аккуратно снять с помощью

пассатижей. Закрепите мотор в лапке штатива так, чтобы вал мотора занимал вертикальное положение, а шкив находился ниже корпуса мотора. Привяжите к шкиву леску длиной приблизительно $l = 100$ см. К концу лески прикрепите груз массой $m = 5{,}0$ г. Пункты 2.1–2.4 выполняйте с этим грузом. Подайте на мотор напряжение. Шкив придёт во вращение. При некоторых частотах вращения вала леска будет принимать стационарную форму с некоторым количеством узлов и пучностей. Будем называть длиной стоячей волны λ_{st} расстояние между двумя соседними узлами.



Внимание: если Вы не смогли измерить коэффициент редукции, то во второй части задачи примите его равным $n_1 = 25$.

2.1. При некоторых различных частотах вращения вала мотора леска будет принимать форму стоячей волны с разным количеством N пучностей. Добейтесь максимума амплитуды стоячей волны для каждого значения $N = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Определите частоты ν вращения вала мотора в этих состояниях. Примечание: возможно, наблюдения будет более удобно вести на фоне белого листа бумаги.

2.2. Согласно теории стоячих волн, при резонансе на расстоянии между двумя закреплёнными концами лески должно укладываться целое число длин стоячих волн λ_{st} (или, что то же самое, целое число поло-

вин длин волн λ бегущих волн):

$$L_0 = N\lambda_{\text{st}} = N\frac{\lambda}{2}.$$

Построив график зависимости $\nu(N)$, проверьте это теоретическое предсказание.

2.3. Измерьте зависимость длины стоячей волны от частоты вращения вала мотора. При данных измерениях не обязательно попадать именно в резонансные частоты, существенным обстоятельством является стационарная форма лески при её вращении. В каких координатах зависимость является линейной функцией? Проверьте ваше предположение графически. Рассчитайте скорость распространения поперечных волн по леске. Не забудьте, что длина стоячей волны λ_{st} в два раза меньше длины бегущей волны λ.

2.4. Скорость распространения поперечных волн v зависит от погонной плотности ρ лески и её силы натяжения T как

$$v = A\rho^i(T + T_0)^j,$$

где T_0 — постоянная сила, отвечающая за изгибную жёсткость лески, численный коэффициент A равен единице. Методом размерности получите величины i и j.

2.5. Проведите аналогичные пункту 2.3 измерения для оставшихся грузов. Найдите резонансные частоты вращения для $N = 1, 2, 3$. Определите скорости распространения волн по леске при разных силах натяжения. Постройте необходимые зависимости на одном графике. Примечание: при измерениях частоты вращения вала для случая трёх пучностей на леске, натянутой грузом 25 г, могут возникнуть трудности. Для того чтобы добиться устойчивого вращения лески, слегка придержите её на расстоянии 2–3 см от места подвеса груза.

2.6. Постройте график зависимости v от m в координатах, в которых он должен быть линейной функцией. Рассчитайте по угловому коэффициенту графика значение погонной плотности лески и величину T_0.

▲ **Решение. Что происходит.** Мотор — обратимая машина. Пока вал

вращается, в обмотках наводится ЭДС $U_{\text{инд}}$, направленная против тока, и напряжение источника делится на падение на сопротивлении обмоток и эту ЭДС:

$$U = IR + U_{\text{инд}}.$$

ЭДС пропорциональна частоте вращения, а ток — моменту на валу. Отсюда план части 1: измерить R при неподвижном вале, по $U - IR$ найти ЭДС и связать её с частотой, затем связать прирост тока с моментом груза. Часть 2 использует результат: частоту вращения вала со шкивом секундомером не измеряем, а считаем по току и напряжению, $\nu = n\,\alpha\,(U - IR)$. Леска, которую раскручивает шкив, принимает форму стоячей волны: каждая её точка колеблется с периодом вращения $T = 1/\nu$, длина бегущей волны $\lambda = 2\lambda_{\text{ст}}$, скорость волны $v = \lambda/T$; скорость же волны по леске определяется натяжением $T_{\text{н}} = mg$ и погонной плотностью.

Обозначения. U, I — напряжение на моторе и ток через него по мультиметрам, R — сопротивление обмоток, k — число оборотов колеса за время t, $f = k/t$ — частота вращения колеса, $\nu = nf$ — частота вращения вала мотора, n — коэффициент редукции. Приборная погрешность мультиметров 1 %, погрешность времени из-за реакции $\sigma_t = 0{,}3$ с, погрешность длины стоячей волны $\sigma_{\lambda_{\text{ст}}} = 1$ см. Погрешности ЭДС: $\sigma_{U_{\text{инд}}} = \sigma_U + I\sigma_R + R\sigma_I$.

Часть 1

1.1. Сопротивление обмоток. При неподвижном вале ЭДС нет, и мотор — обычный резистор: $R = U/I$. Вольтметр подключаем прямо к выводам мотора, амперметр — последовательно, между источником и вольтметром. Так вольтметр не считает падение напряжения на амперметре (при $R \approx 6$ Ом оно было бы заметным), а ток через вольтметр (у него сопротивление мегаомы) ничтожен по сравнению с I:

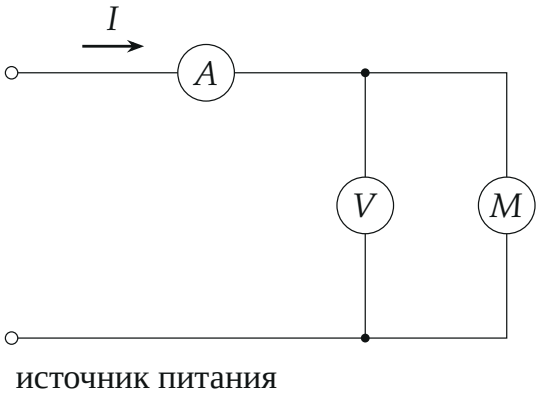


Схема измерения: V — вольтметр на выводах мотора M, A — амперметр в цепи мотора.

Подаём $U \approx 0{,}5$ В (больше 1 В на неподвижный мотор подавать нельзя), поворачиваем вал и повторяем опыт в пяти положениях:

U, В	I, мА	R, Ом
0,500	81,6	6,13
0,504	81,9	6,15
0,504	82,0	6,15
0,496	80,6	6,15
0,502	81,7	6,14

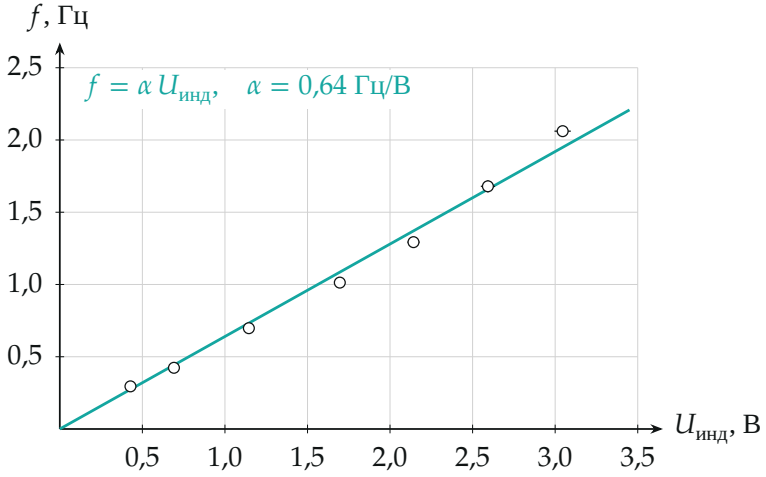
Сопротивления отличаются мало. Если коллектор стоит в положении переключения обмоток, получаются заметно другие значения — такие положения пропускаем. Среднее $R = 6{,}14$ Ом. Приборная погрешность напряжения и тока 1 % каждого, поэтому погрешность R — 2 %, то есть $\sigma_R = 0{,}12$ Ом; случайный разброс (0,01 Ом) на её фоне не виден. Итог: $R = (6{,}14 \pm 0{,}12)$ Ом.

1.2–1.3. ЭДС и частота вращения. На колесе редуктора наклеиваем кусочек изоленты как метку. При каждом из семи напряжений от 0,74 до 3,52 В (выше $U_{\min} = 0{,}7$ В, иначе мотор не трогается) измеряем ток и секундомером время t нескольких оборотов k метки; $f = k/t$. Затем $U_{\text{инд}} = U - IR$ — это второе правило Кирхгофа для мотора, у которого обмотки с сопротивлением R включены последовательно с ЭДС $U_{\text{инд}}$,

направленной против тока:

U, В	I, мА	k	t, с	$U_{инд}$, В	f, Гц
0,740	50,8	5	16,94	0,43	0,295
1,018	53,2	5	11,81	0,69	0,423
1,504	58,5	10	14,34	1,14	0,697
2,050	57,7	10	9,87	1,70	1,013
2,540	64,8	20	15,47	2,14	1,293
3,030	71,2	20	11,91	2,59	1,679
3,520	77,3	40	19,41	3,05	2,061

(погрешность частоты $\sigma_f = f\,\sigma_t/t$, ЭДС — по формуле выше). В таблице организаторов подписи столбцов I и U переставлены: ток в 0,74 мА при напряжении 50,8 В невозможен, а с $U = 0{,}740$ В, $I = 50{,}8$ мА выходит их же $U_{инд} = 0{,}43$ В.



Частота вращения колеса в зависимости от ЭДС индукции; линия — прямая пропорциональность.

Точки лежат на прямой через начало координат: $f = \alpha\,U_{инд}$, что и должен давать закон Фарадея — ЭДС пропорциональна угловой скорости вращения якоря. Метод наименьших квадратов для прямой через начало

координат даёт $\alpha = \dfrac{\sum f U_{\text{инд}}}{\sum U_{\text{инд}}^2} = 0{,}64$ Гц/В; разброс точек соответствует $\pm 0{,}013$, с учётом погрешности R (она влияет на $U_{\text{инд}}$) принимаем

$$\alpha = (0{,}64 \pm 0{,}02)\ \text{Гц/В}.$$

1.4. Прибавка тока от груза. Привязываем к колесу леску. При напряжении U колесо вращается без груза, ток I. Вешаем груз 50 г и при том же U измеряем ток I' (если источник не даёт раскрутить колесо, подталкиваем рукой). Разность $\Delta I = I' - I$ для семи напряжений:

I, мА	I', мА	ΔI, мА
66	136	70
67	155	88
74	146	72
81	154	73
78	147	69
67	157	90
81	168	87

Среднее $\overline{\Delta I} = 78$ мА; разброс отдельных значений 9 мА, погрешность среднего 4 мА: $\overline{\Delta I} = (78 \pm 4)$ мА.

1.5. Отношение момента к приращению тока. Диаметр колеса $D = (6{,}3 \pm 0{,}1)$ см. Груз создаёт момент относительно оси колеса

$$M = \frac{mgD}{2} = \frac{0{,}050 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}063}{2}\ \text{Н}\cdot\text{м} = 1{,}55 \cdot 10^{-2}\ \text{Н}\cdot\text{м}$$

(у организаторов — $1{,}568 \cdot 10^{-2}$ Н·м, что отвечает $D = 6{,}4$ см; на β это не влияет),

$$\beta = \frac{M}{\overline{\Delta I}} = \frac{1{,}55 \cdot 10^{-2}}{0{,}078} = 0{,}20\ \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{А}}.$$

Погрешность: $\dfrac{\sigma_\beta}{\beta} = \dfrac{\sigma_M}{M} + \dfrac{\sigma_{\Delta I}}{\Delta I} \approx 0{,}016 + 0{,}05$, $\beta = (0{,}20 \pm 0{,}01)$ Н·м/А.

Теория. Из $U = IR + U_{\text{инд}}$, умножив на I, получаем баланс мощности:

$UI = I^2R + U_{\text{инд}}I$. Первое слагаемое — нагрев обмоток, второе — механическая мощность, которая идёт на момент нагрузки $M_{\text{нагр}}$ на колесе и на трение $M_{\text{тр}}$ в редукторе: $U_{\text{инд}}I = 2\pi f\,(M_{\text{нагр}} + M_{\text{тр}})$. Подставим $U_{\text{инд}} = f/\alpha$ и сократим на f:

$$\frac{I}{\alpha} = 2\pi\,(M_{\text{нагр}} + M_{\text{тр}}).$$

Если $M_{\text{тр}}$ не зависит от нагрузки (так велено предполагать), то $\Delta I/\alpha = 2\pi\,\Delta M$ и

$$\beta_{\text{theor}} = \frac{\Delta M}{\Delta I} = \frac{1}{2\pi\alpha} = \frac{1}{2\pi\cdot 0{,}64} = (0{,}249 \pm 0{,}008)\ \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{А}}.$$

Измеренное $\beta = 0{,}20$ примерно на пятую часть меньше теоретического. Расхождение больше погрешностей. Объяснение: при подвешивании груза зубчатое зацепление редуктора нагружается сильнее, момент трения растёт, и для того же момента груза нужен больший прирост тока ΔI, отсюда $\beta < \beta_{\text{theor}}$.

1.6. Коэффициент редукции. Отключаем мотор от источника и присоединяем шкив к валу мотора, выступающему с тыльной стороны. На колесо и на шкив наклеиваем метки. Медленно вращаем шкив рукой и считаем его обороты, пока метка колеса не сделает один полный оборот: редуктор между ними замедляет вращение в n раз.

Число оборотов за один оборот колеса и есть n. Чтобы не ошибиться на целый оборот, лучше считать за несколько оборотов колеса и делить: ошибка в один оборот шкива за пять оборотов колеса даёт $\pm 0{,}4\,\%$. Обратите внимание: ожидаемое «круглое» значение $n = 50$ не подтверждается — аккуратный счёт даёт $n = 48$, его и используем дальше.

Часть 2

2.1. Частоты вращения. Закрепляем мотор вертикально, к шкиву привязываем леску $l \approx 100$ см с грузом 5 г. Подбираем напряжение до максимальной амплитуды при $N = 1, \ldots, 6$ пучностях; записываем U и

I и считаем частоту вращения вала по результатам части 1:

$$\nu = nf = n\,\alpha\,(U - IR), \qquad \frac{\sigma_\nu}{\nu} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_\alpha}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{U_{\text{инд}}}}{U_{\text{инд}}}\right)^2}.$$

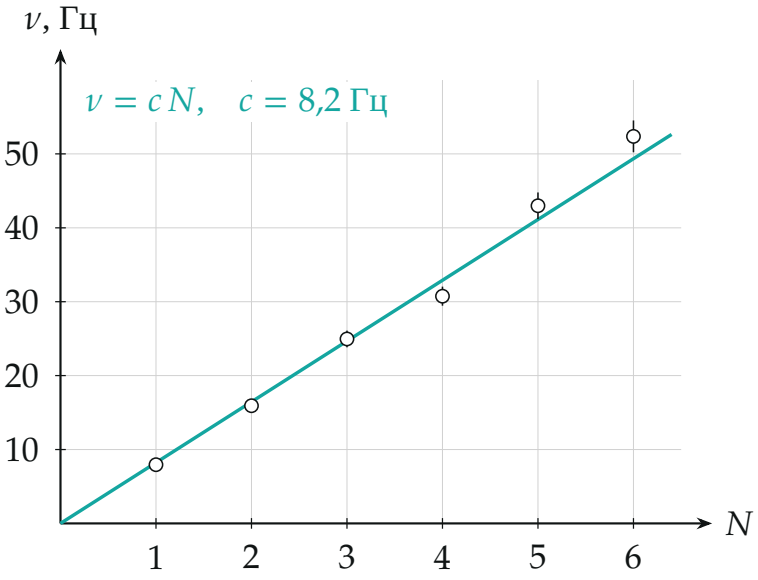
Длина стоячей волны $\lambda_{\text{ст}}$ — расстояние между узлами; между шкивом и грузом укладывается N таких участков, при $N = 1$ это вся длина лески $L_0 = 106$ см между шкивом и грузом. $T = 1/\nu$, $\lambda = 2\lambda_{\text{ст}}$:

N	U, В	I, мА	ν, Гц	σ_ν, Гц	$\lambda_{\text{ст}}$, см	T, мс	λ, м
1	0,59	54	7,9	0,6	106	126	2,12
2	0,85	54	15,9	0,8	53	63	1,06
3	1,23	68	25,0	1,1	35	40	0,70
4	1,40	65	30,7	1,3	27	33	0,54
5	2,05	106	43,0	1,8	21	23	0,42
6	2,46	123	52,4	2,2	18	19	0,36

2.2. Проверка $L_0 = N\lambda_{\text{ст}}$. Каждая точка лески колеблется с частотой вращения ν, поэтому она же — частота бегущей волны, $\nu = v/\lambda$. Подставим $\lambda = 2L_0/N$:

$$\nu = \frac{N\,v}{2L_0} \quad \Rightarrow \quad \nu \propto N.$$

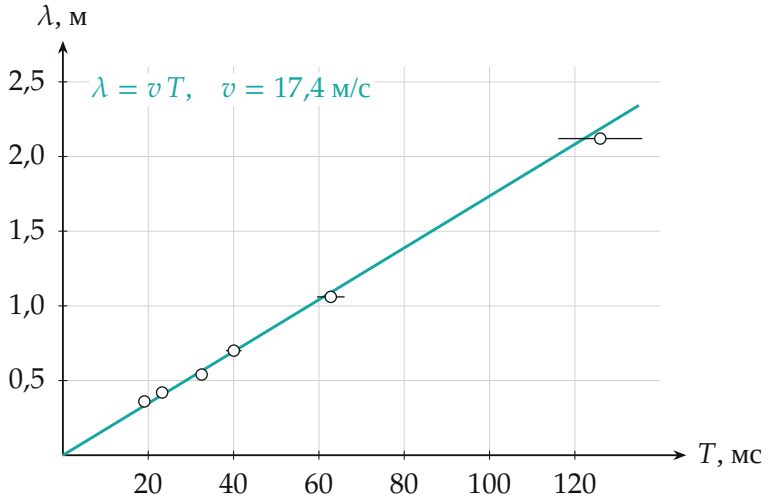
Если предсказание верно, точки на графике $\nu(N)$ лежат на прямой через начало координат:



Частота вращения при максимальной амплитуде в зависимости от числа пучностей.

Точки ложатся на прямую $\nu = cN$, $c = (8{,}2 \pm 0{,}2)$ Гц, предсказание подтверждается. Из наклона находим скорость: $v = 2L_0 c = 2 \cdot 1{,}06 \cdot 8{,}2$ м/с $= 17{,}4$ м/с; сравним её с результатом следующего пункта.

2.3. Длина волны и период. Для любого вращения $\lambda = vT$, где v — скорость волны, зависящая только от лески и натяжения. Значит, линейной будет зависимость λ от периода $T = 1/\nu$ — прямая через начало координат, а не $\lambda(\nu)$ (она гипербола).



Длина бегущей волны от периода вращения; угловой коэффициент — скорость поперечных волн.

Точки ложатся на прямую $\lambda = vT$; метод наименьших квадратов с учётом погрешностей σ_T и $\sigma_\lambda = 2$ см даёт $v = (17{,}4 \pm 0{,}4)$ м/с. Это совпадает со значением 17,4 м/с, полученным в пункте 2.2 по наклону $\nu(N)$. Обратите внимание: длина бегущей волны вдвое больше расстояния между узлами, $\lambda = 2\lambda_{\text{ст}}$.

2.4. Показатели степеней. Размерность силы $[T + T_0] = \text{кг} \cdot \text{м/с}^2$, погонной плотности $[\rho] = \text{кг/м}$, скорости м/с (коэффициент $A = 1$ безразмерен):

$$\frac{\text{м}}{\text{с}} = \left(\frac{\text{кг}}{\text{м}}\right)^i \left(\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}\right)^j = \text{кг}^{\,i+j}\,\text{м}^{\,j-i}\,\text{с}^{-2j}.$$

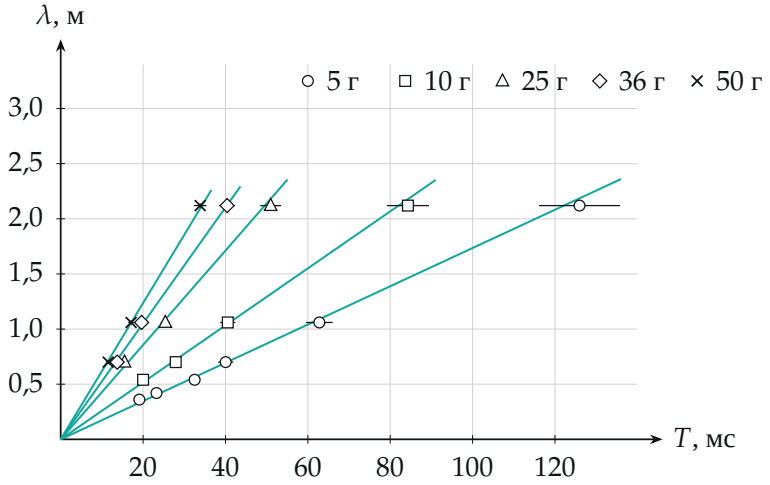
Показатель при секундах: $-2j = -1$, $j = \frac{1}{2}$. При килограммах: $i + j = 0$, $i = -\frac{1}{2}$. При метрах: $j - i = 1$ — выполнено. Итак,

$$v = \sqrt{\frac{T + T_0}{\rho}}, \qquad i = -\frac{1}{2}, \quad j = \frac{1}{2}.$$

2.5. Другие грузы. Натяжение лески равно весу груза, $T = mg$. Для

грузов 10, 25, 36 и 50 г находим резонансные частоты $N = 1, 2, 3$ (для 10 г ещё $N = 4$) по тем же формулам и строим $\lambda(T)$:

m, г	$\lambda_{ст}$, см	U, В	I, мА	ν, Гц	T, мс	λ, м
10	106	0,73	56	11,9	84,3	2,12
10	53	1,22	68	24,7	40,6	1,06
10	35	1,62	74	35,8	27,9	0,70
10	27	2,21	95	50,0	20,0	0,54
25	106	1,05	67	19,6	51,0	2,12
25	53	2,00	117	39,4	25,4	1,06
25	35	2,99	145	64,5	15,5	0,70
36	106	1,26	74	24,7	40,4	2,12
36	53	2,26	98	50,9	19,6	1,06
36	35	3,16	128	72,9	13,7	0,70
50	106	1,44	78	29,5	33,9	2,12
50	53	2,58	110	58,5	17,1	1,06
50	35	3,81	161	86,7	11,5	0,70



Длина волны от периода для всех грузов: прямые через начало координат, угловой коэффициент растёт с массой груза.

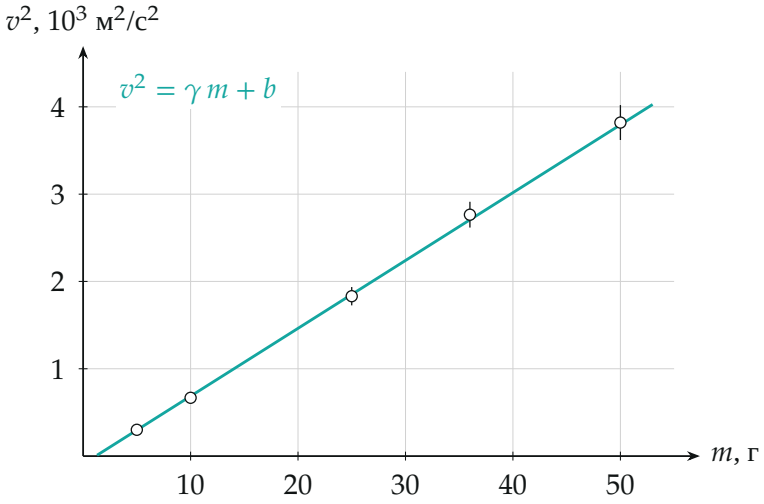
Скорость волны для каждого груза — угловой коэффициент прямой через начало координат:

m, г	v, м/с	σ_v, м/с	$v^2/10^3$, м^2/с^2	$\sigma_{v^2}/10^3$
5	17,4	0,4	0,30	0,02
10	25,8	0,7	0,67	0,04
25	42,8	1,2	1,83	0,10
36	52,6	1,4	2,76	0,15
50	61,8	1,6	3,82	0,20

2.6. Погонная плотность и T_0. Подставим $T = mg$ в формулу п. 2.4:

$$v^2 = \frac{mg + T_0}{\rho} = \frac{g}{\rho}\, m + \frac{T_0}{\rho},$$

линейной будет зависимость v^2 от m:



Квадрат скорости волны в зависимости от массы груза; линия — прямая $v^2 = \gamma m + b$.

Метод наименьших квадратов с весами $1/\sigma_{v^2}^2$ даёт угловой коэффициент $\gamma = (77{,}7 \pm 2{,}7) \cdot 10^3$ м^2/(кг·с^2) и свободный член $b = (-90 \pm$

22) м^2/с^2. Погонная плотность

$$\rho = \frac{g}{\gamma} = \frac{9{,}81}{77{,}7 \cdot 10^3}\ \text{кг/м} = (0{,}126 \pm 0{,}005)\ \text{г/м},$$

а $T_0 = b\rho = (-0{,}011 \pm 0{,}003)$ Н. Это в 4–5 раз меньше веса самого лёгкого груза ($mg = 0{,}049$ Н) и в 40 раз меньше веса самого тяжёлого (0,49 Н): изгибная жёсткость лески практически не влияет, $T_0 \approx 0$. Отрицательный знак показывает небольшую систематику (сопротивление воздуха, неточность λ и ν): изгибная жёсткость дала бы $T_0 > 0$. На ρ эта поправка влияет в пределах погрешности.

Проверка. Размерность: α — Гц/В, поэтому $\beta = 1/(2\pi\alpha)$ измеряется в В·с, а В·с = (Дж/Кл)·с = Дж/А = Н·м/А. Правдоподобие: линейная плотность 0,126 г/м соответствует нейлоновой леске диаметром около 0,4 мм ($\rho_{\text{нейл}} = 1{,}1$ г/см^3 даёт 0,14 г/м). Независимая оценка скорости: $v = \sqrt{mg/\rho} = \sqrt{0{,}049/1{,}26 \cdot 10^{-4}} = 19{,}7$ м/с против измеренных 17,4 м/с при $m = 5$ г (разница 12 % — вклад малого отрицательного T_0).

Смысл: мотор — измеритель частоты по ЭДС и момента по току, а вращающаяся леска — резонатор, у которого скорость волны даёт погонную плотность лески.

Ответ. 1.1) $R = (6{,}14 \pm 0{,}12)$ Ом; 1.3) $f = \alpha\, U_{\text{инд}}$ (прямая пропорциональность), $\alpha = (0{,}64 \pm 0{,}02)$ Гц/В; 1.4) $\overline{\Delta I} = (78 \pm 4)$ мА; 1.5) $\beta = (0{,}20 \pm 0{,}01)$ Н·м/А, $\beta_{\text{theor}} = 1/(2\pi\alpha) = (0{,}249 \pm 0{,}008)$ Н·м/А; 1.6) $n = 48$; 2.2) $\nu \propto N$, $\nu = (8{,}2 \pm 0{,}2)\,N$ Гц; 2.3) $\lambda = vT$, $v = (17{,}4 \pm 0{,}4)$ м/с; 2.4) $i = -1/2$, $j = 1/2$; 2.6) $\rho = (0{,}126 \pm 0{,}005)$ г/м, $|T_0| \ll mg$, $T_0 \approx 0$.