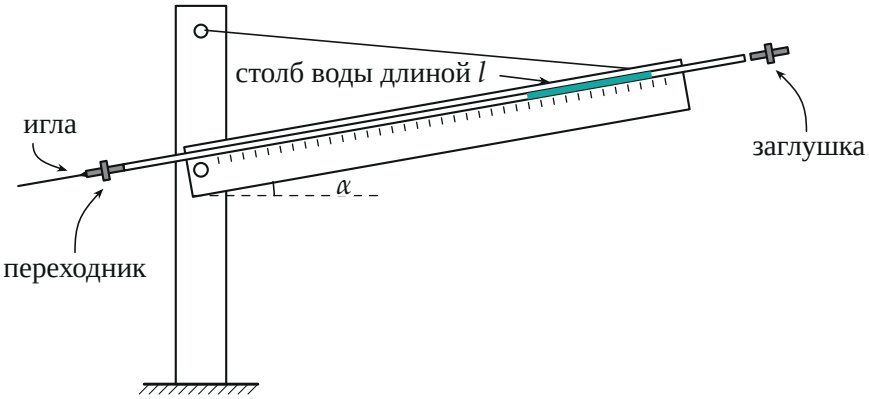
Вязкость воздуха

Задача 1. [ВсОШ 2025/26, 9 класс, практический тур, задача 1] **Вязкость воздуха.** Для поддержания стационарного течения газа в трубе необходимо создавать постоянную разность давлений на её концах. При этом разность сил давления компенсирует силы внутреннего трения между слоями газа. Характеристикой этих сил трения является коэффициент вязкости η. При ламинарном течении газа (без завихрений) объёмный расход Q — объём, протекающий через поперечное сечение цилиндрической трубы в единицу времени — определяется формулой Пуазейля:

$$Q = \frac{\pi r^4 \Delta P}{8 L \eta},$$

где r — внутренний радиус трубы, L — её длина, ΔP — разность давлений на концах трубы.

В данной работе требуется определить коэффициент вязкости воздуха при комнатной температуре с помощью установки, схематически изображённой на рисунке.



В качестве трубы используется игла шприца, которая соединена через переходник с трубкой ПВХ, закреплённой в пазе длинной деревянной рейки. При движении столбика воды длиной l вдоль наклонённой под углом α трубки между его концами возникает разность давлений

ΔP. В стационарном режиме движение происходит с постоянной скоростью v. Составляющая силы тяжести вдоль трубки уравновешивается разностью сил давления воздуха и некоторой силой F_0:

$$mg \sin\alpha = \Delta P\, S + F_0,$$

где S — площадь поперечного сечения трубки ПВХ, m — масса воды.

1. Определите площадь S поперечного сечения трубки ПВХ.
2. Снимите экспериментальную зависимость скорости движения столбика воды v от $\sin\alpha$ для двух его длин: 45 мм $\leqslant l \leqslant$ 55 мм и 75 мм $\leqslant l \leqslant$ 85 мм. Для каждого значения угла наклона выполните не менее трёх измерений времени движения столбика и определите среднюю скорость. Получите не менее 5 точек зависимости $v(\sin\alpha)$ для каждой длины l.
3. Постройте графики зависимостей $v(\sin\alpha)$ в одних координатных осях.
4. Используя предложенную модель, получите теоретическую зависимость скорости v от $\sin\alpha$, r, L, ρ, S, l, η, F_0, g.
5. По результатам эксперимента определите коэффициент вязкости воздуха η.
6. Оцените величину силы F_0.

Примечания к работе: соблюдайте осторожность с иглами шприца; игла, которая используется как труба, должна быть без защитного футляра; столбик воды не должен выходить за пределы участка трубки ПВХ, закреплённого на рейке; для остановки столбика вставляйте заглушку в короткий (правый) конец трубки; на линейках делать пометки запрещено. В работе используйте следующие предположения и константы: для малых перепадов давления плотность воздуха считайте постоянной; течение воздуха в игле ламинарное; столбик воды считайте цилиндрическим; силу F_0 считайте постоянной и не зависящей от угла наклона; радиус трубки ПВХ значительно больше радиуса иглы; внутренний радиус и длина иглы шприца $r = 0{,}17$ мм и $L = 35$ мм; плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3; $g = 9{,}8$ м/с^2. Оценивать погрешность в этой задаче не требуется.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Столбик воды работает как поршень:

скользя вниз по трубке, он выдавливает воздух перед собой через иглу. Иглу воздух проходит медленно и с трудом (она тонкая и длинная), поэтому перед столбиком давление выше атмосферного на ΔP — эта избыточная сила давления тормозит воду. Тормозит ещё сила F_0 (прилипание воды к стенкам). В установившемся режиме сумма сил вдоль трубки равна нулю, а ΔP по формуле Пуазейля пропорционально скорости. Отсюда v линейно растёт с $\sin\alpha$: наклон прямой даёт вязкость η, а отрезок на оси скоростей — силу F_0.

Обозначения. b — расстояние между двумя метками на рейке, h_1, h_2 — высоты этих меток над столом, s — путь столбика за время t, $v = s/t$, v_0 — значение v, к которому прямая $v(\sin\alpha)$ приходит при $\sin\alpha = 0$.

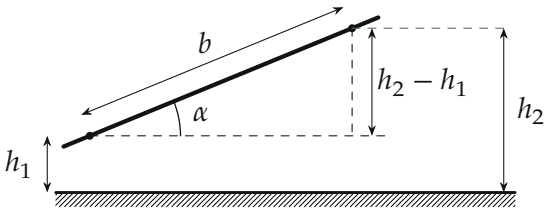
Пункт 1. Площадь сечения трубки. Столбик воды цилиндрический, поэтому его объём $V = Sl$ и $S = V/l$. Набираем в шприц известный объём воды, выдавливаем в трубку и измеряем длину получившегося столбика (данные организаторов):

V, мм^3	500	1000	1500	2000
l, мм	42	88	131	171
$S = V/l$, мм^2	11,9	11,4	11,5	11,7

Усредняя, получаем $S \approx 11{,}6$ мм^2.

Пункт 2. Измерения. Угол наклона не измеряем транспортиром: на рейке берём две метки на расстоянии $b = 250$ мм, измеряем высоты h_1 и h_2 линейкой от стола. Из прямоугольного треугольника на рисунке

$$\sin\alpha = \frac{h_2 - h_1}{b}.$$



Столбик запускаем вдоль рейки и секундомером измеряем время t, за

которое он проходит s (150, 200, 250 или 300 мм), $v = s/t$. Для каждого угла три измерения с разными s: одинаковые v показывают, что движение равномерное, как и предполагает модель. Например, при $l = 55$ мм, $h_1 = 165$ мм, $h_2 = 232$ мм: $\sin\alpha = 67/250 \approx 0{,}27$, а $s = 150$ мм за $t = 17{,}22$ с дают $v = 8{,}7$ мм/с.

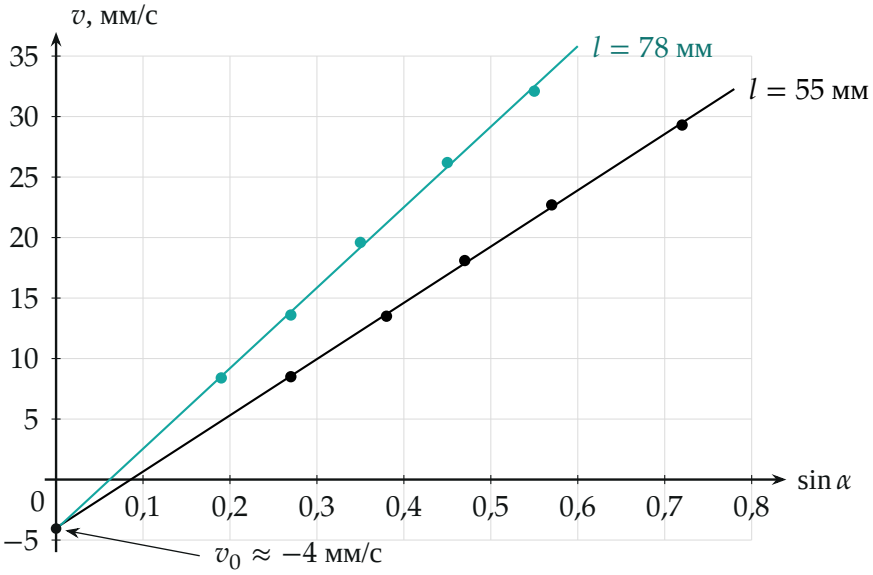
Результаты для $l = 55$ мм (в v_1, v_2, v_3 — скорости трёх измерений, мм/с):

№	h_1, мм	h_2, мм	$\sin\alpha$	v_1	v_2	v_3	$v_{ср}$, мм/с
1	165	232	0,27	8,7	8,4	8,4	8,5
2	187	281	0,38	13,3	13,5	13,6	13,5
3	205	323	0,47	18,0	18,3	18,1	18,1
4	227	369	0,57	22,7	22,5	22,8	22,7
5	257	436	0,72	29,3	29,6	29,1	29,3

Для $l = 78$ мм:

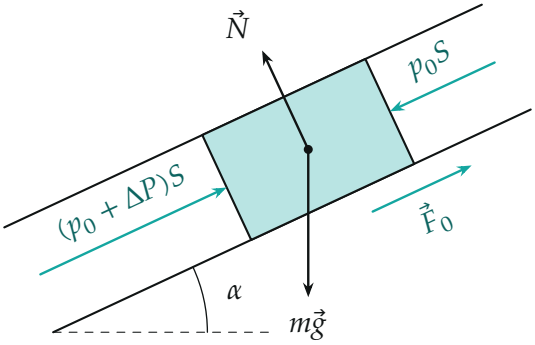
№	h_1, мм	h_2, мм	$\sin\alpha$	v_1	v_2	v_3	$v_{ср}$, мм/с
1	149	195	0,19	8,5	8,4	8,4	8,4
2	165	232	0,27	13,7	13,7	13,5	13,6
3	183	270	0,35	19,9	19,4	19,4	19,6
4	202	315	0,45	26,3	26,1	26,0	26,2
5	223	360	0,55	32,1	32,0	32,2	32,1

Пункт 3. График. Точки каждой серии ложатся на прямую; прямые проведены методом наименьших квадратов и продолжены до оси скоростей. Обе прямые сходятся в одной точке оси: $v_0 \approx -4$ мм/с.



Чёрные точки — $l = 55$ мм, бирюзовые — $l = 78$ мм.

Пункт 4. Теория. Рассмотрим установившееся движение столбика: скорость постоянна, значит, сумма сил вдоль трубки равна нулю. Вдоль трубки (ось вверх по склону) действуют: составляющая силы тяжести $mg\sin\alpha$ вниз; сила давления воздуха слева, $(p_0 + \Delta P)S$, вверх; сила давления воздуха справа, $p_0 S$, вниз; сила F_0 вверх. $\vec{N}$ перпендикулярна трубке.



Масса столбика $m = \rho l S$. Второй закон Ньютона для столбика в про-

екции на ось вдоль трубки:

$$\rho l S g \sin\alpha = \Delta P\, S + F_0.$$

Воздух перед столбиком вытесняется через иглу. Плотность воздуха считаем постоянной (оценка ниже покажет, что $\Delta P \sim 10^2$ Па $\ll p_0$), значит, объём воздуха, прошедшего через иглу за единицу времени, равен объёму, который «вымел» столбик: $Q = vS$. Течение в игле ламинарное, по формуле Пуазейля

$$\Delta P = \frac{8L\eta Q}{\pi r^4} = \frac{8L\eta\, vS}{\pi r^4}.$$

Радиус трубки ПВХ много больше радиуса иглы, поэтому всё падение давления происходит на игле. Подставим ΔP в уравнение сил:

$$\rho l S g \sin\alpha = \frac{8L\eta\, vS^2}{\pi r^4} + F_0 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\rho l g\, \pi r^4}{8L\eta S}\sin\alpha - \frac{F_0\, \pi r^4}{8L\eta S^2}.$$

Это прямая $v = k\sin\alpha + v_0$ с наклоном k и отрезком на оси v_0:

$$k = \frac{\rho l g\, \pi r^4}{8L\eta S}, \qquad v_0 = -\frac{F_0\, \pi r^4}{8L\eta S^2} < 0.$$

Обратите внимание: v — скорость столбика, а не воздуха. Площадь иглы $\pi r^2 \approx 0{,}09$ мм^2 в 128 раз меньше S, и воздух в игле движется в 128 раз быстрее столбика. Именно поэтому в формулу Пуазейля входит $Q = vS$, а не $v \cdot \pi r^2$.

Пункт 5. Вязкость. Из наклона находим $\eta = \dfrac{\rho l g\, \pi r^4}{8LkS}$. Наклоны прямых по методу наименьших квадратов: $k_{55} = 46{,}5$ мм/с, $k_{78} = 66{,}6$ мм/с. Для $l = 55$ мм, в единицах СИ ($l = 0{,}055$ м, $r = 1{,}7 \cdot 10^{-4}$ м, $L = 0{,}035$ м, $S = 1{,}16 \cdot 10^{-5}$ м^2, $k = 4{,}65 \cdot 10^{-2}$ м/с):

$$\eta_{55} = \frac{10^3 \cdot 0{,}055 \cdot 9{,}8 \cdot \pi\,(1{,}7 \cdot 10^{-4})^4}{8 \cdot 0{,}035 \cdot 4{,}65 \cdot 10^{-2} \cdot 1{,}16 \cdot 10^{-5}} \approx 9{,}4 \cdot 10^{-6}\ \text{Па} \cdot \text{с}.$$

Для $l = 78$ мм так же получается $\eta_{78} \approx 9{,}3 \cdot 10^{-6}$ Па·с. Совпадение двух серий — проверка модели: $k \propto l$, и действительно $k_{78}/k_{55} = 1{,}43$, а $78/55 = 1{,}42$. Итог:

$$\eta \approx 9{,}3 \cdot 10^{-6}\ \text{Па} \cdot \text{с}.$$

Пункт 6. Сила F_0. Обе прямые пересекают ось скоростей в одной точке, $v_0 \approx -4{,}0$ мм/с, — и по теории v_0 не зависит от l (в v_0 длина столбика не входит), то есть F_0 действительно не зависит от длины. Из выражения для v_0

$$F_0 = \frac{8L\eta S^2}{\pi r^4}\,|v_0| = \frac{8 \cdot 0{,}035 \cdot 9{,}3 \cdot 10^{-6} \cdot (1{,}16 \cdot 10^{-5})^2}{\pi\,(1{,}7 \cdot 10^{-4})^4} \cdot 4{,}0 \cdot 10^{-3} \approx 5{,}4 \cdot 10^{-4}\ \text{Н}.$$

Это около 9 % от силы тяжести столбика $l = 55$ мм ($mg = \rho l S g \approx 6{,}3$ мН). Прямая пересекает ось $\sin\alpha$ при $\sin\alpha_0 = F_0/(\rho l S g) \approx 0{,}09$: при меньших углах столбик стоит на месте — F_0 его удерживает.

Проверка. Размерность: $\rho l g$ — паскали, поэтому $[k] = \text{Па} \cdot \text{м}^4/(\text{м} \cdot \text{Па} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^2) = \text{м/с}$. Оценка ΔP: при самой большой скорости $v = 29$ мм/с расход $Q = vS \approx 3{,}4 \cdot 10^{-7}$ м^3/с, $\Delta P = \dfrac{8L\eta Q}{\pi r^4} \approx 3{,}4 \cdot 10^2$ Па, то есть 0,3 % от атмосферного давления — плотность воздуха действительно можно считать постоянной. Скорость воздуха в игле $vS/(\pi r^2) \approx 3{,}7$ м/с, число Рейнольдса $\rho_в u \cdot 2r/\eta \approx 1{,}6 \cdot 10^2 \ll 2000$, течение ламинарное. Табличная вязкость воздуха — около $1{,}8 \cdot 10^{-5}$ Па·с, вдвое больше; но и у организаторов вышло $9{,}3 \cdot 10^{-6}$ — это свойство данных, а не обработки: $\eta \propto r^4$, и при $r = 0{,}20$ мм вместо заданных 0,17 мм те же наклоны дали бы табличное значение. Смысл: скорость столбика задаёт борьба силы тяжести с вязким трением воздуха в тонкой игле.

Ответ. 1) $S \approx 11{,}6$ мм^2; 2)–3) таблицы и график в решении; 4) $v = \dfrac{\rho l g\,\pi r^4}{8L\eta S}\sin\alpha - \dfrac{F_0\,\pi r^4}{8L\eta S^2}$; 5) $\eta \approx 9{,}3 \cdot 10^{-6}$ Па·с; 6) $F_0 \approx 5{,}4 \cdot 10^{-4}$ Н.