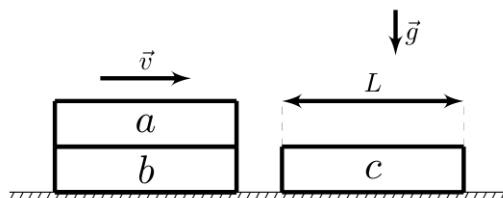


ВсОШ, 2023/24, региональный этап, 11 класс, теоретический тур

Всероссийская олимпиада школьников по физике [Условия, ответы и решения](#)

Задача 1 Вспоминая 90-е

Вспоминая 1998 год, теоретик Баг продолжил исследования следующей ситуации: Доска a лежит на такой же доске b . Они, как единое целое, движутся с некоторой скоростью по гладкой горизонтальной поверхности и сталкиваются с такой же доской c , верхняя поверхность которой покрыта тонким слоем резины. Трения между досками a и b нет, а трения между досками a и c есть. При ударе доски b и c прочно сцепляются. Длина досок равна L . Доска a перестала перемещаться относительно досок b и c в момент, когда она целиком расположилась на доске c . Найдите перемещение Δx доски a от момента соударения до момента прекращения относительного движения досок.



Подсказка

Центр масс трёх досок движется равномерно — найдите, где он относительно доски a в начале и в конце. Сила трения пропорциональна длине перекрытия досок a и c , поэтому относительное движение — четверть периода гармонических колебаний с амплитудой L .

Ответ

$$\Delta x = \frac{2(\pi + 1)L}{3}.$$

Решение

Пусть v_0 — скорость досок a и b до соударения с доской c , а m — масса каждой из досок. Поскольку трения между досками a и b нет, а доски b и c при ударе скрепляются — сразу после удара скорость доски a равна v_0 , а скорость досок b и c равна $v_0/2$ из закона сохранения импульса.

Введём ось x по направлению скорости v_0 . Поскольку горизонтальная поверхность гладкая — центр масс системы движется с постоянной скоростью, равной $v_{\text{цм}} = 2v_0/3$. В момент удара центр масс системы опережает центр доски a на величину $l/3$, а к моменту, когда доска a целиком оказалась на доске c , центр масс системы отстаёт от центра доски на ту же величину $l/3$. Тогда для перемещения доски a получим:

$$\Delta x = \Delta x_{\text{цм}} + \frac{2l}{3} = \frac{2(v_0\tau + l)}{3},$$

где τ — время движения доски a относительно досок b и c . Далее объединим доски b и c в одно тело массой $2m$ и будем характеризовать его индексом 2. Доску a будем характеризовать индексом 1. Пусть $\vec{F}$ — сила трения, действующая на первое тело со стороны второго, а x — их относительное перемещение после удара. Отметим, что трение происходит только в области

перекрытия досок a и c . Величина силы трения скольжения прямо пропорциональна силе нормальной реакции шероховатой части поверхности опоры, и поэтому $F_x = -\mu mgx/l$. Запишем второй закон Ньютона для каждого из тел:

$$m\vec{a}_1 = \vec{F}, \quad 2m\vec{a}_2 = -\vec{F},$$

откуда:

$$\vec{a}_1 - \vec{a}_2 = \vec{a}_{\text{отн}} = \frac{\vec{F}}{m} + \frac{\vec{F}}{2m} = \frac{2\vec{F}}{3m}.$$

Тогда получим уравнение движения для переменной x :

$$\ddot{x} = -\frac{2\mu gx}{3L}.$$

Это уравнение гармонических колебаний с циклической частотой $\omega_0 = \sqrt{2\mu g/3L}$. Его общее решение:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Определим A и φ_0 из начальных условий:

$$\begin{cases} x(0) = A \sin \varphi_0 = 0 \\ \dot{x}(0) = \frac{v_0}{2} = \omega A \cos \varphi_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_0 = 0 \\ A = \frac{v_0}{2\omega} \end{cases}$$

Величина A имеет смысл амплитуды колебаний, которая также равна L , поскольку относительное движение досок прекращается, когда доска a целиком оказывается на доске c . Таким образом, имеем связь:

$$\frac{v_0}{2\omega} = L.$$

Время движения τ является четвертью периода гармонических колебаний с циклической частотой ω_0 , откуда:

$$\tau = \frac{\pi}{2\omega}.$$

Тогда для перемещения центра масс имеем:

$$\Delta x_{\text{цм}} = \frac{2v_0\tau}{3} = \frac{2\pi L}{3},$$

и окончательно находим:

$$\Delta x = \Delta x_{\text{цм}} + \frac{2L}{3} = \frac{2(\pi + 1)L}{3}.$$

Задача 2 Нагревание насосом

Сосуд с теплоизолирующими стенками заполнен атмосферным воздухом при температуре T_0 и давлении p_0 . Через малый клапан в стенке сосуда с помощью насоса, соединённого с клапаном, в сосуд начинают закачивать воздух. Малая порция воздуха из атмосферы поступает в насос, сжимается, после чего в результате теплообмена с окружающей средой охлаждается до температуры T_0 , при этом после охлаждения давление воздуха в насосе всегда незначительно выше, чем в сосуде. Затем открывается клапан, и порция воздуха из насоса поступает в сосуд при практически постоянных давлении и температуре, сразу после чего клапан закрывается. Воздух можно считать идеальным двухатомным газом. Теплотериями за время, в течение которого клапан открыт, можно пренебречь. Считайте, что в процессе закачивания давление воздуха в насосе всегда больше, чем давление воздуха в сосуде, а газ, находящийся в сосуде, из него никогда не вытекает. В результате многократного повторения описанного процесса давление в сосуде повышается до p_1 .

1. Во сколько раз изменилось количество вещества газа в сосуде?
2. Найдите температуру T_1 в сосуде.

Подсказка

Проталкивая порцию $d\nu$ в сосуд при постоянном давлении, насос совершает работу $p dV = RT_0 d\nu$. Запишите первое начало для всего газа, оказавшегося в сосуде, и уравнения состояния в начале и в конце.

Ответ

$$1) \frac{\nu_k}{\nu_0} = \frac{2}{7} + \frac{5p_1}{7p_0}; \quad 2) T_1 = \frac{T_0}{\frac{2p_0}{7p_1} + \frac{5}{7}}.$$

Решение

Пусть V — объём сосуда, ν_0 — начальное количество вещества в сосуде, а $\Delta\nu$ — количество вещества, переместившееся в сосуд из атмосферы. Запишем уравнения состояния газа в сосуде до и после закачивания:

$$p_0 V = \nu_0 R T_0, \quad p_1 V = (\nu_0 + \Delta\nu) R T_1.$$

Пусть давление воздуха внутри насоса равняется p_b , а dV_b — объём, занимаемый порцией воздуха в количестве вещества $d\nu$ внутри насоса. При закачивании указанной порции воздуха в сосуд насос совершает механическую работу δA_n , равную:

$$\delta A_n = p_b dV_b.$$

Но из уравнения Менделеева–Клапейрона $p_b dV_b = RT_0 d\nu$, поэтому:

$$\delta A_n = RT_0 d\nu.$$

Таким образом, полная механическая работа насоса A_n составляет:

$$A_n = \Delta\nu R T_0.$$

Запишем первое начало термодинамики для системы, состоящей из изначально находившегося в сосуде газа и закачанного в него насосом:

$$A_n + U_0 + U_1 = U_k.$$

Здесь $U_0 = \nu_0 C_V T_0$ — начальная внутренняя энергия воздуха, изначально находившегося в сосуде, $U_1 = \Delta\nu C_V T_0$ — сумма внутренних энергий закачиваемого воздуха на этапе закачивания в сосуд, а $U_k = (\nu_0 + \Delta\nu) C_V T_1$ — конечная внутренняя энергия рассматриваемой системы. Молярная теплоёмкость воздуха при постоянном объёме равна $C_V = 5R/2$. Отсюда:

$$\Delta\nu R T_0 + \frac{5\nu_0 R T_0}{2} + \frac{5\Delta\nu R T_0}{2} = \frac{5(\nu_0 + \Delta\nu) R T_1}{2}.$$

Таким образом:

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{5\nu_0 + 7\Delta\nu}{5(\nu_0 + \Delta\nu)} = \frac{p_1}{p_0} \frac{\nu_0}{(\nu_0 + \Delta\nu)} \Rightarrow \frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{5}{7} \left(\frac{p_1}{p_0} - 1 \right).$$

Для отношения количеств вещества воздуха в сосуде после завершения процессов с насосом и до их начала имеем:

$$\frac{\nu_k}{\nu_0} = 1 + \frac{\Delta\nu}{\nu_0},$$

откуда:

$$\frac{\nu_{\kappa}}{\nu_0} = \frac{2}{7} + \frac{5p_1}{7p_0}.$$

Для отношения температур T_1/T_0 имеем:

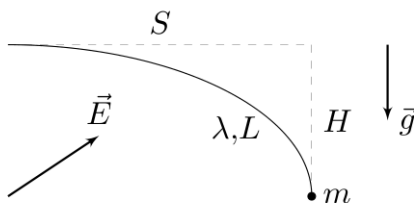
$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{p_1}{p_0} \frac{\nu_0}{\nu_{\kappa}}.$$

Таким образом:

$$T_1 = \frac{T_0}{\frac{2p_0}{7p_1} + \frac{5}{7}}.$$

Задача 3 Равновесие в полях

Нерастяжимая невесомая нить длиной L заряжена равномерно по длине положительным зарядом с линейной плотностью λ . Один конец нити закреплён, а к другому прикреплён маленький груз массой m . Систему поместили в однородное электростатическое поле. В положении равновесия система расположилась таким образом, что касательные к нити в точке крепления и в месте расположения груза оказались горизонтальной и вертикальной соответственно. Груз расположился на расстоянии H ниже и на расстоянии S правее точки крепления (см. рис). Собственным электростатическим полем зарядов нити можно пренебречь. Ускорение свободного падения равняется g . Определите величину напряжённости E электростатического поля.



Подсказка

Из равновесия всей системы (нить с грузом) $\vec{T} + m\vec{g} + \lambda L\vec{E} = 0$ находятся проекции поля через натяжение T в точке крепления. Вторая связь — между натяжениями на концах нити: мысленно протяните нить вдоль самой себя на dl и приравняйте работу натяжений изменению энергии нити в поле.

Ответ

$$E = \frac{mg}{\lambda L} \sqrt{1 + \left(\frac{L-H}{L-S} \right)^2}.$$

Решение

Пусть $\vec{T}$ — сила, действующая на нить в точке её крепления, равная по модулю силе натяжения нити в данной точке. Тогда, поскольку система расположена в равновесии:

$$\vec{T} + m\vec{g} + \lambda L\vec{E} = 0.$$

Введём систему координат xy , где ось x направлена вправо, а ось y — вертикально вверх. Тогда из условия равновесия:

$$E_y = \frac{mg}{\lambda L}, \quad E_x = \frac{T}{\lambda L}.$$

Свяжем силы натяжения нити $T_0 = mg$ в точке крепления груза и T в точке крепления нити. Приведём два способа получения данной связи.

Первый способ. Воспользуемся методом виртуальных перемещений. Мысленно поместим нить в гладкую трубку, повторяющую форму нити. Это не изменит силу натяжения, потому что нить с трубкой не взаимодействует. Сдвинем нить вдоль трубки на величину dl в направлении от точки крепления груза к точке крепления нити. Тогда изменение формы нити эквивалентно перемещению участка нити длиной dl из точки крепления груза в точку крепления нити, поскольку форма остальной части нити не изменится. Поскольку сила натяжения невесомой нити направлена вдоль нити, работа сил, приложенных к концам нити, на указанном виртуальном перемещении равна:

$$\delta A = T dl - T_0 dl = T dl - mg dl.$$

Совершаемая силами натяжения работа равна изменению потенциальной энергии нити в электростатическом поле:

$$\delta A = dW_p.$$

Поскольку перемещение нити эквивалентно перемещению её участка длиной dl из точки крепления груза в точку крепления нити — изменение потенциальной энергии нити в электростатическом поле равно изменению потенциальной энергии соответствующего участка нити:

$$dW_p = \lambda dl (\varphi - \varphi_0) = \lambda dl \Delta\varphi,$$

где φ и φ_0 — потенциалы электростатического поля в точках крепления нити и груза соответственно. Для изменения потенциала $\Delta\varphi$ имеем:

$$\Delta\varphi = -E_x(x - x_0) - E_y(y - y_0).$$

Поскольку $x - x_0 = -S$, а $y - y_0 = H$, для изменения потенциала $\Delta\varphi$ находим:

$$\Delta\varphi = E_x S - E_y H.$$

Таким образом:

$$T - mg = \lambda(E_x S - E_y H).$$

Второй способ. Рассмотрим бесконечно малый элемент нити длиной dl . Условие его равновесия записывается следующим образом:

$$(\vec{T} + d\vec{T}) - \vec{T} + \vec{E}\lambda dl = 0.$$

Проецируя на направление касательной к нити, получим:

$$dT + \lambda E_{\parallel} dl = 0.$$

Пусть касательная к нити образует угол φ с вертикалью. Тогда для $E_{\parallel}$ имеем:

$$E_{\parallel} = E \cos \varphi - E \sin \varphi,$$

откуда:

$$dT + E_y \lambda dl \cos \varphi - E_x \lambda dl \sin \varphi = 0.$$

Но при этом $dl \cos \varphi = dy$, а $dl \sin \varphi = -dx$, откуда:

$$dT + E_y \lambda dy + E_x \lambda dx = 0.$$

Суммируя, получим:

$$T - T_0 = T - mg = -E_y \lambda (y - y_0) - E_x \lambda (x - x_0).$$

Поскольку $y - y_0 = H$, а $x - x_0 = -S$, получим:

$$T - mg = \lambda(E_x S - E_y H).$$

Но поскольку $T = \lambda L E_x$:

$$\lambda L E_x - mg = \lambda(S E_x - H E_y) = \lambda S E_x - \lambda H \cdot \frac{mg}{\lambda L} \Rightarrow E_x = \frac{mg}{\lambda L} \frac{L - H}{L - S}.$$

Для напряжённости электростатического поля имеем:

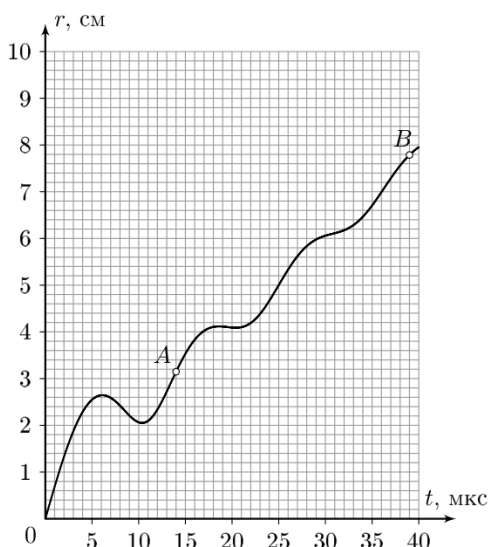
$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2},$$

откуда:

$$E = \frac{mg}{\lambda L} \sqrt{1 + \left(\frac{L - H}{L - S} \right)^2}.$$

Задача 4 Полный улёт

В однородном магнитном поле в отсутствие силы тяжести движется заряженная частица. На рисунке представлен график зависимости модуля перемещения этой частицы r относительно точки, в которой находилась эта частица в момент времени $t = 0$, от времени её дальнейшего движения t .



1. Определите модуль скорости v , с которой движется частица.
2. Определите угол α между вектором скорости частицы в момент $t = 0$ и вектором индукции магнитного поля.
3. Определите индукцию магнитного поля, если заряд частицы равен $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, масса частицы равна $m = 1,0 \cdot 10^{-26}$ кг.
4. Найдите расстояние между двумя положениями частицы, которые соответствуют точкам A и B на графике.

Подсказка

Частица идёт по винтовой линии с постоянной по модулю скоростью. В самом начале $r \approx vt$; а прямая $r = v_{\parallel} t$ лежит не выше графика и касается его в моменты, кратные периоду обращения.

Ответ

1) $v \approx 7$ км/с; 2) $\alpha \approx 74^\circ$ или $\alpha \approx 106^\circ$; 3) $B \approx 35$ мТл; 4) $L_{AB} \approx 5,0$ см.

Решение

Постоянное магнитное поле не совершает работы над заряженной частицей, и поэтому, если пренебречь излучением, модуль скорости частицы не изменяется. Поэтому величина скорости частицы равна величине скорости при $t = 0$.

Отметим, что при конечных ускорениях всегда существует такой «малый» интервал времени после начала движения, на котором скорость удаления частицы от начального положения примерно равна начальной скорости, то есть можно считать, что $r \approx vt$. Поэтому для нахождения скорости частицы проведём касательную к графику функции в начале координат (верхняя прямая на графике). Величина скорости при этом численно равна тангенсу угла наклона этой прямой:

$$v = \frac{9,8 \text{ см}}{14 \text{ мкс}} \approx 7 \text{ км/с}.$$

Направим ось z вдоль вектора индукции магнитного поля, выбирая для простоты начало координат так, чтобы $z = 0$ при $t = 0$. Обозначим $v_{\parallel}$ проекцию вектора скорости частицы на ось z , а $v_{\perp}$ — величину перпендикулярной этой оси составляющей. Так как сила Лоренца, действующая на частицу, не имеет составляющей вдоль оси z ,

$$z(t) = v_{\parallel} t.$$

В сечении, перпендикулярном оси z , движение частицы происходит по окружности с постоянной скоростью $v_{\perp}$. Радиус этой окружности равен

$$R = \frac{mv_{\perp}}{qB},$$

где B — модуль вектора магнитной индукции, а время одного оборота

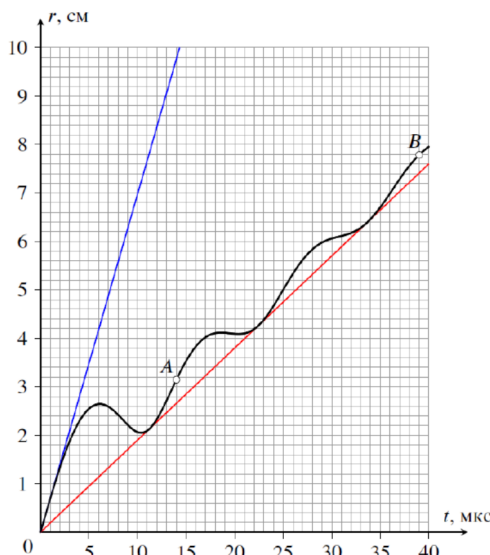
$$T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = \frac{2\pi m}{qB}.$$

Таким образом, траектория частицы представляет собой винтовую линию с шагом $h = v_{\parallel} T$ и радиусом $R = v_{\perp} T / (2\pi)$. Выбирая оставшиеся оси координат максимально удобным способом, можно записать, что

$$x(t) = R \cos(2\pi t/T), \quad y(t) = R \sin(2\pi t/T),$$

откуда, учитывая, что в момент $t = 0$ частица находилась в точке с координатами $x = R$, $y = z = 0$, получим формулу зависимости модуля её перемещения от времени:

$$r(t) = \sqrt{(x(t) - R)^2 + y(t)^2 + z(t)^2} = \sqrt{v_{\parallel}^2 t^2 + 4R^2 \sin^2(\pi t/T)}.$$



Возьмём теперь выражение для $r(t)$ и поделим его на t :

$$\frac{r(t)}{t} = \sqrt{v_{\parallel}^2 + 4R^2 \cdot \left(\frac{\sin(\pi t/T)}{t}\right)^2}.$$

Второе слагаемое в подкоренном выражении при любом t не может быть меньше нуля, следовательно $r(t)/t \geq v_{\parallel}$. Это значит, что прямая, идущая в координатах $r-t$ из начала, имеющая общие точки с приведённым в условии графиком и обладающая наименьшим угловым коэффициентом, является прямой $r = |v_{\parallel}|t$. Соответственно, для того чтобы определить $v_{\parallel}$, проведём касательную из начала координат к нижней части графика (нижняя прямая на рисунке). Точки касания соответствуют ситуации, когда частица находится на прямой, проходящей через начальную точку и параллельной линиям магнитного поля. Тангенс наклона такой прямой численно равен $|v_{\parallel}|$:

$$|v_{\parallel}| = \frac{7,6 \text{ см}}{40 \text{ мкс}} = 1,9 \text{ км/с}.$$

Отсюда находим, что

$$\cos \alpha = \frac{v_{\parallel}}{v} = \pm \frac{1,9}{7} \approx \pm 0,271 \Rightarrow \alpha \approx 74^\circ \text{ или } \alpha \approx 106^\circ.$$

Точки касания нижней прямой располагаются через равные промежутки времени, равные времени T прохода частицей одного витка винтовой линии. Для увеличения точности возьмём крайнюю (третью) точку касания и определим значение T :

$$T = 34 \text{ мкс}/3 \approx 11,3 \text{ мкс}.$$

Отсюда получим, что

$$B = \frac{2\pi m}{qT} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 10^{-26} \text{ кг}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot 11,3 \cdot 10^{-6} \text{ с}} \approx 35 \text{ мТл}.$$

Между положениями A и B прошло время, равное

$$t_{AB} = 39 \text{ мкс} - 14 \text{ мкс} = 25 \text{ мкс}.$$

За это время частица сместилась вдоль линий магнитного поля на расстояние

$$\Delta z = |v_{\parallel}|t_{AB} = 4,75 \text{ см}.$$

В проекции на перпендикулярную магнитному полю плоскость частица движется по окружности с радиусом

$$R = (v_{\perp} T) / 2\pi = T / 2\pi \cdot \sqrt{v^2 - v_{\parallel}^2} \approx 1,21 \text{ см.}$$

Её смещение в этой плоскости равно

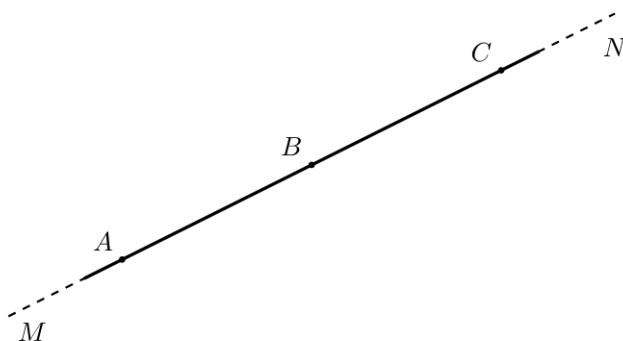
$$\Delta l = 2R \sin(\pi t_{AB} / T) \approx 1,50 \text{ см.}$$

Отсюда получим значение расстояния AB :

$$L_{AB} = \sqrt{\Delta l^2 + \Delta z^2} \approx 5,0 \text{ см.}$$

Задача 5 Третоение

При очередном разборе архива Снеллиуса на глаза одному из специалистов попался небольшой рисунок с тремя точками A , B и C , лежащими на одной прямой MN . Из комментариев к рисунку следовало, что прямая MN проходила через оптический центр тонкой линзы под небольшим углом к главной оптической оси, а точки A , B и C обладали любопытным свойством: при помещении точечного источника света в любую из них изображение оказывалось в одной из двух других точек. Также было указано, что расстояния между точками A и B и между точками B и C , в которые помещали источник, были одинаковы и равнялись l , а модуль фокусного расстояния линзы был равен F .



1. Определите, о рассеивающей или собирающей линзе шла речь.
2. С какой стороны (слева или справа) от точки B располагался оптический центр линзы?
3. На каком расстоянии от точки B располагался оптический центр линзы?
4. Под каким углом к прямой MN наклонена главная оптическая ось линзы?

Подсказка

По обратимости хода лучей две точки должны быть действительными изображениями друг друга, а третья — давать мнимое изображение в одну из них. Запишите формулу линзы для двух источников, считая расстояния вдоль оси равными расстояниям вдоль MN , умноженным на $\cos \alpha$.

Ответ

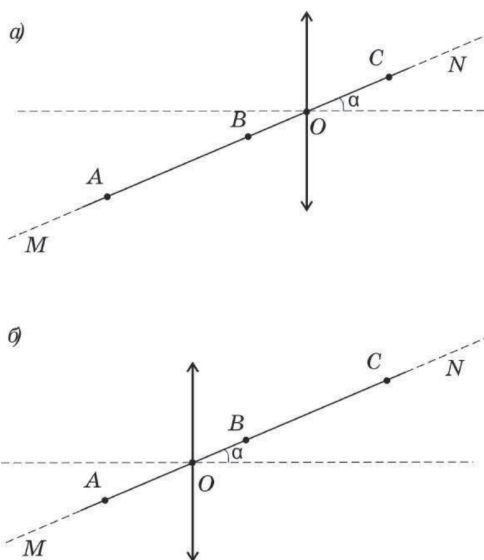
1) собирающая; 2) возможны оба варианта — и справа, и слева от B ; 3) $d = l/3$; 4) $\alpha = \arccos \frac{9F}{4l}$, или $\alpha \approx \sqrt{\frac{4l - 9F}{2l}}$.

Решение

Если линза рассеивающая, то, независимо от положения источника, его изображение будет мнимым, расположенным между источником и оптическим центром линзы. После перемещения источника в точку, где ранее было расположено его изображение, новое изображение окажется снова между источником и оптическим центром линзы. Получится бесконечная цепочка изображений. Таким образом, три точки с указанным свойством в случае рассеивающей линзы существовать не могут.

Линза может быть только собирающей.

Мнимое изображение в собирающей линзе всегда расположено дальше от линзы, чем источник, поэтому не может быть, что точки A , B и C являются мнимыми изображениями друг друга. Но, в соответствии с принципом обратимости хода световых лучей, при помещении источника в точку действительного изображения, его новое изображение совпадает с предыдущим положением источника. Поэтому описанным в условии свойством три точки могут обладать только в том случае, если две из них являются действительными изображениями друг друга, а при помещении источника в третью он даёт мнимое изображение в одной из точек этой пары. Пусть, например, собирающая линза расположена так, что точка A находится за её фокальной плоскостью. Тогда изображение A будет действительным и будет расположено по другую сторону от плоскости линзы. При перемещении источника в точку этого изображения, новое изображение вернётся в точку A . Оставшееся, третье положение источника, должно давать мнимое изображение в одной из первых двух точек. Значит, оно должно располагаться между этой точкой (своим изображением) и оптическим центром линзы O ближе фокальной плоскости линзы. В этом случае линза могла быть расположена двумя способами (см. рисунок): а) оптический центр линзы находится между точками B и C , причём источник в точке B даёт мнимое изображение в точке A ; б) оптический центр линзы находится между точками A и B , причём источник в точке B даёт мнимое изображение в точке C .



Таким образом, оптический центр линзы мог располагаться как справа, так и слева от точки B .

Если же источник сначала расположить между фокальной плоскостью и плоскостью линзы, то изображение будет получаться мнимым. При помещении источника в точку изображения новое изображение должно получиться действительным (по другую сторону плоскости линзы). И при перемещении источника в оставшуюся, третью точку, изображение окажется на месте, где источник располагался ранее. Этот вариант идентичен представленному ранее и отдельного рассмотрения не требует.

Рассмотрим только способ а) размещения линзы, так как способ б) аналогичен. Источник, расположенный в точке B на расстоянии меньшем фокусного, даёт мнимое изображение в точке A . При помещении источника в точку A возникает действительное изображение в точке C , при помещении источника в точку C — действительное изображение в точке A . Обозначим расстояние между оптическим центром линзы и источником, угол между главной оптической осью линзы и прямой и фокусное расстояние линзы за d , α и F соответственно. Запишем формулу тонкой линзы для варианта расположения источника в точке B :

$$\frac{1}{d \cos \alpha} - \frac{1}{(l + d) \cos \alpha} = \frac{1}{F}.$$

Запишем формулу тонкой линзы для варианта расположения источника в точке A :

$$\frac{1}{(l + d) \cos \alpha} + \frac{1}{(l - d) \cos \alpha} = \frac{1}{F}.$$

Решая систему, находим d и α .

Расстояние между оптическим центром линзы и точкой B равно $d = l/3$.

Решение системы уравнений даёт: $\cos \alpha = \frac{9F}{4l}$, откуда $\alpha = \arccos \frac{9F}{4l}$. Поскольку в условии сказано, что угол α является малым, то допустимо на любом этапе вычислений использовать приближённое равенство $\cos \alpha \approx 1 - \alpha^2/2$. Тогда приходим к формуле $\alpha \approx \sqrt{\frac{4l - 9F}{2l}}$. Отметим, что малость угла означает, что с точностью до поправок порядка α^2 параметры системы связаны соотношением $l \approx \frac{9}{4}F$.

Угол между главной оптической осью линзы и прямой MN равен $\alpha = \arccos \frac{9F}{4l}$ или $\alpha \approx \sqrt{\frac{4l - 9F}{2l}}$.