

ВсОШ, 2023/24, заключительный этап, 10 класс, теоретический тур

Всероссийская олимпиада школьников по физике [Условия, ответы и решения](#)

Задача 1 Падение в бездну

Две противоположные стены глубокого ущелья представляют собой участки параллельных вертикальных плоскостей. Однажды в безветренный день экспериментатор Глюк и теоретик Баг расположились на краях различных стен ущелья (см. рис. 2). Линия, соединяющая Глюка и Бага, образует с горизонтом угол $\varphi = 30^\circ$. Глюк и Баг бросали одинаковые шарики с одной и той же неизвестной начальной скоростью v_0 относительно Земли, причём такой, что ни один брошенный шарик не достиг противоположной стены. Траектории шариков всегда лежали в вертикальной плоскости, содержащей Глюка и Бага. На движущийся шарик действует сила сопротивления воздуха, направленная против скорости движения шарика и прямо пропорциональная ей. Размерами Глюка и Бага можно пренебречь.

После множества проведённых экспериментов Глюк и Баг выяснили следующее:

- если шарик был брошен горизонтально, то он удалялся по горизонтали на расстояние S от бросающего (см. рис. 1);
- при одновременных бросках Глюком и Багом шариков горизонтально и под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту соответственно (см. рис. 2) в установившемся режиме шарики движутся вдоль одной вертикальной прямой.

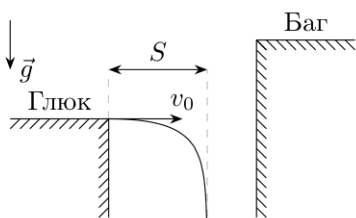


Рис. 1

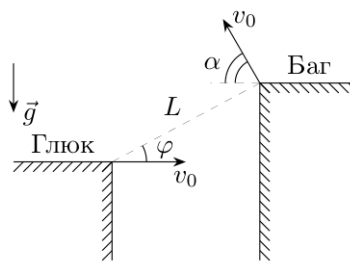


Рис. 2

Примечание: Приводить аналитические ответы, являющиеся функциями углов α и φ , не обязательно.

1. Определите расстояние L между Глюком и Багом (см. рис. 2).
2. Для одновременных бросков Глюком и Багом шариков горизонтально и под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту соответственно, как показано на рис. 2, определите расстояние S_∞ между шариками в установившемся режиме, а также минимальное расстояние S_{min} между шариками в процессе движения.

Подсказка

При вязком трении горизонтальный путь шарика пропорционален начальной горизонтальной скорости. Во втором пункте перейдите в систему отсчёта одного шарика: относительное ускорение направлено против относительной скорости, и относительное движение прямолинейно.

Ответ

$$1) L = \sqrt{3} S; \quad 2) S_{\infty} = \sqrt{3} S, \quad S_{\min} = 3S/2.$$

Решение

1. Пусть m — масса шарика, ускорение свободного падения равняется $\vec{g}$, а сила сопротивления, действующая на шарик, определяется выражением $\vec{F}_c = -k\vec{v}$, где $\vec{v}$ — скорость движения шарика. Запишем для одного шарика второй закон Ньютона:

$$m\vec{a} = m\vec{g} - k\vec{v}.$$

Проецируя уравнение на горизонтальную ось x , получим:

$$ma_x = -kv_x \implies \Delta x = \frac{mv_{0x}}{k},$$

где Δx — установившееся горизонтальное перемещение шарика с начальной горизонтальной компонентой скорости v_{0x} . Если $v_{0x} = v_0$, где v_0 — начальная скорость шариков при бросании, то $\Delta x = S$. Тогда для шарика, брошенного под углом α к горизонту, получим:

$$\Delta x = S \cos \alpha.$$

Шарики, одновременно брошенные Глюком и Багом горизонтально и под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту соответственно так, как показано на рис. 2 в условии задачи, в установившемся режиме движутся вдоль одной вертикальной прямой. Значит, расстояние между плоскостями обрывов $l = L \cos \varphi = L\sqrt{3}/2$ является суммой величин горизонтальных перемещений брошенных шариков. Таким образом:

$$l = S + S \cos \alpha = \frac{3S}{2},$$

откуда:

$$L = \sqrt{3} S.$$

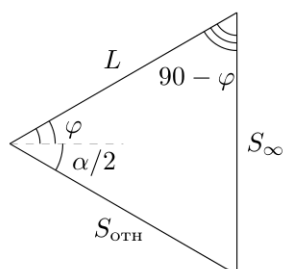
2. **Первое решение.** Запишем второй закон Ньютона для шариков, брошенных Глюком и Багом:

$$m\vec{a}_\Gamma = m\vec{g} - k\vec{v}_\Gamma, \quad m\vec{a}_\text{Б} = m\vec{g} - k\vec{v}_\text{Б}.$$

Определим ускорение шарика Глюка относительно шарика Бага:

$$\vec{a}_\Gamma - \vec{a}_\text{Б} = \vec{a}_{\text{отн}} = -\frac{k(\vec{v}_\Gamma - \vec{v}_\text{Б})}{m} = -\frac{k\vec{v}_{\text{отн}}}{m} \implies \vec{a}_{\text{отн}} = -\frac{k\vec{v}_{\text{отн}}}{m}.$$

Поскольку относительное ускорение шариков направлено противоположно направлению их относительной скорости — относительная скорость шариков сохраняет своё направление. Значит, относительное движение шариков будет прямолинейным и прекратится, когда они окажутся на одной вертикали. Изобразим траекторию движения шарика Глюка относительно шарика Бага.



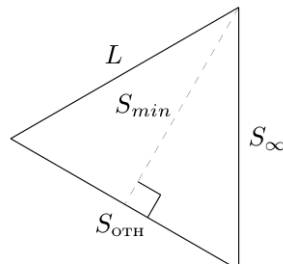
Обратим внимание, что линия, соединяющая Глюка и Бага, образует с вертикалью угол $90^\circ - \varphi = 60^\circ$. Поскольку направление относительной скорости образует угол $\alpha/2$ с горизонтом, угол между направлением относительного перемещения шариков и линией, соединяющей Глюка и Бага, равен $\varphi + \alpha/2 = 60^\circ$. Таким образом, показанный на рисунке треугольник является равнобедренным. Тогда расстояние S_∞ между шариками в установившемся режиме составляет:

$$S_\infty = L,$$

или же:

$$S_\infty = \sqrt{3} S.$$

Минимальное расстояние между шариками S_{min} достигается в момент, когда относительная скорость шариков направлена перпендикулярно соединяющей их линии. Из рисунка находим:



$$S_{min} = L \sin 60^\circ,$$

или же:

$$S_{min} = \frac{3S}{2}.$$

Второе решение. Введём систему координат xOy , где начало координат O находится в месте расположения Глюка, ось x направлена вправо, а ось y — вертикально вверх. Получим зависимости от времени горизонтальных и вертикальных компонент перемещений одного камня Δx и Δy соответственно. Спроецируем уравнение движения шарика на горизонтальную ось x :

$$m\dot{v}_x = -kv_x \implies \frac{dv_x}{v_x} = -\frac{k}{m} dt = -\beta dt.$$

Пусть v_{x0} — начальная проекция скорости шарика на ось x . Интегрируя, получим:

$$\int_{v_{x0}}^{v_x(t)} \frac{dv_x}{v_x} = \ln \frac{v_x(t)}{v_{x0}} = -\beta t \implies v_x(t) = v_{x0} e^{-\beta t}.$$

Интегрируя повторно, получим:

$$\Delta x(t) = \int_0^t v_x(t) dt = v_{x0} \int_0^t e^{-\beta t} dt = \frac{v_{x0}}{\beta} (1 - e^{-\beta t}).$$

Таким образом, разность x координат шариков Бага и Глюка составляет:

$$\Delta x_{отн}(t) = x_B(t) - x_G(t) = L \cos \varphi - \frac{v_0(1 + \cos \alpha)}{\beta} (1 - e^{-\beta t}).$$

С учётом соотношения $S = v_0/\beta$ получим:

$$\Delta x_{отн}(t) = L \cos \varphi - S(1 + \cos \alpha) (1 - e^{-\beta t}).$$

Спроецируем уравнение движения шарика на ось y , направленную вертикально вверх:

$$m\dot{v}_y = -mg - kv_y \implies \frac{dv_y}{\frac{mg}{k} + v_y} = -\beta dt.$$

Пусть v_{y0} — начальная проекция скорости шарика на ось y . Интегрируя, получим:

$$\int_{v_{y0}}^{v_y(t)} \frac{dv_y}{\frac{mg}{k} + v_y} = \ln \frac{mg + kv_y(t)}{mg + kv_{y0}} = -\beta t \implies v_y(t) = -\frac{mg}{k} + \left(\frac{mg}{k} + v_{y0}\right) e^{-\beta t}.$$

Для $\Delta y(t)$ имеем:

$$\Delta y(t) = \int_0^t v_y(t) dt = \int_0^t \left(-\frac{mg}{k} + \left(\frac{mg}{k} + v_{y0}\right) e^{-\beta t}\right) dt,$$

откуда:

$$\Delta y(t) = -\frac{mgt}{k} + \frac{1}{\beta} \left(\frac{mg}{k} + v_{y0}\right) (1 - e^{-\beta t}).$$

Таким образом, разность y координат шариков Бага и Глюка составляет:

$$\Delta y_{\text{отн}}(t) = y_{\text{Б}}(t) - y_{\text{Г}}(t) = L \sin \varphi + \frac{v_0 \sin \alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta t}).$$

С учётом соотношения $S = v_0/\beta$ получим:

$$\Delta y_{\text{отн}}(t) = L \sin \varphi + S \sin \alpha (1 - e^{-\beta t}).$$

При $t \rightarrow \infty$ имеем:

$$\begin{aligned} \Delta x_{\text{отн}}(\infty) &= L \cos \varphi - S(1 + \cos \alpha) = 0, \\ \Delta y_{\text{отн}}(\infty) &= L \sin \varphi + S \sin \alpha = S\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Таким образом $S_{\infty} = \Delta y_{\text{отн}}(\infty)$, а значит:

$$S_{\infty} = S\sqrt{3}.$$

Пусть $(1 - e^{-\beta t}) = z$. Тогда для расстояния $r(z)$ между камнями имеем:

$$r(z) = \sqrt{\Delta x_{\text{отн}}^2(z) + \Delta y_{\text{отн}}^2(z)} = \sqrt{(L \cos \varphi - zS(1 + \cos \alpha))^2 + (L \sin \varphi + zS \sin \alpha)^2}.$$

Раскрывая скобки, получим:

$$r(z) = \sqrt{L^2 + 2z^2S^2(1 + \cos \alpha) - 2LSz(\cos \varphi(1 + \cos \alpha) - \sin \varphi \sin \alpha)}.$$

Подставляя углы α, φ , а также расстояние L :

$$r(z) = S\sqrt{3(1 + z^2 - z)}.$$

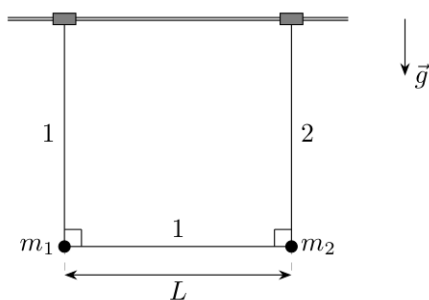
Расстояние достигает своего минимума при минимальном значении подкоренного выражения, которому соответствует вершина параболы:

$$z_{\min} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом:

$$S_{\min} = \frac{3S}{2}.$$

Задача 2 Столкновение на спице



Два одинаковых маленьких невесомых коротких цилиндра могут без трения скользить по длинной закреплённой горизонтальной спице. Цилиндры соединены с невесомыми нерастяжимыми нитями 1 и 2, причём длина нити 1 на величину L больше длины нити 2 (см. рис). По нити 1 без трения может перемещаться маленькая бусинка массой m_1 , а небольшой груз массой m_2 прикреплен к концам обеих нитей. Изначально систему, состоящую из цилиндров, нитей, бусинки и груза удерживают в состоянии покоя таким образом, что спица и обе нити находятся в одной вертикальной плоскости, бусинка и груз расположены на одной горизонтали, при этом бусинка расположена на одной вертикали с цилиндром, прикрепленным к нити 1, а груз расположен на одной вертикали с цилиндром, прикрепленным к нити 2. Нити слегка натянуты. Ускорение свободного падения равно g . Считайте, что размеры цилиндров больше размеров бусинки и груза. Сопротивлением воздуха можно пренебречь. Систему отпускают.

1. Определите скорости v_1 и v_2 бусинки и груза соответственно прямо перед столкновением цилиндров.
2. Определите силы натяжения T_1 и T_2 нитей 1 и 2 соответственно прямо перед столкновением цилиндров.

Подсказка

Невесомые цилиндры на гладкой спице держат нити только вертикально, поэтому столкновение произойдёт, когда всё окажется на одной вертикали; горизонтальный импульс системы сохраняется. Для сил натяжения нужно ускорение бусинки — найдите радиус кривизны её траектории относительно груза (это парабола).

Ответ

$$1) v_1 = \sqrt{\frac{gL}{1 + m_1/m_2}}, v_2 = \frac{m_1}{m_2} \sqrt{\frac{gL}{1 + m_1/m_2}}; \quad 2) T_1 = m_1 g \left(1 + \frac{m_1}{2m_2}\right), T_2 = \left(m_1 + m_2 + \frac{m_1^2}{2m_2}\right) g.$$

Решение

1. Поскольку цилиндры являются невесомыми, равнодействующая приложенных к ним сил в любой момент должна быть равна нулю. Так как трения между спицей и цилиндрами нет, спица действует на цилиндры в направлении, перпендикулярном спице, то есть в вертикальном. До столкновения цилиндров на них действуют только силы натяжения нитей и силы реакции со стороны спицы. Тогда условие равенства нулю равнодействующей приложенных к цилиндрам сил возможно, если участки нитей, соединяющие цилиндры с бусинкой и грузом, в любой момент ориентированы вертикально. Из этого следует, что столкновение цилиндров произойдёт в момент, когда бусинка, груз и цилиндры будут расположены практически на одной вертикали.

Обратим внимание, что скорость груза в любой момент направлена горизонтально. В момент столкновения цилиндров скорость бусинки также направлена горизонтально. Пусть $v_{\text{отн}}$ — ско-

рость относительного движения бусинки и груза в момент столкновения цилиндров. Определим $v_{\text{отн}}$ из закона сохранения механической энергии. К рассматриваемому моменту вертикальное перемещение бусинки направлено вниз и равно $L/2$, так как нити являются нерастяжимыми. Поскольку система замкнута в направлении спицы — её импульс в данном направлении равен нулю. Отсюда получим связь скоростей v_1 и v_2 бусинки и груза соответственно с величиной их относительной скорости $v_{\text{отн}}$ в момент столкновения цилиндров:

$$v_1 = \frac{m_2 v_{\text{отн}}}{m_1 + m_2}, \quad v_2 = \frac{m_1 v_{\text{отн}}}{m_1 + m_2} \implies E_k = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 m_2 v_{\text{отн}}^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

Запишем закон сохранения механической энергии:

$$E_k = \frac{m_1 m_2 v_{\text{отн}}^2}{2(m_1 + m_2)} = -\Delta W_p = \frac{m_1 g L}{2} \implies v_{\text{отн}}^2 = g L \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right).$$

Находим скорости v_1 и v_2 бусинки и груза соответственно непосредственно перед столкновением цилиндров:

$$v_1 = \sqrt{\frac{g L}{1 + m_1/m_2}}, \quad v_2 = \frac{m_1}{m_2} \sqrt{\frac{g L}{1 + m_1/m_2}}.$$

2. В момент столкновения цилиндров все силы, действующие на бусинку и груз, являются вертикальными. Поскольку груз может перемещаться только по горизонтали, его ускорение в рассматриваемый момент равно нулю.

Пусть a_1 — проекция ускорения бусинки в момент столкновения цилиндров на ось, направленную вертикально вверх. Из второго закона Ньютона для бусинки и груза получим:

$$2T_1 = m_1(g + a_1), \quad T_2 = T_1 + m_2 g,$$

откуда:

$$T_1 = \frac{m_1(g + a_1)}{2}, \quad T_2 = m_2 g + \frac{m_1(g + a_1)}{2}.$$

Таким образом, для решения задачи необходимо определить a_1 . Далее можно действовать разными способами.

Первый способ. Пусть $\vec{a}_б$ и $\vec{a}_г$ — ускорения бусинки и груза относительно лабораторной системы отсчёта, а $\vec{a}_{\text{отн}}$ — ускорение бусинки в системе отсчёта, связанной с грузом. Тогда ускорение бусинки можно представить в следующем виде:

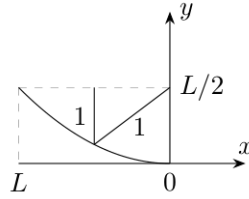
$$\vec{a}_б = \vec{a}_г + \vec{a}_{\text{отн}}.$$

Обратим внимание, что в рассматриваемый момент ускорение груза равняется нулю. Значит, в рассматриваемый момент ускорение бусинки в системе отсчёта, связанной с грузом, направлено вертикально вверх и равно a_1 . Дальнейшее решение задачи проведём в системе отсчёта, связанной с грузом. Непосредственно перед столкновением цилиндров относительная скорость бусинки и груза направлена горизонтально, значит:

$$a_1 = a_{\text{отн}} = \frac{v_{\text{отн}}^2}{\rho},$$

где ρ — радиус кривизны траектории бусинки при движении в системе отсчёта груза.

Проанализируем траекторию относительного движения бусинки и груза. В системе отсчёта груза введём систему координат xOy с началом в нижней точке траектории бусинки относительно груза (см. рис). Запишем условие постоянства длины нити 1:



$$L = \left(\frac{L}{2} - y\right) + \sqrt{\left(\frac{L}{2} - y\right)^2 + x^2} \implies y = \frac{x^2}{2L}.$$

Таким образом, траектория движения бусинки в системе отсчёта груза представляет собой параболу.

Определим радиус кривизны ρ в вершине параболы, используя аналогию со свободным полётом материальной точки в поле тяжести.

Пусть скорость материальной точки в некоторый момент равна v_0 и направлена горизонтально. Материальная точка движется в однородном поле тяжести с ускорением свободного падения g , направленным вертикально вниз. Введём систему координат xOy , где O — положение точки в рассматриваемый момент, ось x направлена горизонтально, а ось y направлена вертикально вниз. Тогда через прошедшее время t от рассматриваемого момента:

$$x = v_0 t, \quad y = \frac{gt^2}{2} \implies y = \frac{gx^2}{2v_0^2} = \frac{x^2}{2p}.$$

Величина p называется фокальным параметром параболы. Определим радиус кривизны ρ_0 траектории материальной точки в вершине параболы. Из второго закона Ньютона в рассматриваемый момент:

$$\frac{mv_0^2}{\rho_0} = mg \implies \rho_0 = \frac{v_0^2}{g} = p.$$

Вернёмся к определению радиуса кривизны траектории бусинки в системе отсчёта груза в момент столкновения цилиндров. Фокальный параметр параболы для траектории относительного движения бусинок равен L , поэтому радиус кривизны траектории относительного движения бусинок в рассматриваемый момент составляет:

$$\rho = L.$$

Примечание: Тот же результат может быть получен из непосредственного анализа кривой, задающей траекторию относительного движения бусинки и груза.

Рассмотрим произвольную кривую, заданную зависимостью $y(x)$. Пусть φ — угол наклона касательной к кривой. Тогда:

$$\frac{dy}{dx} = y' = \operatorname{tg} \varphi \implies \frac{d^2y}{dx^2} = y'' = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{d\varphi}{dx} = \frac{\varphi'}{\cos^2 \varphi}.$$

Радиус кривизны произвольной плоской кривой определяется выражением:

$$\rho = \left| \frac{dl}{d\varphi} \right|,$$

где dl — элемент длины кривой, а $d\varphi$ — угол между касательными к кривой на концах выделенного элемента. Но $dl = dx / \cos \varphi$, поэтому:

$$\rho = \left| \frac{1}{\cos \varphi} \frac{dx}{d\varphi} \right| = \left| \frac{1}{\varphi' \cos \varphi} \right| = \left| \frac{1}{y'' \cos^3 \varphi} \right|.$$

Но $1/\cos^2 \varphi = 1 + \operatorname{tg}^2 \varphi = 1 + y'^2$, поэтому:

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|}.$$

Применим полученное выражение в случае рассмотрения траектории движения бусинки относительно груза. Определим y' и y'' :

$$y' = \frac{x}{L}, \quad y'' = \frac{1}{L}.$$

Тогда в точке с координатой $x = 0$:

$$\rho = L.$$

Таким образом:

$$a_1 = \frac{v_{\text{отн}}^2}{L} = g \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right).$$

Второй способ. В рассматриваемый момент тангенциальное ускорение бусинки равно нулю, поэтому её ускорение a_1 определяется выражением:

$$a_1 = \frac{v_1^2}{\rho_1},$$

где ρ_1 — радиус кривизны траектории бусинки в рассматриваемый момент. Проанализируем траекторию бусинки в лабораторной системе отсчёта. Введём систему координат xOy с началом в нижней точке траектории бусинки. Направления координатных осей совпадают с введёнными на рисунке к первому способу решения. Центр масс системы не перемещается вдоль оси x , поэтому:

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0 \implies x_2 = -\frac{m_1 x_1}{m_2}.$$

Запишем условие постоянства длины нити 1:

$$L = \left(\frac{L}{2} - y_1 \right) + \sqrt{\left(\frac{L}{2} - y_1 \right)^2 + (x_1 - x_2)^2}.$$

Отсюда:

$$(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 (1 + m_1/m_2)^2 = 2Ly_1 \implies y_1(x_1) = \frac{x_1^2 (1 + m_1/m_2)^2}{2L}.$$

Таким образом, траектория движения бусинки в лабораторной системе отсчёта является параболой. Поиск радиуса кривизны в её вершине уже был осуществлён в рамках первого решения, поэтому:

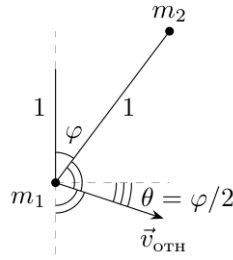
$$\rho_1 = \frac{L}{(1 + m_1/m_2)^2}.$$

Таким образом:

$$a_1 = \frac{v_1^2 (1 + m_1/m_2)^2}{L} = g \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right).$$

Третий способ. Пусть $\vec{a}_6$ и $\vec{a}_7$ — ускорения бусинки и груза относительно лабораторной системы отсчёта, а $\vec{a}_{\text{отн}}$ — ускорение бусинки в системе отсчёта, связанной с грузом. Тогда ускорение бусинки можно представить в следующем виде:

$$\vec{a}_6 = \vec{a}_7 + \vec{a}_{\text{отн}}.$$



Обратим внимание, что в рассматриваемый момент ускорение груза равняется нулю. Значит, в рассматриваемый момент ускорение бусинки в системе отсчёта, связанной с грузом, направлено вертикально вверх и равно a_1 . Дальнейшее решение задачи проведём в системе отсчёта, связанной с грузом. Рассмотрим условие постоянства длины нити 1. Пусть в некоторый момент участок нити 1, соединяющий бусинку с грузом, образует угол φ с вертикалью. Найдём угол θ между направлением скорости бусинки относительно груза и горизонтом. Поскольку скорости цилиндров направлены горизонтально, длина вертикального участка нити 1, соединяющего бусинку с цилиндром, изменяется со скоростью $u_{бц}$, равной:

$$u_{бц} = v_{отн} \sin \theta.$$

Длина участка нити 1, соединяющего бусинку с грузом, изменяется со скоростью $u_{бг}$, равной:

$$u_{бг} = v \cos(\varphi + 90 - \theta) = v_{отн} \sin(\theta - \varphi).$$

Поскольку длина нити 1 остаётся постоянной:

$$u_{бц} + u_{бг} = 0 \implies \sin \theta = \sin(\varphi - \theta) \implies \theta = \frac{\varphi}{2}.$$

Этот результат можно также получить из условия направления скорости бусинки вдоль биссектрисы внешнего угла между участками нити 1 (см. рис). Это является следствием оптического свойства параболы.

В рассматриваемый момент тангенциальное ускорение бусинки в рассматриваемой системе отсчёта равняется нулю, поэтому для проекции ускорения бусинки a_1 на ось, направленную вертикально вверх, имеем:

$$a_1 = -v_{отн} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{v_{отн} \dot{\varphi}}{2}.$$

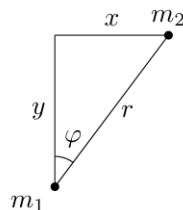
Найдём величину $\dot{\varphi}$. Поскольку в рассматриваемый момент расстояние между бусинкой и грузом равно $L/2$:

$$v_{отн} = -\frac{L\dot{\varphi}}{2} \implies \dot{\varphi} = -\frac{2v_{отн}}{L}.$$

Подставляя $\dot{\varphi}$ в выражение для a_1 , получим:

$$a_1 = \frac{v_{отн}^2}{L} = g \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right).$$

Четвёртый способ. Обозначим за y смещение бусинки в направлении «вертикально вниз», за x — расстояние между цилиндрами, а за r — длину участка нити 1, соединяющего груз и бусинку. Пусть в некоторый момент участок нити 1, соединяющий груз и бусинки, образует угол φ с вертикалью, тогда $y = x \operatorname{ctg} \varphi$ и $r = x / \sin \varphi$. Из условия нерастяжимости нити получим:



$$L = y + r = x \operatorname{ctg} \varphi + \frac{x}{\sin \varphi}.$$

Отсюда:

$$x = \frac{L \sin \varphi}{1 + \cos \varphi}, \quad y = \frac{L \cos \varphi}{1 + \cos \varphi}.$$

В рассматриваемый момент $\varphi = 0$. Далее нижний индекс 0 соответствует рассматриваемому моменту. В рассматриваемый момент проекция ускорения бусинки на ось, направленную вертикально вверх, определяется выражением $a_1 = -d^2 y_0 / dt^2$. Дифференцируя y по времени, получим:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{L\dot{\varphi}(\sin \varphi + \sin \varphi \cos \varphi - \sin \varphi \cos \varphi)}{(1 + \cos \varphi)^2} = -\frac{L \sin \varphi \dot{\varphi}}{(1 + \cos \varphi)^2}.$$

Продифференцируем по времени величину dy/dt :

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{L \sin \varphi \ddot{\varphi}}{(1 + \cos \varphi)^2} - \frac{2L \sin^2 \varphi \dot{\varphi}^2}{(1 + \cos \varphi)^3} - \frac{L \cos \varphi \dot{\varphi}^2}{(1 + \cos \varphi)^2}.$$

Поскольку в рассматриваемый момент $\varphi = 0$:

$$a_1 = \frac{L\dot{\varphi}_0^2}{4}.$$

Определим величину $\dot{\varphi}_0$. Для этого продифференцируем по времени выражение для x :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{L\dot{\varphi}(\cos \varphi + \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}{(1 + \cos \varphi)^2} = \frac{L\dot{\varphi}}{1 + \cos \varphi}.$$

В рассматриваемый момент $\varphi = 0$, а $dx/dt = -v_{\text{отн}}$. Тогда:

$$-v_{\text{отн}} = \frac{L\dot{\varphi}_0}{2} \implies \dot{\varphi}_0 = -\frac{2v_{\text{отн}}}{L}.$$

Таким образом:

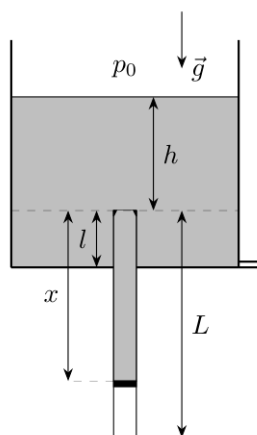
$$a_1 = \frac{v_{\text{отн}}^2}{L} = g \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right).$$

Подставляя a_1 в выражения для T_1 и T_2 , находим:

$$T_1 = m_1 g \left(1 + \frac{m_1}{2m_2} \right), \quad T_2 = \left(m_1 + m_2 + \frac{m_1^2}{2m_2} \right) g.$$

Задача 3 Из архива ЦПМК

В архиве ЦПМК 2011 года была обнаружена задача, в которой описывалось довольно странное устройство для экспериментов с идеальным газом.



Закрытая снизу тонкостенная цилиндрическая трубка длиной L , установленная вертикально, жёстко соединена с закреплённым цилиндрическим сосудом, ось которого также вертикальна, а диаметр во много раз превышает диаметр трубки (см. рис.). Верхняя часть трубки расположена на расстоянии l выше дна сосуда. В трубке без трения может перемещаться тонкий лёгкий герметичный поршень. Под поршнем находится воздух, который можно считать идеальным газом. В верхней части трубки расположены небольшие упоры, ограничивающие движение поршня вверх.

В стенке сосуда вблизи его дна проделано небольшое отверстие. С помощью тонкой трубочки через отверстие сосуд очень медленно наполняют ртутью, а затем так же медленно понижают уровень ртути в сосуде до его дна.

Далее везде h обозначает уровень ртути в сосуде относительно верхней части трубки, а x — расстояние между поршнем и упорами. Считайте, что в процессе изменения уровня ртути в сосуде температура воздуха под поршнем и атмосферное давление остаются постоянными.

Параметры установки: $L = 3,04$ м, $l = 0,04$ м, атмосферное давление p_0 равно гидростатическому давлению столба ртути высотой $h_0 = p_0/\rho g = 0,76$ м, где ρ — плотность ртути, а g — ускорение свободного падения. Величины p_0 , ρ и g считайте неизвестными.

Во всех пунктах задачи приведите как аналитические выражения, так и численные значения для ответов.

Изначально ртути в сосуде и над поршнем нет, а давление воздуха под поршнем превышает величину атмосферного давления. В пунктах 1–3 считайте, что когда уровень ртути в сосуде достиг максимального значения $h_{max} = 1,52$ м, расстояние между поршнем и упорами составило $x_{max} = 2,28$ м.

1. Рассмотрим процесс повышения уровня ртути в сосуде. При каком значении уровня h_1 ртути в сосуде поршень пришёл в движение?
2. Пусть уровень ртути в сосуде в процессе его повышения составил $h_1 + \Delta h$, где $0 < \Delta h \ll h_1$. Найдите возможные значения x_1 между поршнем и упорами.
3. На каком расстоянии x_2 до упоров будет находиться поршень, когда уровень ртути в сосуде понизится до его дна? Ответ обоснуйте.
4. Ртуть полностью откачали из сосуда и пространства над поршнем, после чего изменили количество воздуха под поршнем. Далее процессы повышения и понижения уровня в сосуде с помощью трубочки через отверстие повторили. Оказалось, что когда уровень ртути в сосуде достиг величины $h_{max} = 1,52$ м, расстояние между поршнем и упорами составило $x'_{max} = 1,52$ м. При каком значении уровня h_2 ртути в сосуде в процессе его понижения поршень достигает упоров?

Подсказка

Условие равновесия поршня — квадратное уравнение относительно x ; сравните, как растут с x давление газа (закон Бойля — Мариотта) и давление ртути, чтобы понять, какое из положений равновесия устойчиво. Поршень срывается к упорам, когда два положения равновесия сливаются (касание графиков).

Ответ

$$1) h_1 = \frac{(h_0 + h_{max} + x_{max})(L - x_{max})}{L} - h_0 = 380 \text{ мм}; \quad 2) x_1 = L - h_0 - h_1 = 1900 \text{ мм}; \quad 3) x_2 = \frac{L - h_0 + \sqrt{(L + h_0)^2 - 4(h_0 + h_{max} + x_{max})(L - x_{max})}}{2} = 1520 \text{ мм}; \quad 4) h_2 = 2\sqrt{(h_0 + h_{max} + x'_{max})(L - x'_{max})} \\ (L + h_0) \approx 1007 \text{ мм}.$$

Решение

1. Пусть Δp — отличие давления воздуха под поршнем от атмосферного в начале процесса. Поршень придёт в движение, когда давление ртути на поршень сравняется с избыточным давлением воздуха под поршнем, откуда:

$$p_0 + \rho g h_1 = p_0 + \Delta p \implies h_1 = \frac{\Delta p}{\rho g}.$$

Температура воздуха под поршнем может считаться постоянной. Поскольку нижняя часть трубы закрыта, количество воздуха под поршнем также будет оставаться постоянным. Тогда, если давление воздуха под поршнем обозначить за p_v , его зависимость от x определяется законом Бойля–Мариотта:

$$p_v V = \text{const} \implies p_v = \frac{(p_0 + \Delta p)L}{L - x}.$$

Пусть уровень ртути в сосуде равен h . Тогда давление p_p ртути на поршень составляет:

$$p_p = p_0 + \rho g(h + x).$$

В положении равновесия давление воздуха под поршнем равно давлению ртути на поршень, поэтому:

$$p_0 + \rho g(x + h) = \frac{(p_0 + \Delta p)L}{L - x}.$$

Когда уровень ртути в сосуде достигает максимального значения $h_{\max}$, величина $x = x_{\max}$, получаем:

$$\frac{\Delta p}{\rho g} = h_1 = \left(\frac{p_0}{\rho g} + x_{\max} + h_{\max} \right) \left(1 - \frac{x_{\max}}{L} \right) - \frac{p_0}{\rho g},$$

или с учётом $p_0/(\rho g) = h_0$:

$$h_1 = \frac{(h_0 + h_{\max} + x_{\max})(L - x_{\max})}{L} - h_0 = 380 \text{ мм}.$$

2. Перепишем условие равновесия поршня в следующем виде:

$$(h_0 + h + x)(L - x) = (h_0 + h_1)L.$$

Раскроем скобки и получим:

$$x^2 - (L - h_0 - h)x + (h_1 - h)L = 0.$$

Обратим внимание, что при $h > h_1$ свободный член полученного квадратного уравнения является отрицательным, что следует из теоремы Виета, а значит уравнение имеет ровно один положительный корень. Тогда, поскольку нахождение поршня выше упоров не является возможным, при $h > h_1$ поршень имеет единственное положение равновесия. Так как $\Delta h \ll h_1$, свободный член можно принять равным нулю. Сокращая решение $x = 0$, получим:

$$x_1 = L - h_0 - h_1,$$

или же:

$$x_1 = L - \frac{(h_0 + h_{\max} + x_{\max})(L - x_{\max})}{L} = 1900 \text{ мм}.$$

3. После того, как уровень ртути в сосуде окажется ниже верхней части трубы, положение равновесия поршня перестанет изменяться. Решим квадратное уравнение, получаемое из условия равновесия поршня, при $h = 0$:

$$x_{2(1,2)} = \frac{L - h_0 \pm \sqrt{(L - h_0)^2 - 4Lh_1}}{2} = 0,76 \text{ м}, 1,52 \text{ м}.$$

Таким образом, когда уровень ртути в сосуде понизится до практически нулевого, поршень имеет два положения равновесия и расположится в том из них, которое является устойчивым. Проанализируем оба найденных положения равновесия поршня на устойчивость.

Положение равновесия поршня является устойчивым, если при повышении расстояния между ним и упорами давление воздуха под поршнем становится выше, чем давление ртути на поршень. Если расстояние между поршнем и упорами увеличилось на малую величину Δx , то условия устойчивости положения равновесия поршня можно записать следующим образом:

$$p_0 + \rho g(h + x + \Delta x) < \frac{(p_0 + \Delta p)L}{L - x - \Delta x}.$$

Используя условие равновесия, получим:

$$\rho g \Delta x < \frac{(p_0 + \Delta p)L}{L - x - \Delta x} - (p_0 + \rho g(h + x)) = \frac{(p_0 + \Delta p)L}{L - x - \Delta x} - \frac{(p_0 + \Delta p)L}{L - x}.$$

С учётом малости Δx имеем:

$$\rho g \Delta x < \frac{(p_0 + \Delta p)L \Delta x}{(L - x - \Delta x)(L - x)} \approx \frac{(p_0 + \Delta p)L \Delta x}{(L - x)^2} \Rightarrow \rho g < \frac{(p_0 + \Delta p)L}{(L - x)^2}.$$

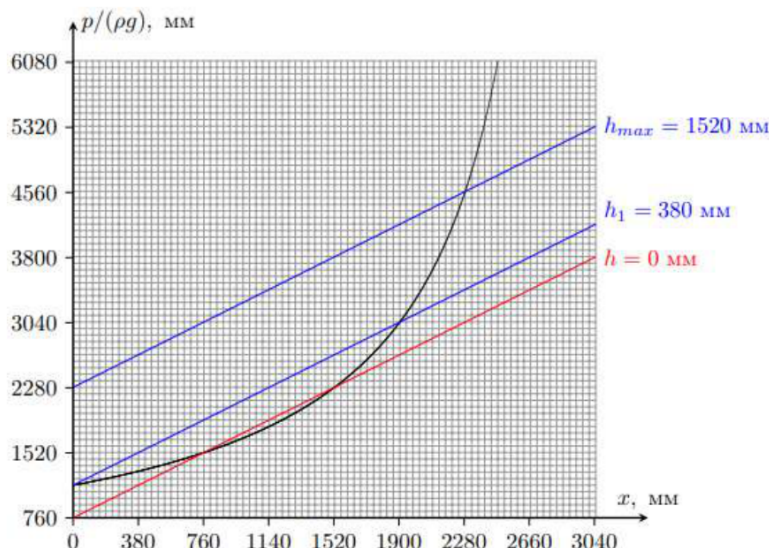
Определим значения x , при которых положения равновесия поршня является устойчивым:

$$L > x > L - \sqrt{\frac{(p_0 + \Delta p)L}{\rho g}} = L - \sqrt{(h_0 + h_1)L} = x_{\text{кр}} \approx 1178 \text{ мм}.$$

Таким образом, положение равновесия $x_{2(1)} = 760$ мм является неустойчивым, а $x_{2(2)} = 1520$ мм — устойчивым. Отметим, что при $h = 0$ положение $x = 0$ также является положением равновесия, поскольку для данного положения давление воздуха под поршнем будет выше, чем давление ртути на поршень, равное атмосферному. Однако, пока поршень не окажется на расстоянии $x = x_{\text{кр}}$ от упоров, он всегда будет располагаться в устойчивом положении равновесия. При этом величина x монотонно возрастает с увеличением уровня h ртути в сосуде. Поскольку найденная при $h = 0$ величина $x_{2(2)} > x_{\text{кр}}$, то поршень в процессе понижения уровня ртути в сосуде всегда расположен в положении устойчивого равновесия и не может его покинуть. Таким образом, конечному положению поршня соответствует следующая величина x_2 :

$$x_2 = \frac{L - h_0 + \sqrt{(L + h_0)^2 - 4(h_0 + h_{\text{max}} + x_{\text{max}})(L - x_{\text{max}})}}{2} = 1520 \text{ мм}.$$

Примечание: Исследование на устойчивость положений равновесия поршня можно осуществить не только аналитически, но и графически. Для это построим график зависимости $p_{\text{в}}(x)$ (чёрная линия на рис.), а поверх него — прямые $p_{\text{р}}(x)$ при различных значениях h , где давления измеряются в миллиметрах ртутного столба. Точки пересечения графиков функций $p_{\text{в}}(x)$ и $p_{\text{р}}(x)$ соответствуют положениям равновесия поршня. Если вблизи точки пересечения с увеличением x функция $p_{\text{в}}(x)$ возрастает на большую величину, чем функция $p_{\text{р}}(x)$, то при малом смещении поршня равнодействующая приложенных к нему сил будет направлена противоположно смещению поршня, и, следовательно, положения равновесия будет являться устойчивым. Если же вблизи точки пересечения с увеличением x функция $p_{\text{в}}(x)$ возрастает на меньшую величину, чем функция $p_{\text{р}}(x)$, то при малом смещении поршня равнодействующая приложенных к нему сил будет направлена вдоль смещения поршня, и, следовательно, положения равновесия поршня будет являться неустойчивым. Из рисунка видно, что при $h > h_1$ все положения равновесия поршня являются устойчивыми, а положение равновесия $x = 0$ при $h = h_1$ является неустойчивым. Если мы рассмотрим случай $h = 0$ (красная прямая на графике), то точка пересечения $x_{2(1)} = 760$ мм соответствует неустойчивому, а $x_{2(2)} = 1520$ мм — устойчивому положению равновесия.



4. Используя результаты решения первого пункта, определим величину h_1 , при которой поршень приходит в движение:

$$h_1 = \frac{(h_0 + h_{max} + x_{max})(L - x_{max})}{L} - h_0 = 1140 \text{ мм.}$$

Запишем условие равновесия поршня:

$$x^2 - x(L - h_0 - h) + L(h_1 - h) = 0.$$

Решению $x = 0$ соответствует величина $h = h_1$. Однако при решении второго пункта мы получили, что при $h = h_1$ у поршня существует второе положение равновесия на расстоянии x_1 от упоров, равном:

$$x_1 = L - \frac{(h_0 + h_{max} + x_{max})(L - x_{max})}{L} = 1140 \text{ мм.}$$

Данное положение является устойчивым, что можно показать, используя критерий устойчивости положения равновесия, полученный при решении четвёртого пункта:

$$x > L - \sqrt{(h_0 + h_1)L} = x_{кр} \approx 637 \text{ мм.}$$

Данное условие выполнено при $x = x_1$, поэтому в процессе понижения уровня ртути в сосуде поршень не достигает упоров при $h = h_1$.

При последующем понижении уровня ртути в сосуде у поршня есть два положения равновесия, одно из которых является устойчивым, а другое — неустойчивым. Пока расстояние x между поршнем и упорами удовлетворяет условию $x > x_{кр}$, поршень располагается в положении устойчивого равновесия. Когда расстояние между поршнем и упорами станет равно $x = x_{кр}$, два положения равновесия поршня, одно из которых является устойчивым, а второе — неустойчивым, совпадут и станут единым положением неустойчивого равновесия по отношению к смещению в сторону упоров. Данное положение соответствует касанию на графиков зависимостей $p_v(x)$ и $p_p(x)$, приведённых в примечании к решению четвёртого пункта задачи. Из этого же графика видна неустойчивость данного положения равновесия поршня по отношению к смещению в сторону упоров.

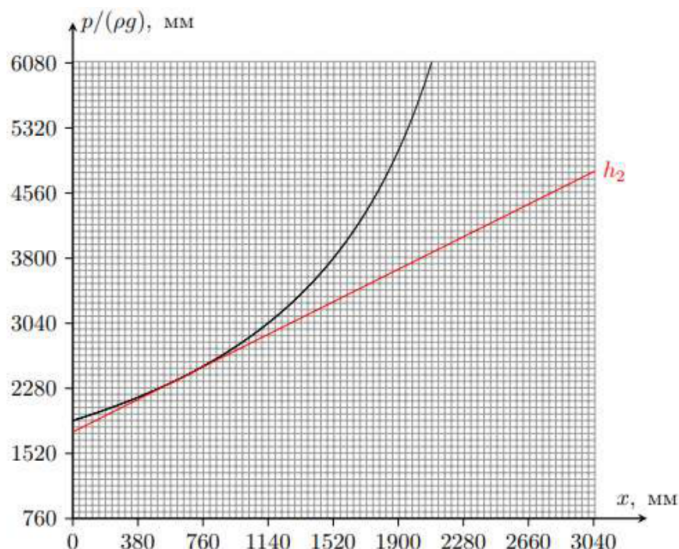
Таким образом, если при некотором значении $h = h_2$ поршень оказывается в положении $x = x_{кр}$, то при данном значении h во всех положениях, кроме $x = x_{кр}$, давление воздуха под поршнем будет больше, чем давление ртути на поршень (см. рис. ниже), поэтому поршень скачкообразно переместится в сторону упоров и при дальнейшем понижении уровня ртути в сосуде от них не оторвётся.

Учтём, что касание графиков соответствует наличию единственного корня у квадратного уравнения, получаемого из условия равновесия поршня. Воспользуемся теоремой Виета:

$$2x_{\text{кр}} = L - h_0 - h_2.$$

После подстановки h_1 в выражение для $x_{\text{кр}}$ находим:

$$h_2 = 2\sqrt{(h_0 + h_{\text{max}} + x_{\text{max}})(L - x_{\text{max}})} - (L + h_0) \approx 1007 \text{ мм}.$$



Задача 4 Полёты стержня

В распоряжении экспериментатора Глюка были закреплённая равномерно заряженная по поверхности зарядом Q непроводящая сфера радиусом R и **очень длинный** тонкий прямолинейный непроводящий стержень массой m , заряженный равномерно по длине с линейной плотностью заряда λ . Известно, что заряды стержня и сферы были одноимёнными.

В первой серии экспериментов Глюк помещал стержень на поверхность сферы таким образом, что стержень касался поверхности сферы своей серединой.

Сначала Глюк отпустил стержень из состояния покоя, и когда расстояние между центрами сферы и стержня достигло неизвестной величины $l > R$, стержень двигался со скоростью $u_0 = \sqrt{Q\lambda/(2\pi\epsilon_0 m)}$ (см. рис. 1).

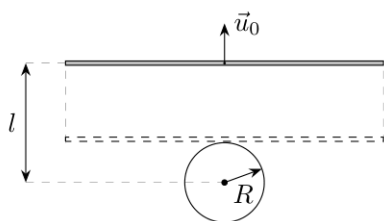


Рис. 1

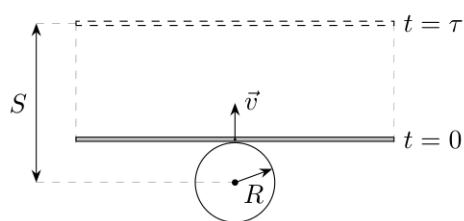


Рис. 2

Затем Глюк стал приводить стержень в движение так, что он начинал поступательное движение с различными значениями начальной скорости v в направлении, перпендикулярном стержню и лежащем в плоскости, содержащей стержень и центр сферы. Глюк получил зависимость от начальной скорости v стержня времени τ , прошедшего от момента старта, через которое расстояние между центрами сферы и стержня достигало неизвестной величины $S > R$

(см. рис. 2). График полученной зависимости приведён ниже на рис. 3 в координатах $y(x)$, где $y = \tau/\tau_0$, $x = v/v_0$, а величины τ_0 и v_0 определяются выражениями:

$$\tau_0 = R\sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 m}{Q\lambda}}, \quad v_0 = \sqrt{\frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon_0 m}}.$$

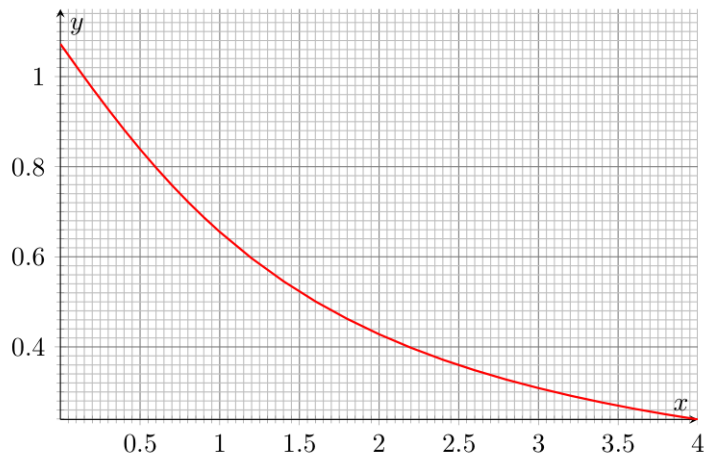


Рис. 3

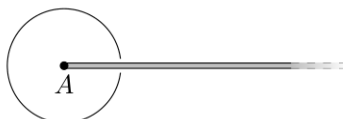


Рис. 4

Для второго эксперимента Глюк проделал в поверхности сферы небольшое отверстие, поместил конец A стержня внутрь сферы таким образом, что он оказался в центре сферы (см. рис. 4) и отпустил стержень без начальной скорости. Трения между стержнем и отверстием нет.

Во всех экспериментах стержни двигались поступательно. Силой сопротивления воздуха и гравитацией можно пренебречь. Величины S и l во много раз меньше длины стержня.

Для второго эксперимента определите:

1. время T_1 , прошедшее от момента старта, через которое конец A стержня оказался на поверхности сферы, а также скорость стержня V_1 в этот момент времени;
2. скорость V_2 стержня в момент, когда его конец A находился на расстоянии l от центра сферы;
3. время T , прошедшее от момента старта, через которое конец A стержня оказался на расстоянии S от центра сферы.

Подсказка

Сила, действующая на полубесконечный стержень, равна $\lambda\varphi$, где φ — потенциал поля сферы на его конце; внутри сферы она постоянна. Сравните её с силой на бесконечный стержень в первом опыте: при одинаковых расстояниях она ровно вдвое меньше, и движения подобны.

Ответ

1) $T_1 = R\sqrt{\frac{8\pi\epsilon_0 m}{Q\lambda}}$, $V_1 = \sqrt{\frac{Q\lambda}{2\pi\epsilon_0 m}}$; 2) $V_2 = \sqrt{\frac{3Q\lambda}{4\pi m\epsilon_0}}$; 3) $T = R(1 + y(2))\sqrt{\frac{8\pi\epsilon_0 m}{Q\lambda}} \approx 7,17 R\sqrt{\frac{m\epsilon_0}{Q\lambda}}$, где $y(2) \approx 0,43$ — по графику.

Решение

1. Определим силу отталкивания F_{r2} между сферой и стержнем во втором эксперименте в зависимости от расстояния r_A между концом A стержня и центром сферы.

Первый способ. Воспользуемся методом виртуальных перемещений:

$$F_{r2} = -\frac{dW_p}{dr_A},$$

где r_A — расстояние между центром сферы и концом стержня A . Если расстояние между центром сферы и концом стержня A изменить на величину dr_A , то изменение потенциальной энергии будет равно изменению потенциальной элемента стержня длиной dr_A при перемещении из положения, соответствующего концу стержня A в положение, соответствующее концу стержня B . Тогда для dW_p имеем:

$$dW_p = \lambda(\varphi_B - \varphi_A) dr_A,$$

где φ_A и φ_B — потенциалы электростатического поля сферы на концах A и B стержня соответственно. При этом $\varphi_B \approx 0$, поскольку стержень очень длинный. Таким образом:

$$F_{r2} = \lambda\varphi_A.$$

Поскольку сфера заряжена равномерно по поверхности, внутри неё напряжённость электростатического поля равна нулю, а снаружи совпадает с полем точечного заряда Q , расположенного в её центре. Таким образом:

$$\varphi_A(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} & \text{при } r_A \leq R; \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_A} & \text{при } r_A > R, \end{cases} \implies F_{r2}(r_A) = \begin{cases} \frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} & \text{при } r_A \leq R; \\ \frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon_0 r_A} & \text{при } r_A > R. \end{cases}$$

Второй способ. Напряжённость E_r электростатического поля сферы внутри равна нулю, а снаружи совпадает с напряжённостью электростатического поля точечного заряда Q , расположенного в центре сферы, поэтому зависимость $E_r(r)$ имеет следующий вид:

$$E_r(r) = \begin{cases} 0 & \text{при } r \leq R; \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & \text{при } r > R. \end{cases}$$

Поскольку длина стержня во много раз больше радиуса сферы R , то будем считать её бесконечной. Тогда для силы F_{r2} имеем:

$$F_{r2} = \int_{r_A}^{\infty} E_r(r) \lambda dr.$$

Если конец A стержня расположен внутри сферы, то сила, действующая на расположенную внутри сферы часть стержня со стороны электростатического поля сферы, равна нулю. Отсюда:

$$F_{r2} = \frac{\lambda Q}{4\pi\epsilon_0} \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{\lambda Q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Если же конец A стержня расположен вне сферы:

$$F_{r2} = \frac{\lambda Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{\lambda Q}{4\pi\epsilon_0 r_A}.$$

Таким образом:

$$F_{r2}(r_A) = \begin{cases} \frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} & \text{при } r_A \leq R; \\ \frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon_0 r_A} & \text{при } r_A > R. \end{cases}$$

Обратим внимание, что стержень движется с постоянным ускорением $a = Q\lambda/(4\pi\epsilon_0 mR)$, пока его конец A расположен внутри сферы. Поскольку стержень начинает движение без начальной скорости, для времени движения T_1 и скорости стержня V_1 в момент вылета из сферы имеем:

$$T_1 = \sqrt{\frac{2R}{a}}, \quad V_1 = aT_1 = \sqrt{2aR},$$

или:

$$T_1 = R\sqrt{\frac{8\pi\epsilon_0 m}{Q\lambda}}, \quad V_1 = \sqrt{\frac{Q\lambda}{2\pi\epsilon_0 m}}.$$

2. После вылета стержня из сферы его движение происходит в силовом поле, обратно пропорциональном расстоянию от его конца A до центра сферы. Пусть $W_2(r_A)$ — потенциальная энергия взаимодействия стержня со сферой во втором эксперименте. Определим квадрат скорости стержня $V^2(r)$ при расстоянии r_A между его концом A и центром сферы:

$$\frac{mV^2(r_A)}{2} + W_2(r_A) = \frac{mV_1^2}{2} + W_2(R) \implies V^2(r_A) = V_1^2 + \frac{2(W_2(R) - W_2(r_A))}{m}.$$

Тогда для скорости V_2 имеем:

$$V_2 = V(l) = \sqrt{V_1^2 + \frac{2(W_2(R) - W_2(l))}{m}}.$$

Для определения разности $W_2(R) - W_2(l)$ рассмотрим первый эксперимент. Сила взаимодействия между сферой и стержнем равна силе взаимодействия стержня с точечным зарядом Q , расположенным в центре сферы. Пусть r_C — расстояние между центрами стержня и сферы. Поскольку стержень очень длинный — его поле можно вычислить как поле бесконечного стержня. Из теоремы Гаусса получим:

$$\Phi = 2\pi r_C L E_r(r) = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \implies E_r(r_C) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r_C}.$$

Для силы взаимодействия между стержнем и сферой в первом эксперименте получим:

$$F_{r1}(r_C) = \frac{Q\lambda}{2\pi\epsilon_0 r_C}.$$

Обратим внимание, что сила взаимодействия стержня со сферой в первом эксперименте вдвое больше силы взаимодействия стержня со сферой во втором эксперименте при одинаковых значениях r_A и r_C . Тогда если $W_1(r_C)$ — потенциальная энергия взаимодействия стержня со сферой в первом эксперименте, имеем:

$$W_1(R) - W_1(l) = 2(W_2(R) - W_2(l)).$$

При этом из закона сохранения энергии в первом эксперименте имеем:

$$\frac{mu_0^2}{2} = W_1(R) - W_1(l) = 2(W_2(R) - W_2(l)) \implies \frac{2(W_2(R) - W_2(l))}{m} = \frac{u_0^2}{2}.$$

Таким образом:

$$V_2^2 = V_1^2 + \frac{u_0^2}{2},$$

откуда:

$$V_2 = \sqrt{\frac{3Q\lambda}{4\pi m\epsilon_0}}.$$

3. Пусть t — время, отсчитываемое от момента вылета стержня из сферы во втором эксперименте, через которое конец A стержня оказывается на расстоянии S от центра сферы. При этом возможны два решения, построенных на различных рассуждениях.

Первое решение. Рассмотрим движение стержня во втором эксперименте после вылета из сферы. Силовые поля, в которых стержни движутся в первом и втором экспериментах, подобны друг другу и отличаются в два раза. Это означает, что если отношение квадратов начальных скоростей $v^2/V_1^2 = 2$, то для любого $r = r_A = r_C$ соотношение $v_1^2(r)/V^2(r) = 2$ будет сохраняться, где $v_1(r)$ — скорость стержня в первом эксперименте. Действительно:

$$v_1^2(r) = v^2 + \frac{2(W_1(R) - W_1(r))}{m} = 2V_1^2 + \frac{4(W_2(R) - W_2(r))}{m} = 2V^2(r).$$

Тогда во втором эксперименте любой бесконечно малый отрезок dr проходится за время dt , в $\sqrt{2}$ раз большее времени $d\tau$, за которое тот же отрезок dr проходится стержнем в первом эксперименте. Таким образом:

$$t = \sqrt{2} \tau(\sqrt{2} V_1) = \sqrt{2} \tau_0 y(\sqrt{2} V_1/v_0).$$

Второе решение. Рассмотрим движение стержня во втором эксперименте после вылета из сферы. Силовые поля, в которых стержни движутся в первом и втором экспериментах, подобны друг другу и отличаются в два раза. Обратим внимание, что график зависимости $y(x)$, описывающий зависимость $\tau(v)$ в первом эксперименте, не изменяет свою форму при изменении параметров Q , λ , m и R . Если величину произведения $Q\lambda$ уменьшить в два раза, то зависимость $y(x)$ описывает зависимость времени t от скорости стержня V_1 на поверхности сферы, где $y = t/t_0$ и $x = V_1/V_0$, а $t_0 = \sqrt{2} \tau_0$ и $V_0 = v_0/\sqrt{2}$. Тогда для времени t имеем:

$$t = t_0 y(V_1/V_0) = \sqrt{2} \tau_0 y(\sqrt{2} V_1/v_0).$$

Определим координату x на графике, приведённом для первой серии экспериментов:

$$x_1 = \frac{\sqrt{2} V_1}{v_0} = 2.$$

При этом $y(2) \approx 0,43$. Тогда имеем:

$$t = Ry(2) \sqrt{\frac{8\pi\epsilon_0 m}{Q\lambda}}.$$

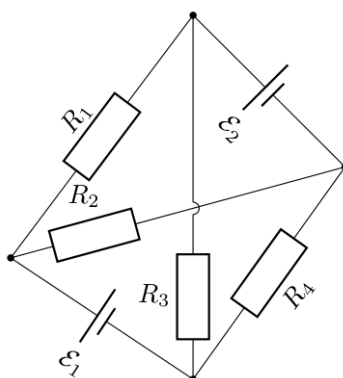
Полное время движения стержня T складывается из T_1 и t , поэтому:

$$T = R(1 + y(2)) \sqrt{\frac{8\pi\epsilon_0 m}{Q\lambda}},$$

или же:

$$T \approx 7,17 \cdot R \sqrt{\frac{m\epsilon_0}{Q\lambda}} \approx 2,02 \cdot R \sqrt{\frac{m}{kQ\lambda}}.$$

Задача 5 Электротетраэдр



Электрическая цепь представляет собой тетраэдр, в двух противоположных рёбрах которого находятся первый и второй идеальные источники постоянного напряжения с ЭДС $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ соответственно. В остальных рёбрах расположены четыре резистора R_1 , R_2 , R_3 и R_4 (см. рис.). Значения ЭДС источников и сопротивление одного из резисторов известны: $\mathcal{E}_1 = 6$ В, $\mathcal{E}_2 = 12$ В, $R_2 = 3$ Ом. Величина силы тока через первый источник равна $I_1 = 1$ А и не изменяется при смене полярности подключения этого источника. Величина силы тока через второй источник при указанной на рисунке полярности равна $I_2 = 2$ А. Сопротивлением соединительных проводов можно пренебречь.

1. Чему будет равна величина силы тока через второй источник, если полярность первого источника изменить?
2. Найдите величину силы тока через второй источник, если: а) первый источник удалить из цепи; б) первый источник заменить перемычкой с нулевым сопротивлением.
3. Чему равны сопротивления резисторов R_1 , R_3 и R_4 ?

Подсказка

Заменив всё, кроме первого источника, эквивалентным источником, поймите, когда ток через первый источник не зависит от его полярности: ЭДС эквивалентного источника должна быть нулевой, то есть мост сбалансирован. Тогда источники «не чувствуют» друг друга.

Ответ

1) $I'_2 = 2$ А; 2) а) 2 А, б) 2 А; 3) $R_1 = R_4 = 6$ Ом, $R_3 = 12$ Ом.

Решение

1. Первое решение. Для определения величины силы тока, текущего через первый источник, воспользуемся методом эквивалентного источника. Всю оставшуюся часть тетраэдра, подключённую к выводам A и B первого источника, можно заменить одним эквивалентным источником с внутренним сопротивлением $r_{0(1)}$ и ЭДС $\mathcal{E}_{0(1)}$. При этом эквивалентная схема для определения силы тока, текущего через первый источник, будет выглядеть так, как показано на рис. 1.

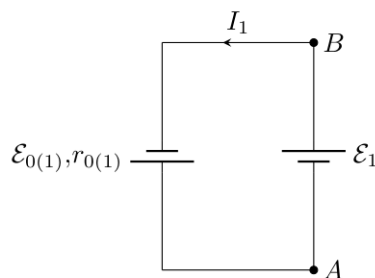


Рис.1

Сразу найдём сопротивление эквивалентного источника $r_{0(1)}$, подключенного к узлам A и B . Для этого заменим второй источник идеальной перемычкой и рассчитаем сопротивление моста между узлами A и B :

$$r_{0(1)} = r_{AB} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}.$$

Величина силы тока I_1 , текущего через первый источник, определяется выражением:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_{0(1)} + \mathcal{E}_1}{r_{0(1)}}.$$

Пусть верхний индекс $(-)$ соответствует величине силы тока через источник при изменённой на противоположную полярности его подключения. Тогда:

$$I_1^- = \frac{\mathcal{E}_{0(1)} - \mathcal{E}_1}{r_{0(1)}}.$$

Из данного выражения видно, что независимость от полярности подключения первого источника величины силы текущего через него тока возможно, если $\mathcal{E}_{0(1)} = 0$. Поймём, при каком условии это возможно. ЭДС $\mathcal{E}_{0(1)}$ эквивалентного источника равна показаниям идеального вольтметра, подключённого в цепь к узлам A и B вместо первого источника. Показания вольтметра будут равны нулю, если мост, составленный из резисторов с сопротивлениями R_1 , R_2 , R_3 и R_4 будет сбалансирован, откуда получим связь между сопротивлениями резисторов:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}.$$

Таким образом, сила тока, текущего через первый источник, равна $I_1 = \mathcal{E}_1 / r_{0(1)}$.

Теперь определим силу тока, текущего через второй источник, вновь используя метод эквивалентного источника. Всю оставшуюся часть тетраэдра (включая первый источник), подключённую к выводам C и D второго источника, заменим эквивалентным источником с внутренним сопротивлением $r_{0(2)}$ и ЭДС $\mathcal{E}_{0(2)}$. При этом эквивалентная схема для определения силы тока, текущего через второй источник, будет выглядеть так, как показано на рис. 2.

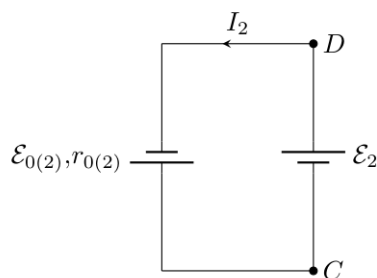


Рис.2

Величина силы тока I_2 , текущего через второй источник, определяется выражением:

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_{0(2)}}{r_{0(2)}}.$$

Обозначим силу тока, текущего через второй источник при изменённой полярности подключения первого источника, за I'_2 . Поскольку $\mathcal{E}_{0(2)} \sim \mathcal{E}_1$, величина I'_2 определяется выражением:

$$I'_2 = \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_{0(2)}}{r_{0(2)}}.$$

Сразу найдём сопротивление эквивалентного источника $r_{0(2)}$, подключённого к узлам C и D . Для этого заменим первый источник идеальной перемычкой и рассчитаем сопротивление моста между узлами C и D :

$$r_{0(2)} = r_{CD} = \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}.$$

ЭДС $\mathcal{E}_{0(2)}$ эквивалентного источника равна показаниям идеального вольтметра, подключённого в цепь к узлам C и D вместо второго источника. Показания вольтметра будут равны нулю, поскольку мост является сбалансированным и для подключения вольтметра вместо второго источника. Действительно:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \implies \frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4}.$$

Таким образом, величина силы тока, текущего через второй источник и равная $I_2 = \mathcal{E}_2 / r_{0(2)}$, не зависит от полярности подключения первого источника, а значит:

$$I'_2 = I_2 = 2 \text{ А}.$$

Второе решение. Воспользуемся методом наложения токов. Будем искать силы токов в ветвях цепи как суперпозицию сил токов, текущих в данных ветвях под действием одного источника, при условии, что другой источник в силу его идеальности заменён идеальной перемычкой.

Пусть перемычкой заменён второй источник. Обозначим силы токов, текущих через первый и второй источники при этом, за $I_{1(1)}$ и $I_{2(1)}$ соответственно (см. рис. 3). Тогда при смене полярности подключения первого источника направление тока $I_{1(1)}$, текущего через него, изменится на противоположное, а величина силы тока останется неизменной.

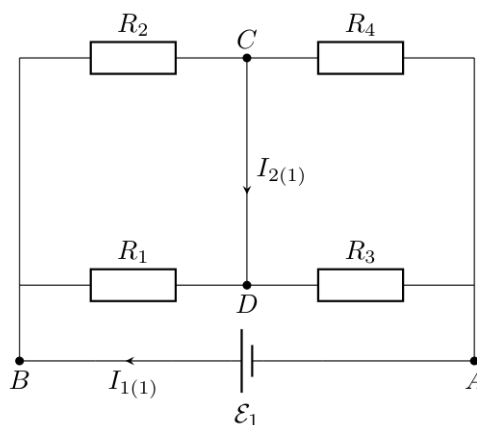


Рис.3

Теперь перемычкой заменим первый источник. Обозначим силы токов, текущих через первый и второй источники при этом, за $I_{1(2)}$ и $I_{2(2)}$ соответственно (см. рис. 4).

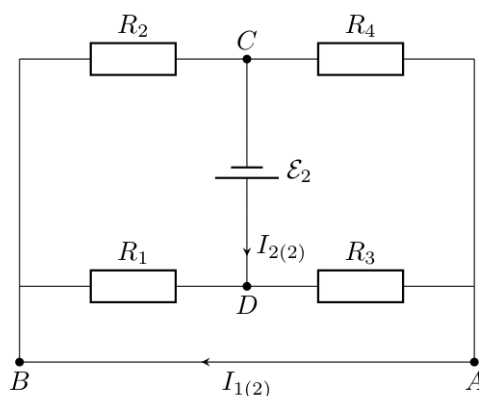


Рис.4

Если сила тока $I_{1(2)}$, текущего в перемычке под действием второго источника, не равна нулю, то сохранение величины силы полного тока через первый источник при смене его полярности невозможно. Значит, сила тока $I_{1(2)}$, текущего в перемычке AB под действием второго источника, равна нулю. Это возможно, только если мост является сбалансированным. Тогда имеем следующее соотношение между сопротивлениями:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}.$$

Обратим внимание, что данное условие также является условием балансировки моста, к которому подключён первый источник, когда второй заменён перемычкой CD . Значит, сила тока $I_{2(1)}$, текущего в перемычке CD под действием первого источника, также равна нулю. Отсюда можно сделать вывод, что силы токов, текущих через первый и второй источники, определяются только величинами ЭДС соответствующих источников и полярностями их подключений. Таким образом, сила тока I'_2 , текущего через второй источник при смене полярности подключения первого источника, равна:

$$I'_2 = I_2 = 2 \text{ A}.$$

Третье решение. Расставим в исходной схеме токи с учётом закона сохранения заряда. В данной схеме есть 3 независимых тока, поэтому достаточно ввести лишь 3 силы тока I_1 , I_2 и I_3 (см. рис. 5).

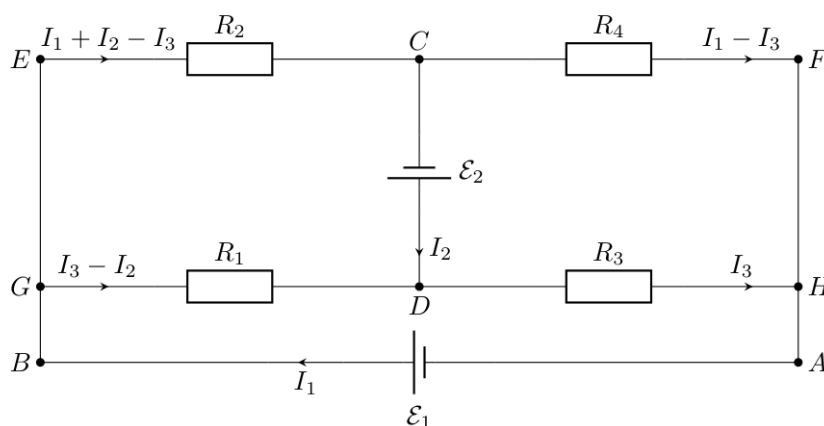


Рис.5

Применим второе правило Кирхгофа к контуру $CDGE$:

$$\mathcal{E}_2 = I_1 R_2 + I_2 (R_1 + R_2) - I_3 (R_1 + R_2).$$

Применим второе правило Кирхгофа к контуру $CDHF$:

$$\mathcal{E}_2 = I_3(R_3 + R_4) - I_1 R_4 \implies I_3 = \frac{I_1 R_4 + \mathcal{E}_2}{R_3 + R_4}.$$

Применим второе правило Кирхгофа к контуру $ABGDH$:

$$\mathcal{E}_1 = I_3(R_1 + R_3) - I_2 R_1.$$

Исключая I_3 , получим следующую систему уравнений относительно I_1 и I_2 :

$$\begin{cases} \mathcal{E}_1 = \frac{(I_1 R_4 + \mathcal{E}_2)(R_1 + R_3)}{R_3 + R_4} - I_2 R_1; \\ \mathcal{E}_2 = I_1 R_2 + I_2(R_1 + R_2) - \frac{(I_1 R_4 + \mathcal{E}_2)(R_1 + R_2)}{R_3 + R_4}. \end{cases}$$

Выразим I_2 из первого уравнения системы и подставим во второе:

$$\mathcal{E}_2 = I_1 R_2 - \frac{I_1 R_4(R_1 + R_2)}{R_3 + R_4} - \frac{\mathcal{E}_2(R_1 + R_2)}{R_3 + R_4} + \frac{I_1 R_4(R_1 + R_2)(R_1 + R_3)}{R_1(R_3 + R_4)} + \frac{\mathcal{E}_2(R_1 + R_2)(R_1 + R_3)}{R_1(R_3 + R_4)} - \frac{\mathcal{E}_1(R_1 + R_2)}{R_1}.$$

Отсюда:

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_4} \right) = I_1 \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} \right).$$

Аналогично выразим I_1 из первого уравнения системы и подставим во второе:

$$\mathcal{E}_2 = I_2(R_1 + R_2) - \frac{(\mathcal{E}_1 + I_2 R_1)(R_1 + R_2)}{R_1 + R_3} + \frac{(\mathcal{E}_1 + I_2 R_1)(R_3 + R_4)R_2}{R_4(R_1 + R_3)} - \frac{\mathcal{E}_2 R_2}{R_4}.$$

Отсюда:

$$\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_1 \left(\frac{R_4}{R_2 + R_4} - \frac{R_3}{R_1 + R_3} \right) = I_2 \left(\frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} \right).$$

Рассмотрим выражение для силы тока I_1 . Поскольку при изменении полярности подключения первого источника величина силы тока, текущего через него, не изменяется, коэффициент при $\mathcal{E}_2$ равен нулю. Отсюда:

$$\frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{R_3}{R_3 + R_4} \implies \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}.$$

Обратим внимание, что в выражении для силы тока I_2 коэффициент перед $\mathcal{E}_1$ также равен нулю. Действительно:

$$\frac{R_4}{R_2 + R_4} - \frac{R_3}{R_1 + R_3} = \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{(R_2 + R_4)(R_1 + R_3)} = 0.$$

Таким образом, величина силы тока I'_2 , текущего через второй источник при смене полярности подключения первого источника, равна:

$$I'_2 = I_2 = 2 \text{ A}.$$

2. Первое решение. Величины сил токов I_{2a} и I_{26} в случаях «а» и «б» соответственно будут определяться сопротивлением моста, подключенного к выводам C и D второго источника:

$$I_{2a} = \frac{\mathcal{E}_2}{r_a}, \quad I_{26} = \frac{\mathcal{E}_2}{r_6}.$$

Поскольку мост является сбалансированным, удаление перемычки AB не приведёт к изменению сопротивления моста между узлами C и D . Тогда сопротивления моста r_a и r_6 будут одинаковыми и равными сопротивлению эквивалентного источника $r_{0(2)}$, найденному при решении первого пункта, т. е. $I_{2a} = I_{26}$. Тогда, поскольку $I_2 = \mathcal{E}_2/r_{0(2)}$:

$$I_{2a} = I_{26} = I_2 = 2 \text{ A}.$$

Второе решение. Величины сил токов I_{2a} и $I_{2б}$ в случаях «а» и «б» соответственно будут определяться сопротивлением моста, подключенного к выводам C и D второго источника:

$$I_{2a} = \frac{\mathcal{E}_2}{r_a}, \quad I_{2б} = \frac{\mathcal{E}_2}{r_б}.$$

Поскольку мост является сбалансированным, удаление перемычки AB не приведёт к изменению сопротивления моста между узлами C и D . Тогда сопротивления моста r_a и $r_б$ будут одинаковыми, значит $I_{2a} = I_{2б}$. Из решения первого пункта следует:

$$I_1 = I_{1(1)}, \quad I_2 = I_{2(2)}.$$

Тогда замена первого источника перемычкой не изменит величину силу тока I_2 , поскольку величина $I_{2(2)}$ найдена для схемы, которую предлагается рассмотреть в случае «б» (см. рис. 4). Таким образом:

$$I_{2a} = I_{2б} = I_2 = 2 \text{ A}.$$

Третье решение. Величина силы тока, текущего через источник в исходной схеме, определяется выражением:

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}_2}{\frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}}.$$

Величины сил токов I_{2a} и $I_{2б}$ в случаях «а» и «б» соответственно будут определяться сопротивлением моста, подключенного к выводам C и D второго источника:

$$I_{2a} = \frac{\mathcal{E}_2}{r_a}, \quad I_{2б} = \frac{\mathcal{E}_2}{r_б}.$$

Сопротивление $r_б$ определяется выражением:

$$r_б = \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3},$$

откуда следует, что $I_{2б} = I_2$. Поскольку $R_1 R_4 = R_2 R_3$, при подключении второго источника к узлам C и D мост является сбалансированным при наличии перемычки AB . Тогда удаление перемычки AB не изменит сопротивления между узлами C и D , т. е. $r_a = r_б$. Таким образом:

$$I_{2a} = I_{2б} = I_2 = 2 \text{ A}.$$

3. Силы токов I_1 и I_2 через первый и второй источники соответственно, определяются выражениями:

$$\mathcal{E}_1 = I_1 \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} \right), \quad \mathcal{E}_2 = I_2 \left(\frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} \right).$$

Введём два обозначения:

$$R_1 = k R_2, \quad R_4 = \alpha R_2.$$

Тогда $R_3 = \alpha k R_2$, и для сил токов I_1 и I_2 , текущих через первый и второй источники соответственно, имеем:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{R_2} \cdot \frac{1+k}{k(1+\alpha)}, \quad I_2 = \frac{\mathcal{E}_2}{R_2} \cdot \frac{1+\alpha}{\alpha(1+k)}.$$

Перемножая почленно эти равенства, получим, что

$$I_1 I_2 = \frac{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2}{R_2^2 \alpha k} \implies \alpha k = \frac{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2}{I_1 I_2 R_2^2} = 4.$$

Заметим, что из условия задачи следует:

$$\frac{\mathcal{E}_1}{I_1} = \frac{\mathcal{E}_2}{I_2}.$$

Тогда из этого соотношения и выражений для I_1 и I_2 получаем

$$\frac{\alpha(1+k)}{1+\alpha} = \frac{k(1+\alpha)}{1+k} \implies \alpha(1+k)^2 = k(1+\alpha)^2.$$

Раскроем скобки:

$$\alpha + 2\alpha k + k^2\alpha = k + 2\alpha k + \alpha^2 k \implies \alpha + 4k = k + 4\alpha \implies \alpha = k.$$

Учитывая, что $\alpha k = 4$, имеем $k = \alpha = 2$. Тогда находим:

$$R_1 = R_4 = 2R_2 = 6 \text{ Ом}, \quad R_3 = 4R_2 = 12 \text{ Ом}.$$