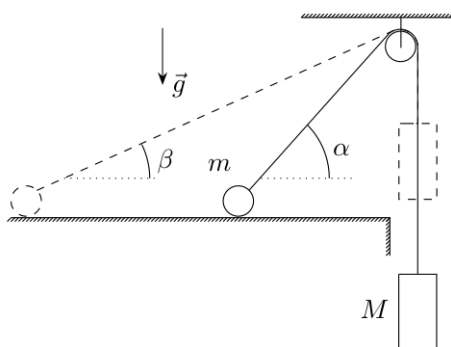


ВсОШ, 2022/23, заключительный этап, 9 класс, теоретический тур

Всероссийская олимпиада школьников по физике [Условия, ответы и решения](#)

Задача 1 Отрыв

На гладкую горизонтальную поверхность положили маленький шарик массой m . К нему прикрепили легкую нерастяжимую нить, переброшенную через легкий блок пренебрежимо малого радиуса, на другом конце которой подвесили груз массой M (см. рис.). Систему отпустили из состояния покоя (изображенного на рисунке пунктирной линией). В некоторый момент времени, когда нить наклонена к горизонту под углом α , шарик отрывается от поверхности, а ускорение груза в этот момент времени равно нулю. Трение в оси блока отсутствует.



1. Найдите отношение m/M .
2. Найдите $\sin \beta$ угла нити к горизонту в начальный момент времени.

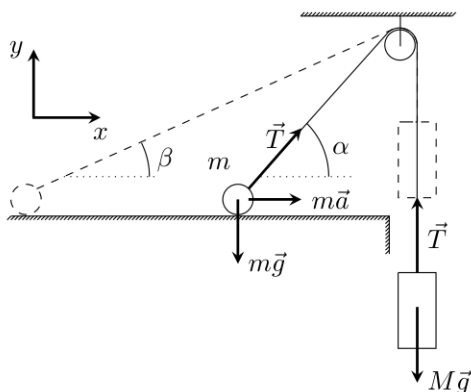
Подсказка

В момент отрыва сила реакции стола равна нулю, а груз не ускоряется, значит натяжение $T = Mg$. Для второго пункта нужна скорость шарика в момент отрыва: перейдите в систему отсчёта точки нити, касающейся блока, — там шарик движется по окружности.

Ответ

$$1) m/M = \sin \alpha; \quad 2) \sin \beta = \frac{2 \sin^4 \alpha}{\sin \alpha + \sin^3 \alpha + \cos^4 \alpha}.$$

Решение



1. Введём систему координат xy так, как показано на рисунке. Пусть $\vec{a}$ — ускорение шарика в момент его отрыва от поверхности. Запишем второй закон Ньютона в проекции на вертикальную ось y , принимая во внимание, что в момент отрыва $N = 0$:

$$ma_y = mg - T \sin \alpha = 0. \quad (1)$$

Запишем второй закон Ньютона для груза M в проекции на ось y , принимая во внимание, что груз не ускоряется:

$$Ma_M = Mg - T = 0. \quad (2)$$

Исключая из уравнений (1) и (2) силу натяжения T , находим отношение масс:

$$\frac{m}{M} = \sin \alpha.$$

2. Пусть v и u — скорости шарика и груза соответственно в рассматриваемый момент, а h — высота блока над поверхностью.

Поскольку нить нерастяжима, проекция скорости шарика v на ось z равна u :

$$v = \frac{u}{\cos \alpha}. \quad (3)$$

Поскольку трения в системе нет, выполняется закон сохранения механической энергии:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} = -Mg\Delta l, \quad (4)$$

где $\Delta l = h(1/\sin \alpha - 1/\sin \beta)$ — изменение длины наклонного участка нити. Подставляя отношение m/M и соотношение (3) в уравнение (4), получим:

$$\frac{mv^2}{2} \left(1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} \right) = \frac{mgh}{\sin \alpha} \left(\frac{1}{\sin \beta} - \frac{1}{\sin \alpha} \right),$$

откуда:

$$\frac{1}{\sin \beta} = \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{v^2(\sin \alpha + \cos^2 \alpha)}{2gh}. \quad (5)$$

Таким образом, задача сводится к определению безразмерного параметра gh/v^2 , для нахождения которого проанализируем динамику шарика.

Запишем второй закон Ньютона для шарика в проекции на горизонтальную ось x :

$$ma_x = ma = T \cos \alpha \Rightarrow a = \frac{T \cos \alpha}{m} = \frac{g \cos \alpha}{\sin \alpha}. \quad (6)$$

Введём ось z , направленную вдоль наклонного участка нити от шарика к блоку (т. е. образующую угол α с горизонтом). Проекция ускорения шарика на ось равняется

$$a_z = a \cos \alpha = \frac{g \cos^2 \alpha}{\sin \alpha}. \quad (7)$$

Перейдём в систему отсчёта точки A наклонного участка нити, в которой он касается блока. Ускорение шарика $\vec{a}_{\text{отн}}$ в данной системе отсчёта равняется:

$$\vec{a}_{\text{отн}} = \vec{a} - \vec{a}_A.$$

Поскольку ускорение груза равняется нулю — тангенциальное ускорение точки A также равняется нулю, откуда следует, что полное ускорение точки A направлено перпендикулярно наклонному участку нити. Тогда в рассматриваемой системе отсчёта:

$$a_{\text{отн}z} = a_z.$$

В системе отсчёта точки A шарик движется по окружности радиусом $l = h / \sin \alpha$, равным длине наклонного участка нити, со скоростью $v_{\perp} = v \sin \alpha$, равной проекции скорости шарика на ось, перпендикулярную оси z . Поэтому из выражения для центростремительного ускорения получим:

$$a_{\text{отн } z} = \frac{v_{\perp}^2}{l} = \frac{v^2 \sin^3 \alpha}{h}. \quad (8)$$

Приравнявая (7) и (8), находим:

$$\frac{gh}{v^2} = \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha}. \quad (9)$$

Подставляя (9) в (5), получим:

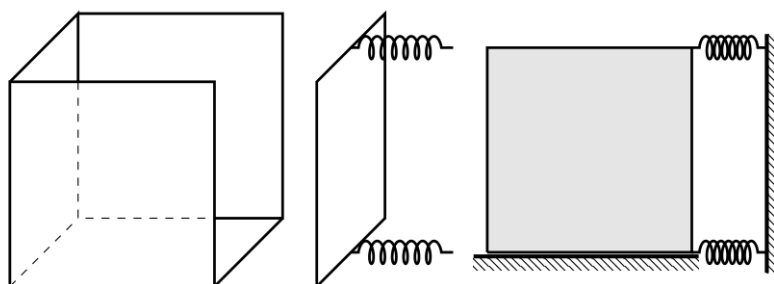
$$\frac{1}{\sin \beta} = \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha (\sin \alpha + \cos^2 \alpha)}{2 \sin^4 \alpha}, \quad (10)$$

откуда находим угол β :

$$\sin \beta = \frac{2 \sin^4 \alpha}{\sin \alpha + \sin^3 \alpha + \cos^4 \alpha}.$$

Задача 2 Аквариум на пружинах

У кубического тонкостенного аквариума ($a \times a \times a$) разбилась боковая стенка. Новую стенку ($a \times a$) решили прижать пружинными фиксаторами. Первую пружину жесткостью $2k$ закрепили у середины верхнего ребра новой стенки, а вторую пружину жесткостью k — у середины нижнего ребра. После этого аквариум придвинули к вертикальной стене (см. рис.).



Все поверхности в местах контакта новой стенки с аквариумом плоские и гладкие. Новая стенка жесткая, полностью перекрывает прилегающие боковые стенки и дно, и параллельна плоскости стены. Сила трения в месте контакта стенки со столом пренебрежимо мала. Длины пружин в недеформированном состоянии одинаковы.

1. Каким должно быть минимальное сжатие пружин, чтобы аквариум можно было наполнить водой плотностью ρ до краёв?

Во время заполнения аквариум считать неподвижным, а вода не просачивается в местах контакта стенки с аквариумом.

2. Каким станет минимальное сжатие пружин, если их поменять местами?

Ускорение свободного падения g считать известным.

Подсказка

Стенка не должна ни отойти, ни повернуться. Найдите силу давления воды и точку её приложения, а затем запишите условия на силу и на моменты относительно верхнего и нижнего рёбер стенки — какое из них самое жёсткое?

Ответ

$$1) \Delta x_{\min} = \frac{\rho g a^3}{3k}; \quad 2) \Delta x_{\min} = \frac{\rho g a^3}{6k}.$$

Решение

1. Метод 1. Воспользуемся методом виртуальных перемещений для определения сил.

Для этого определим изменение потенциальной энергии, равное работе силы тяжести. Представим, что жидкость переходит из верхнего слоя в образовавшееся пространство, тогда $A_g = -\Delta\Pi \leq -A_F$. Масса перешедшей жидкости $m = \rho a^2 \delta x$.

Для равнодействующей сил давления получаем:

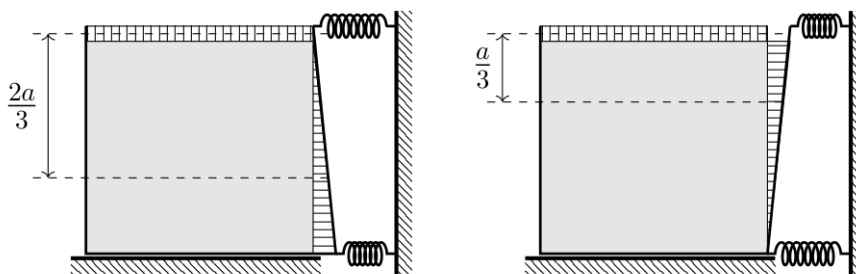
$$(2k\Delta x + k\Delta x)\delta x \geq (\rho a^2 \delta x)g \frac{a}{2} \Rightarrow k\Delta x \geq \frac{\rho g a^3}{6}.$$

Для моментов сил давления относительно верхнего ребра получаем, что центр тяжести слоя жидкости опускается на $\frac{2a}{3}$:

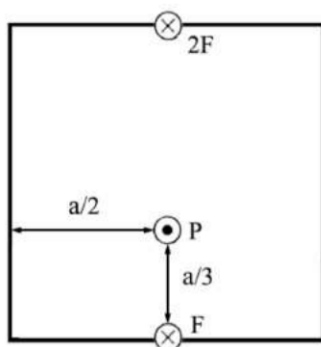
$$k\Delta x \delta x \geq \frac{\rho a^2 \delta x}{2} g \frac{2a}{3} \Rightarrow k\Delta x \geq \frac{\rho g a^3}{3}.$$

Для моментов сил давления относительно нижнего ребра получаем, что центр тяжести слоя жидкости опускается на $\frac{a}{3}$:

$$2k\Delta x \delta x \geq \frac{\rho a^2 \delta x}{2} g \frac{a}{3} \Rightarrow k\Delta x \geq \frac{\rho g a^3}{12}.$$



Метод 2. В заполненном аквариуме на боковую стенку действует сила давления воды $F_P = \frac{1}{2}\rho g a^3$. Для решения необходимо определить точку приложения этой силы. Поскольку по горизонтали давление воды на одном и том же уровне одинаково, очевидно, что эта точка будет находиться на срединной вертикали.



По вертикали давление распределяется линейно от нуля наверху до $\rho g a$ внизу.

Известно, что центр тяжести треугольника расположен в точке пересечения его медиан.

Используя аналогию распределения давления по вертикали в нашем случае с распределением по высоте массы полосок одинаковой ширины, на которые параллельно основанию мысленно разрезан равнобедренный треугольник, можно утверждать, что точка приложения силы находится на расстоянии $a/3$ от дна сосуда.

Метод 3. Строгий математический расчёт силы и моментов сил можно опровергнуть с помощью интегрирования.

Определим давление как функцию y — глубины от поверхности жидкости: $p(y) = \rho g y$.

Суммарная сила давления воды:

$$F_P = \int_0^a p(y) a dy = \frac{\rho g a^3}{2}.$$

Момент силы относительно верхней кромки:

$$M_B = \int_0^a y p(y) a dy = \frac{\rho g a^4}{3}.$$

Момент силы относительно нижней кромки:

$$M_H = \int_0^a (a - y) p(y) a dy = \frac{\rho g a^4}{6}.$$

Условия для отсутствия протечек можно записать в виде неравенств:

$$3k\Delta x \geq \frac{\rho g a^3}{2} \quad (\text{условие на направление результирующей силы}),$$

$$k\Delta x \cdot a \geq \frac{\rho g a^4}{3} \quad (\text{отсутствие поворота вокруг верхнего ребра}),$$

$$2k\Delta x \cdot a \geq \frac{\rho g a^4}{6} \quad (\text{отсутствие поворота вокруг нижнего ребра}).$$

Очевидно, неравенство $k\Delta x \geq \frac{\rho g a^3}{3}$ наиболее жесткое. Откуда

$$\Delta x_{\min} = \frac{\rho g a^3}{3k}.$$

2. Отметим, что, поскольку пружины сжимаются одинаково, суммарная сила, с которой они будут давить на стенку аквариума, будет в 2 раза больше силы давления воды.

Если пружины в условии поменять местами, последние 2 условия примут вид:

$$3k\Delta x \geq \frac{\rho g a^3}{2} \quad (\text{условие на направление результирующей силы}),$$

$$2k\Delta x \cdot a \geq \frac{1}{3} \rho g a^3 \quad (\text{отсутствие поворота вокруг верхнего ребра}),$$

$$k\Delta x \cdot a \geq \frac{1}{6} \rho g a^3 \quad (\text{отсутствие поворота вокруг нижнего ребра}).$$

Откуда $\Delta x_{\min} = \frac{\rho g a^3}{6k}$. При этом суммарная сила, с которой пружины будут давить на стенку аквариума, в точности совпадет с силой давления.

Задача 3 Холодильник

В тонкостенном цилиндрическом сосуде внутреннего радиуса R под поршнем находится столб воды высотой h_1 при температуре $t_0 = 0^\circ\text{C}$. Поршень и дно цилиндра теплоизолированные. Мощность тепловых потерь через боковые стенки пропорциональна площади контакта и разности температур содержимого сосуда и окружающей среды $N = \alpha \cdot S \Delta t$, где α известная константа. Цилиндр вертикально ставят в холодильник, начальная температура в котором равна $t_1 < 0^\circ\text{C}$. Далее температуру в холодильнике изменяют так, что поршень цилиндра перемещается с постоянной скоростью. Лёд, образующийся в цилиндре, не мешает свободному движению поршня. Более того, лёд не всплывает над поверхностью воды, а упирается в поршень, будучи полностью погружённым в воду, время от времени отрываясь от стенок сосуда. Удельная теплота плавления льда λ , плотности воды $\rho_{\text{в}}$, плотность льда $\rho_{\text{л}}$.

1. Определите в какую сторону и с какой скоростью v перемещается поршень.
2. Найдите в течение какого промежутка времени τ_{max} продолжается такое движение.
3. Установите зависимость температуры t в холодильнике от времени τ в промежутке времени $[0, \tau_{\text{max}}]$. Выразите её через h_1, t_0, t_1, v, τ .
4. Найдите температуру в момент времени τ_{max} . Выразите через $t_0, t_1, \rho_{\text{в}}, \rho_{\text{л}}$.

Подсказка

Скорость поршня определяется скоростью кристаллизации, а она — мощностью теплоотдачи через боковую поверхность, смоченную водой под поршнем. Вся эта поверхность растёт вместе с высотой столба, поэтому постоянство скорости означает постоянство произведения $h(t_0 - t)$.

Ответ

$$1) \text{ вверх, } v = \frac{2\alpha(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}})}{\lambda \rho_{\text{в}} \rho_{\text{л}} R} h_1(t_0 - t_1); \quad 2) \tau_{\text{max}} = \frac{\lambda \rho_{\text{в}} R}{2\alpha(t_0 - t_1)}; \quad 3) t = t_0 - (t_0 - t_1) \frac{h_1}{h_1 + v\tau}; \quad 4) t_{\text{к}} = t_0 - (t_0 - t_1) \frac{\rho_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}}.$$

Решение

1. Пусть N — мощность тепловых потерь. Благодаря ему за малое время $\Delta\tau$ кристаллизуется Δm льда:

$$N \Delta\tau = \Delta m \lambda.$$

В жидком состоянии эта масса занимала объём $\Delta V_{\text{в}}$, а в твёрдом $\Delta V_{\text{л}}$:

$$\Delta m = \rho_{\text{в}} \Delta V_{\text{в}} = \rho_{\text{л}} \Delta V_{\text{л}}.$$

Следовательно, изменение объёма содержимого благодаря кристаллизации Δm льда

$$\Delta V = \Delta V_{\text{л}} - \Delta V_{\text{в}} = \frac{\Delta m}{\rho_{\text{л}}} - \frac{\Delta m}{\rho_{\text{в}}} = \Delta m \frac{\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}} \rho_{\text{л}}} > 0.$$

То есть поршень поднялся вверх. Мощность тепловых потерь через боковую поверхность цилиндра пропорциональна площади этой поверхности и разности температур воды и окружающей среды:

$$N = \alpha \cdot h \cdot 2\pi R(t_0 - t).$$

Скорость подъёма поршня

$$v = \frac{\Delta h}{\Delta\tau} = \frac{\Delta V}{\pi R^2 \Delta\tau} = \frac{\Delta m(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}})}{\Delta\tau \rho_{\text{в}} \rho_{\text{л}} \pi R^2} = \frac{N(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}})}{\lambda \rho_{\text{в}} \rho_{\text{л}} \pi R^2} = \frac{2\alpha(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}})}{\lambda \rho_{\text{в}} \rho_{\text{л}} R} \cdot h(t_0 - t).$$

Так как скорость постоянна, используем выражение для неё в начальный момент времени $v = C \cdot h(t_0 - t) = C \cdot h_1(t_0 - t_1)$. Следовательно:

$$v = \frac{2\alpha(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}})}{\lambda\rho_{\text{в}}\rho_{\text{л}}R} \cdot h_1(t_0 - t_1).$$

2. Равномерное движение поршня может продолжаться вплоть до кристаллизации всей воды. Максимальное изменение объёма системы

$$\Delta V_0 = \Delta m_0 \frac{\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}\rho_{\text{л}}} = \pi R^2 h_1 \frac{\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}}{\rho_{\text{л}}}.$$

Искомая продолжительность процесса

$$\tau_{\text{max}} = \frac{\Delta V_0}{\pi R^2 v} = \frac{\lambda\rho_{\text{в}}R}{2\alpha(t_0 - t_1)}.$$

3. Из условий $h(t_0 - t) = h_1(t_0 - t_1)$ и $h(\tau) = h_1 + v\tau$ можно получить искомую зависимость

$$t = t_0 - (t_0 - t_1) \frac{h_1}{h_1 + v\tau}.$$

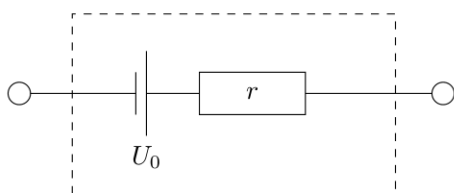
4. Подставим выражение для τ_{max} в закон изменения температуры и найдём её значение в конечный момент времени:

$$t_{\text{к}} = t_0 - (t_0 - t_1) \frac{\rho_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}}.$$

Задача 4 Постоянный ток

В упрощённой модели источник постоянного тока состоит из соединённых последовательно идеального источника постоянного напряжения U_0 и резистора с сопротивлением r (см. рис. 1). При подключении источника постоянного тока в цепь, содержащую резисторы с сопротивлением $R \ll r$, можно считать, что сила тока $I_0 \approx U_0/r$.

Электрическая цепь представляет собой проволочную сетку, которая состоит из звеньев одинакового сопротивления R . Три звена заменены на одинаковые источники постоянного тока I_0 (см. рис. 2).



=



Рис. 1

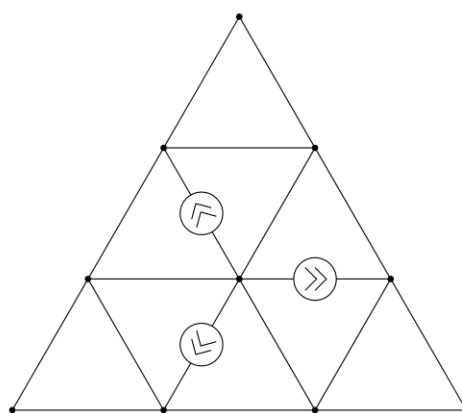


Рис. 2

Найдите, через какие звенья цепи течёт минимальный ток, и чему равна его сила I_{min} . Ответ выразите только через I_0 .

Подсказка

Схема переходит сама в себя при повороте на 120° вокруг центрального узла. Используйте эту симметрию, чтобы найти токи, втекающие в центральный узел, и равные потенциалы вершин, а затем запишите разность потенциалов по двум путям между узлами.

Ответ

$I_{\min} = I_0/5$; такой ток течёт через шесть звеньев у вершин большого треугольника — по два звена (стороны большого треугольника), сходящихся в каждой вершине A, B, C (рис. 3).

Решение

Первое решение. Заметим, что схема переходит сама в себя при повороте на 120° вокруг центрального узла. У всех источников постоянного тока один узел общий, а вторые узлы подключены к эквипотенциальным точкам. Значит через источники протекают одинаковые токи, при этом равные I_0 , поскольку $R \ll r$.

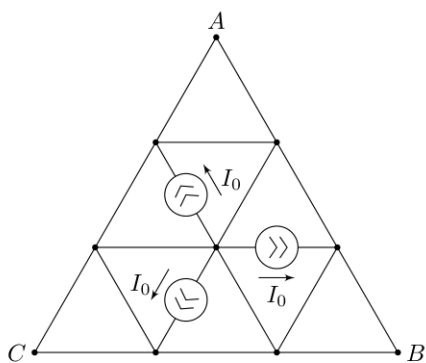


Рисунок 1

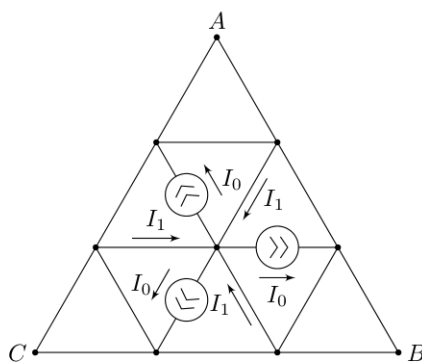


Рисунок 2

Также из симметрии следует, что должны быть равны и токи I_1 , втекающие в центральный узел.

Алгебраическая сумма токов для центрального узла равна 0, значит $I_1 = I_0$.

Расставим токи, текущие через элементы цепи, находящиеся в вершине A , в силу симметрии такие же токи протекают через элементы, находящиеся в вершинах B и C .

Пусть через каждый из оставшихся элементов цепи протекает некоторый ток I_2 . Так как схема симметрична, потенциалы узлов A и C равны, тогда разность потенциалов $\varphi_C - \varphi_A = 0$. Или

$$IR - I_2R + IR = 0 \Rightarrow I_2 = 2I.$$

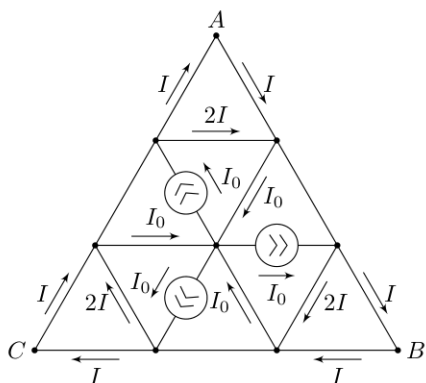


Рисунок 3

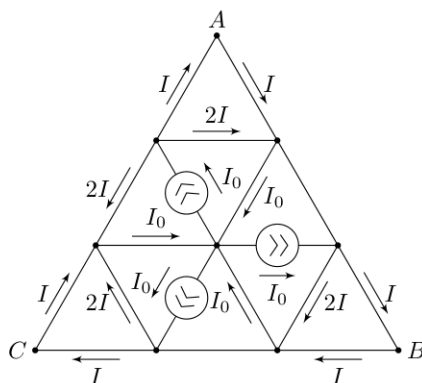


Рисунок 4

Тогда

$$I_0 = I + 2I + 2I = 5I \Rightarrow I_{\min} = I = \frac{I_0}{5}.$$

Второе решение.

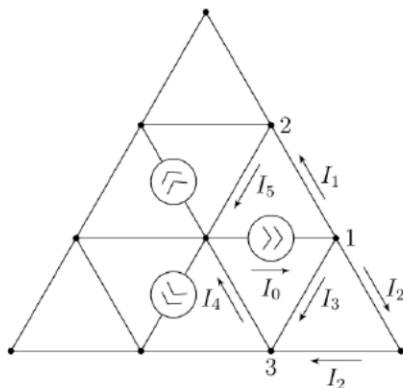


Рисунок 5

Расставим токи по перемычкам цепи I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 . Потенциал в центральной точке цепи примем равным нулю. Запишем разность потенциалов между узлами 3 и 1:

$$\Delta\varphi_{13} = RI_3 = RI_2 + RI_2 = 2RI_2 \Rightarrow I_3 = 2I_2.$$

В силу симметрии цепи $\varphi_2 = \varphi_3$ (при повороте на 120° цепь переходит сама в себя), поэтому

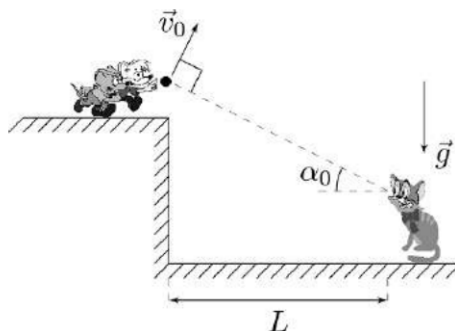
$$\Delta\varphi_{12} = \Delta\varphi_{13} \Rightarrow RI_1 = RI_3 \Rightarrow I_1 = I_3.$$

Запишем закон сохранения заряда для узла 1:

$$I_0 = I_1 + I_2 + I_3 = 2I_3 + I_2 = 5I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{I_0}{5}.$$

Задача 5 Угловая высота камня

Кот Леопольд стоит на горизонтальной поверхности земли на некотором расстоянии L от вертикального обрыва скалы. С края обрыва мыши бросают камень таким образом, что вектор начальной скорости камня $\vec{v}_0$, модуль которой равен $v_0 = 10$ м/с, направлен перпендикулярно лучу зрения Леопольда.



Угол между горизонтом и лучом зрения Леопольда, направленным на камень, в момент броска был равен $\alpha_0 = 25^\circ$, а через некоторое время t_1 после броска камня достиг максимального значения, равного $\alpha_1 = 38^\circ$.

Леопольд и траектория броска находятся в одной вертикальной плоскости, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

1. Чему равно время t_1 ?
2. На каком расстоянии L от скалы находился Леопольд?

Подсказка

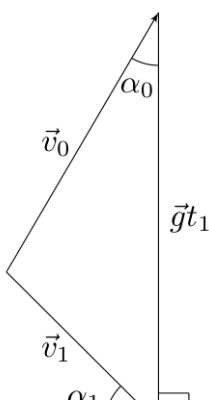
Когда угол луча зрения максимален, луч зрения касается траектории — скорость камня направлена прямо на Леопольда. Постройте треугольник скоростей $\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \vec{g}t_1$.

Ответ

$$1) t_1 = \frac{v_0 \sin(\pi/2 + \alpha_1 - \alpha_0)}{g \sin(\pi/2 - \alpha_1)} \approx 1,24 \text{ с}; \quad 2) L = \frac{v_0 t_1 (\cos \alpha_0 + \operatorname{tg} \alpha_1 \sin \alpha_0) - g t_1^2 / 2}{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_0} \approx 24,3 \text{ м.}$$

Решение

1. Поскольку вектор начальной скорости $\vec{v}_0$ направлен перпендикулярно лучу зрения — он образует угол α_0 с вертикалью.



Траектория камня представляет собой участок параболы ветвями вниз, поэтому максимальное значение $\alpha_1 = 38^\circ$ реализуется, если Леопольд расположен вне искомой параболы, и в момент времени t_1 , когда угол между лучом зрения и горизонтом достигает максимального значения, луч зрения направлен по касательной к траектории камня. Это означает, что в данный момент скорость камня $\vec{v}_1$ направлена прямо на Леопольда и образует угол α_1 с горизонтом.

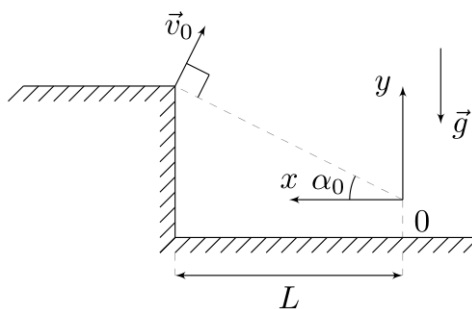
Для определения времени t_1 построим векторный треугольник скоростей для данного момента времени. Из теоремы синусов находим:

$$\frac{g t_1}{\sin(\pi/2 + \alpha_1 - \alpha_0)} = \frac{v_0}{\sin(\pi/2 - \alpha_1)},$$

откуда:

$$t_1 = \frac{v_0 \sin(\pi/2 + \alpha_1 - \alpha_0)}{g \sin(\pi/2 - \alpha_1)} \approx 1,24 \text{ с.}$$

2. Введём систему координат xy с началом в месте расположения глаз Леопольда так, как показано на рисунке.



Тогда зависимости координат $x(t)$, $y(t)$ следующие:

$$x(t) = L - v_0 \sin \alpha_0 t, \quad y(t) = L \operatorname{tg} \alpha_0 + v_0 \cos \alpha_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Тогда для тангенса угла α_1 в момент времени t_1 получим:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{y(t_1)}{x(t_1)} = \frac{L \operatorname{tg} \alpha_0 + v_0 \cos \alpha_0 t_1 - gt_1^2/2}{L - v_0 \sin \alpha_0 t_1},$$

откуда:

$$L = \frac{v_0 t_1 (\cos \alpha_0 + \operatorname{tg} \alpha_1 \sin \alpha_0) - gt_1^2/2}{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_0} \approx 24,3 \text{ м.}$$