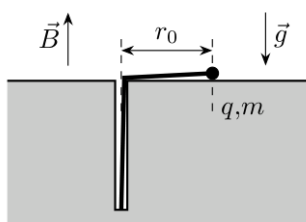


ВсОШ, 2023/24, заключительный этап, 11 класс, теоретический тур

Всероссийская олимпиада школьников по физике [Условия, ответы и решения](#)

Задача 1 Две окружности

В толстой плите из непроводящего твёрдого материала перпендикулярно поверхности просверлено отверстие маленького диаметра, глубина которого меньше толщины плиты. К «дну» отверстия прикреплён один конец резинки с коэффициентом жёсткости k . Длина недеформированной резинки в точности равна глубине отверстия. На другом конце резинки прикреплена бусинка массы m , заряженная положительным зарядом q . Плита расположена горизонтально в поле тяжести. Поверхность плиты гладкая. Перпендикулярно поверхности плиты включено однородное магнитное поле, вектор индукции которого направлен противоположно вектору ускорения свободного падения. Величина индукции магнитного поля равна B . Растягивая резинку, бусинку смещают по поверхности плиты на расстояние r_0 от оси отверстия и отпускают, сообщив ей такую перпендикулярную резинке скорость, что бусинка движется по окружности.



1. Определите угловые скорости движения бусинки при вращении её по часовой стрелке и против часовой стрелки (если смотреть за её движением сверху).

Сила, действующая на бусинку, зависит и от ее координаты $\vec{r}$, и от ее скорости $\vec{v}$ линейным образом. Поэтому, если есть два разных закона движения $\vec{r}_1(t)$ и $\vec{r}_2(t)$, описывающие некоторые движения бусинки, то уравнение $\vec{r}(t) = \alpha \cdot \vec{r}_1(t) + \beta \cdot \vec{r}_2(t)$ при любых постоянных α и β правильно описывает закон физически реализуемого движения этой бусинки под действием таких же сил (ведь скорость и ускорение бусинки в любой момент времени будут описываться такими же комбинациями). Например, если бусинку из того же начального положения, что и в пункте 1, отпускают без начальной скорости, то закон ее движения можно найти как результат наложения («суперпозиции») законов вращений, изученных Вами в этом пункте.

2. На какое минимальное расстояние к оси отверстия приблизится бусинка после отпускания без начальной скорости с расстояния r_0 от отверстия?
3. Через какое время τ после отпускания бусинка вновь окажется на расстоянии r_0 от оси отверстия?
4. Изобразите траекторию бусинки для случая $q^2 B^2 / (mk) = 1/2$. Через какое время после отпускания бусинка в первый раз окажется в исходной точке?

Подсказка

При движении по окружности угловая скорость не зависит от радиуса: сила упругости и сила Лоренца обе пропорциональны r . Старт из покоя — это сумма двух встречных равномерных вращений с подобранными длинами векторов, при которой начальные скорости взаимно гасятся.

Ответ

1) по часовой стрелке $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{q^2 B^2}{4m^2}} + \frac{qB}{2m}$, против часовой стрелки $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{q^2 B^2}{4m^2}} - \frac{qB}{2m}$;
 2) $r_{\min} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 + \omega_2} r_0 = \frac{\Omega}{\sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2}} r_0$, где $\Omega = \frac{qB}{2m}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$; 3) $\tau = \frac{\pi}{\sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2}}$; 4) траектория трижды за оборот проходит от окружности радиуса r_0 до окружности радиуса $r_0/3$ и обратно (см. рисунок в решении); в исходной точке бусинка впервые окажется через $T = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}$.

Решение

1. Уравнение движения бусинки на резинке в магнитном поле $\vec{B}$ имеет вид

$$m\vec{a} = -k\vec{r} + q[\vec{v} \times \vec{B}],$$

то есть (как и отмечено в условии) оно является *линейным* и *однородным* уравнением по отношению к закону движения $\vec{r}(t)$ (сам вектор координаты, откладываемый от положения равновесия бусинки, и его производные — скорость и ускорение — входят в уравнение только в первой степени). При движении по окружности радиуса r_0 центростремительное ускорение бусинки создаётся силой упругости резинки и силой Лоренца, причём в зависимости от направления вращения сила Лоренца либо направлена к центру окружности, либо от него. Значит, величина угловой скорости бусинки при таком движении находится из уравнения

$$m\omega^2 r_0 = kr_0 \pm qB\omega r_0 \implies \omega^2 \pm \frac{qB}{m}\omega - \frac{k}{m} = 0.$$

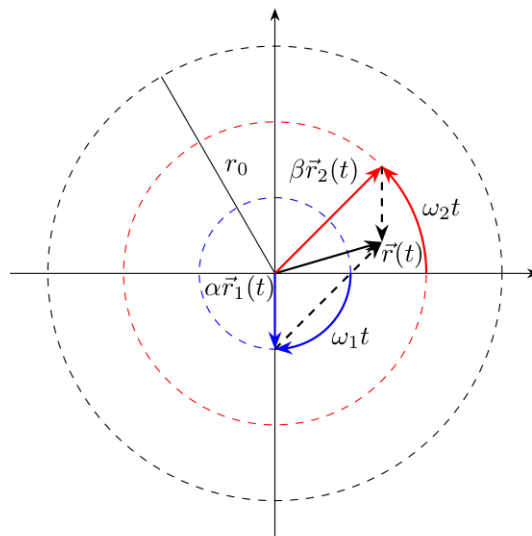
Далее введём обозначения $\Omega \equiv \frac{qB}{2m}$ и $\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}$. Тогда, выбирая для каждого случая положительный корень, приходим к выводу, что при вращении по часовой стрелке величина угловой скорости (циклическая частота вращения)

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2} + \Omega = \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{q^2 B^2}{4m^2}} + \frac{qB}{2m},$$

а при вращении против часовой стрелки она равна

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2} - \Omega = \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{q^2 B^2}{4m^2}} - \frac{qB}{2m} < \omega_1.$$

Примечание: в обоих случаях угловая скорость не зависит от радиуса окружности! Поэтому величина линейной скорости пропорциональна радиусу описываемой окружности.



2. Пусть теперь $\vec{r}_1(t)$ — закон движения бусинки, вращающейся по окружности радиуса r_0 по часовой стрелке, а $\vec{r}_2(t)$ — закон движения бусинки, вращающейся по той же окружности против часовой стрелки. Модули скоростей движения у бусинки при этих движениях различаются: легко найти, что $|\vec{v}_1| = \omega_1 r_0$, а $|\vec{v}_2| = \omega_2 r_0$. Если записать *суперпозицию* этих законов движения в виде

$$\vec{r}(t) = \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \vec{r}_1(t) + \frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2} \vec{r}_2(t),$$

то, в соответствии с линейностью и однородностью уравнения движения (и в соответствии с содержащейся в условии «подсказкой»), этот закон тоже удовлетворяет уравнению движения. Легко определить начальные условия, которым он соответствует: поскольку $\vec{r}_1(0) = \vec{r}_2(0) \equiv \vec{r}_0$ и при различных направлениях вращения $|\vec{v}_1(0)| = \omega_1 r_0 = \frac{\omega_1}{\omega_2} |\vec{v}_2(0)|$, то $\vec{r}'(0) = \vec{r}_0$ и $\vec{v}(0) = 0$. Следовательно, полученный закон описывает движение бусинки, запущенной без начальной скорости с расстояния r_0 от отверстия! Мы обнаружили, что вектор координаты такой бусинки можно в любой момент времени найти как сумму вектора $\frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \vec{r}_1(t)$ с постоянной длиной $\frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} r_0$, вращающегося с угловой скоростью ω_1 по часовой стрелке, и вектора $\frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2} \vec{r}_2(t)$ с постоянной длиной $\frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2} r_0$, вращающегося с угловой скоростью ω_2 против часовой стрелки от того же начального положения (см. рисунок). Отметим, что угол между этими векторами в момент времени t равен $\varphi(t) = (\omega_1 + \omega_2)t$. Поэтому, по теореме косинусов, в этот момент времени расстояние от бусинки до отверстия удовлетворяет уравнению

$$r^2(t) = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} r_0 \right)^2 + \left(\frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2} r_0 \right)^2 + 2 \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} r_0 \cdot \frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2} r_0 \cdot \cos [(\omega_1 + \omega_2)t].$$

Значит,

$$r(t) = \frac{r_0}{\omega_1 + \omega_2} \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2 \cdot \cos [(\omega_1 + \omega_2)t]}.$$

Таким образом, циклическая частота изменения расстояния от бусинки до положения равновесия равна $\omega_1 + \omega_2 = 2\sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2}$, причём минимальное значение

$$r_{\min} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 + \omega_2} r_0 = \frac{\Omega}{\sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2}} r_0$$

расстояние принимает в моменты времени $t_n = \frac{\pi}{\sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2}} \left(n + \frac{1}{2} \right)$ (где $n = 0, 1, 2, \dots$). Отметим, что для нахождения $r_{\min}$ не обязательно исследовать закон изменения расстояния $r(t)$: достаточно понять, что расстояние от бусинки до отверстия минимально, когда «составляющие» векторы нашей суперпозиции направлены противоположно. Тогда ясно, что $r_{\min}$ равно разности их модулей.

3. Из формулы для $r(t)$ видно, что максимальное расстояние от бусинки до отверстия равно начальному $r_{\max} = r_0$, и оно достигается в моменты времени $t'_n = \frac{\pi}{\sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2}} n$ (где $n = 0, 1, 2, \dots$).

Как видно, впервые после отпущения это произойдёт в момент времени

$$\tau = \frac{\pi}{\sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2}}.$$

Как и в предыдущем пункте, можно получить этот ответ без нахождения $r(t)$ — достаточно образного представления движения. Тогда ясно, что расстояние максимально, когда вращающиеся навстречу друг другу «составляющие» векторы суперпозиции встречаются, и $\tau = \frac{2\pi}{\omega_1 + \omega_2} =$

$$\frac{\pi}{\sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2}}.$$

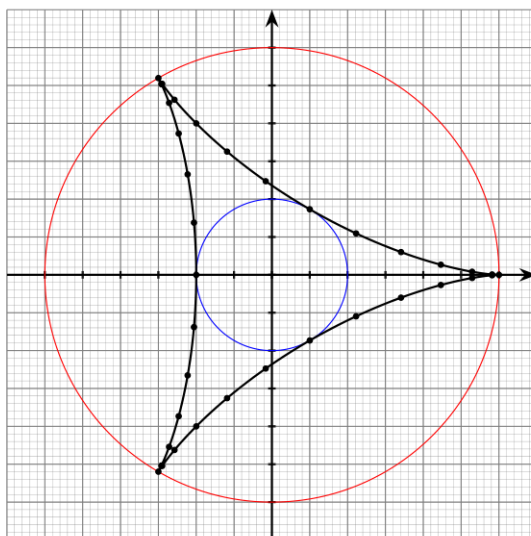
4. При таком соотношении параметров $\Omega^2 = \omega_0^2/8$, и поэтому $\omega_1 = \omega \cdot \sqrt{2}$, а $\omega_2 = \omega_0/\sqrt{2}$. Значит, отношение угловых скоростей $\omega_1 : \omega_2 = 2 : 1$, то есть общее движение периодическое, и траектория оказывается замкнутой. В этом случае

$$\vec{r}_1(t) = \frac{1}{3}\vec{r}_1(t) + \frac{2}{3}\vec{r}_2(t),$$

длины векторов, сумма которых даёт $\vec{r}(t)$, равны $r_0/3$ и $2r_0/3$, а закон изменения расстояния

$$r(t) = \frac{r_0}{3} \sqrt{5 + 4 \cdot \cos [3\omega_2 t]}.$$

Ясно, что период движения — наименьшее общее кратное периодов двух составляющих движений, которое в нашем случае равно периоду меньшей частоты ω_2 .



Поэтому впервые после отпускания бусинка окажется в исходной точке спустя время

$$T = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}.$$

Период изменения расстояния от отверстия

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1 + \omega_2} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{3\omega_0} = \frac{1}{3}T_2.$$

Поэтому за один период движения бусинка трижды достигает максимального расстояния r_0 , и трижды — минимального $r_0/3$. Таким образом, траектория за «полный оборот» вокруг оси отверстия трижды проходит от окружности с радиусом r_0 до окружности с радиусом $r_0/3$ и обратно, причём вблизи общих точек с большей окружностью бусинка движется по радиусу (траектория касается радиуса), в общих точках с меньшей окружностью радиальная скорость бусинки обращается в ноль при ненулевой угловой скорости — бусинка движется перпендикулярно радиусу, и её траектория касается меньшей окружности в общих точках. По этим сведениям можно достаточно корректно изобразить вид траектории (см. рисунок). Другой способ изучить траекторию — записать закон движения бусинки в декартовых координатах (x, y) . Удобно совместить начало координат с осью отверстия, а ось x направить так, чтобы она проходила через начальное положение бусинки. Проецируя закон движения на эти оси, получим:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{r_0}{3} [2 \cos(\omega_2 t) + \cos(2\omega_2 t)], \\ y(t) = \frac{r_0}{3} [2 \sin(\omega_2 t) - \sin(2\omega_2 t)]. \end{cases}$$

Тогда можно построить траекторию «по точкам», выбрав несколько характерных значений $\omega_2 t$. Впрочем, и в этом случае удобно в первую очередь построить положение точек, отвечающих моментам, когда бусинка находится на максимальном и минимальном расстояниях от отверстия, то есть $\omega_2 t = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$.

Задача 2 Лепёшка из ртути

На верхнее горизонтальное основание сплошного кругового цилиндра с площадью поперечного сечения S аккуратно налили немного ртути. Краевой угол смачивания материала, из которого изготовлен этот цилиндр, равен θ . Коэффициент поверхностного натяжения ртути равен σ , плотность ртути равна ρ . Ускорение свободного падения равно g . Считайте, что параметры σ , ρ , g и S удовлетворяют неравенству:

$$\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \ll \sqrt{S}.$$

1. При каком минимальном значении объёма ртути V_0 она целиком покроет основание цилиндра?

На основание цилиндра наливают ртуть объёмом $V < V_0$. Сверху аккуратно помещают второй цилиндр с таким же поперечным сечением, но изготовленный из другого материала, который полностью не смачивается ртутью. Считайте расположение цилиндров и ртути всё время осесимметричным.

2. При какой минимальной массе m_1 верхнего цилиндра ртуть будет контактировать с основанием нижнего цилиндра по всей площади его поверхности?
3. При какой минимальной массе m_2 верхнего цилиндра ртуть вытечет из зазора между цилиндрами? Считайте, что граница между основанием цилиндра и его боковой поверхностью является закруглённой (радиус закругления много меньше толщины слоя ртути) и выпуклой.

Подсказка

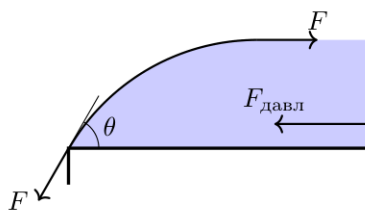
Лепёшка широкая и плоская, поэтому задача двумерная: запишите равновесие полоски ртути по горизонтали — силы поверхностного натяжения на краях против силы среднего гидростатического давления (с добавкой от веса верхнего цилиндра). Для вытекания найдите, какой может быть наибольшая горизонтальная составляющая силы натяжения, пока край ртути не переходит через закругление на боковую поверхность.

Ответ

$$1) V_0 = S \sqrt{\frac{2\sigma(1 - \cos \theta)}{\rho g}}; \quad 2) m_1 = \frac{\sigma S^2(1 - \cos \theta)}{gV} - \frac{\rho V}{2}; \quad 3) m_2 = \frac{\sigma S^2(1 + \sin \theta)}{gV} - \frac{\rho V}{2} \text{ при } \theta < \pi/2 \text{ и } m_2 = \frac{2\sigma S^2}{gV} - \frac{\rho V}{2} \text{ при } \theta \geq \pi/2.$$

Решение

1. Неравенство из условия задачи позволяет считать верхнюю поверхность ртути практически плоской, а горизонтальный радиус ртутной «лепёшки» много большим, чем её толщина. Это даёт возможность определить толщину слоя ртути h , рассматривая задачу как двумерную. Будем считать, что ртуть заполнила всю площадь основания цилиндра, но при этом не перешла на его боковую поверхность.



Рассмотрим участок слоя жидкости шириной L и условие её равновесия в проекции на горизонтальную ось x (силы, действующие на этот участок в горизонтальном направлении, изображены на рис.):

$$F_x = F \cos \theta - F + p_{\text{ср}} Lh = \sigma L \cos \theta - \sigma L + p_{\text{ср}} Lh = 0,$$

где $p_{\text{ср}}$ — среднее по высоте гидростатическое давление ртути, равное $p_{\text{ср}} = \rho gh/2$. Тогда имеем:

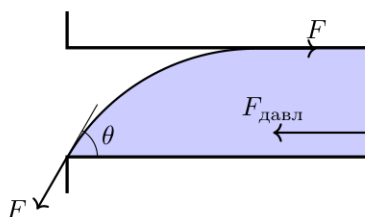
$$\frac{\rho gh^2}{2} = \sigma(1 - \cos \theta) \Rightarrow h = \sqrt{\frac{2\sigma(1 - \cos \theta)}{\rho g}}.$$

Когда ртуть заполняет всю поверхность основания цилиндра, её объём равен

$$V_0 = Sh = S \sqrt{\frac{2\sigma(1 - \cos \theta)}{\rho g}}.$$

2. Если поставить на ртуть цилиндр массой m , то в каждой точке жидкости гидростатическое давление возрастёт на величину $mg/S_{\text{к}}$, где $S_{\text{к}}$ — площадь контакта ртути и поставленного на неё цилиндра. Среднее гидростатическое давление в слое ртути в этом случае составит

$$p_{\text{ср}} = \frac{\rho gh}{2} + \frac{mg}{S_{\text{к}}}.$$



Условие равновесия сил, действующих на участок ртути единичной ширины в проекции на ось x (см. рис.), примет вид:

$$\sigma(1 - \cos \theta) = \frac{\rho gh^2}{2} + \frac{mgh}{S_{\text{к}}}.$$

Отметим, что $h = V/S_{\text{к}}$, поскольку поверхность ртути можно считать плоской (после постановки на неё цилиндра это приближение становится ещё более справедливым). Подставляя выражение для h , получим:

$$\sigma(1 - \cos \theta) = \frac{\rho g V^2}{2 S_{\text{к}}^2} + \frac{mgV}{S_{\text{к}}^2}.$$

Ртуть полностью заполнит зазор между цилиндрами при $S_{\text{к}} = S$, следовательно

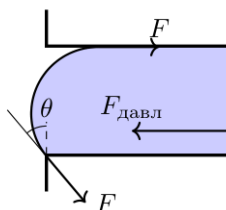
$$m_1 = \frac{\sigma S^2(1 - \cos \theta)}{gV} - \frac{\rho V}{2}.$$

Примечание: обращаем внимание, что в выражении для давления ртути нельзя считать $\rho gh \ll mg/S$, так как эти величины могут быть одного порядка!

3. В процессе перехода границы ртути с основания нижнего цилиндра на его боковую поверхность направление касательной к поверхности ртути поворачивается на 90° . Ртуть станет вытекать из зазора между цилиндрами, когда сила гидростатического давления превысит максимально возможную величину горизонтальной компоненты силы поверхностного натяжения. Теоретически, этот максимум соответствует положению касательной, при котором она является горизонтальной, однако это положение может быть нереализуемо при заданном значении угла смачивания θ .

Рассмотрим два случая.

Первый случай: $\theta < \pi/2$.



В данном случае касательная к поверхности жидкости никогда не станет горизонтальной, поэтому величина горизонтальной компоненты силы поверхностного натяжения будет максимальной, если касательная будет направлена под углом θ к боковой поверхности цилиндра (см. рис.). Тогда

$$F_{max} = \sigma L(1 + \sin \theta).$$

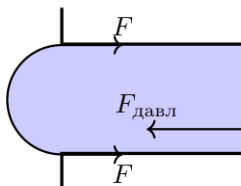
Записывая условие равновесия, получим, что

$$\sigma(1 + \sin \theta) = \frac{\rho g V^2}{2S^2} + \frac{m_2 g V}{S^2},$$

откуда

$$m_2 = \frac{\sigma S^2(1 + \sin \theta)}{gV} - \frac{\rho V}{2}.$$

Второй случай: $\theta \geq \pi/2$.



В данном случае касательная к поверхности жидкости может стать горизонтальной (см. рис.). Тогда максимальная горизонтальная компонента силы поверхностного натяжения будет равна

$$F_{max} = 2\sigma L.$$

Записывая условие равновесия в этом случае, получим

$$2\sigma = \frac{\rho g V^2}{2S^2} + \frac{m_2 g V}{S^2},$$

откуда

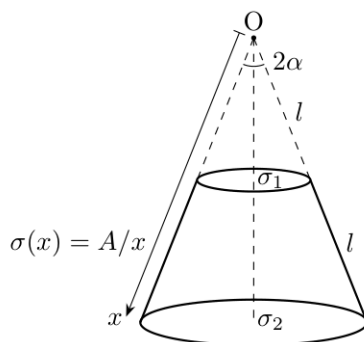
$$m_2 = \frac{2\sigma S^2}{gV} - \frac{\rho V}{2}.$$

Итак,

$$m_2 = \begin{cases} \frac{\sigma S^2(1 + \sin \theta)}{gV} - \frac{\rho V}{2} & \text{при } \theta < \pi/2, \\ \frac{2\sigma S^2}{gV} - \frac{\rho V}{2} & \text{при } \theta \geq \pi/2. \end{cases}$$

Задача 3 Усечённый конус

Прямой сплошной непроводящий усечённый конус заряжен по боковой поверхности так, что его поверхностная плотность заряда зависит от расстояния до вершины O целого конуса как $\sigma(x) = A/x$, где A — известная положительная константа. Основания усечённого конуса заряжены однородно с поверхностными плотностями σ_1 и σ_2 (см. рис.). Длина образующей и половинный угол раствора конуса, дополняющего усечённый конус до целого, равны l и $\alpha = 30^\circ$ соответственно, длина образующей усечённого конуса равна l .



1. Пусть $\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma_0$, где σ_0 — известная величина. Найдите вектор напряжённости $\vec{E}_O$ в точке O .

В конусе просверлили тонкий канал, так что пробный отрицательный заряд $-q$ ($q > 0$) массы m может без трения перемещаться вдоль оси симметрии конуса. Далее справедливо $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_0$.

2. Докажите, что существует положение равновесия пробного заряда, не зависящее от значения σ_0 . Найдите это положение равновесия. В качестве ответа приведите расстояние от него до точки O .
3. При каких значениях σ_0 найденное положение равновесия будет устойчивым? Для значений, соответствующих устойчивому равновесию, найдите период малых колебаний пробного заряда в окрестности положения равновесия.

Примечание: конус закреплён, диэлектрическая проницаемость усечённого конуса $\varepsilon = 1$, влиянием силы тяжести и явлениями магнетизма пренебречь.

Подсказка

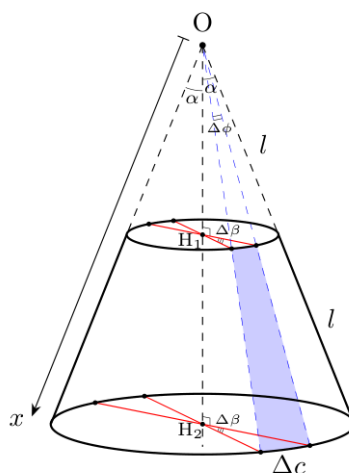
Разрежьте боковую поверхность на узкие полоски: при $\sigma = A/x$ каждая полоска — стержень с постоянной линейной плотностью заряда. Нормальная к плоскому заряженному слою составляющая поля пропорциональна телесному углу, под которым слой виден; в точке пересечения диагоналей осевого сечения оба основания видны под одним углом.

Ответ

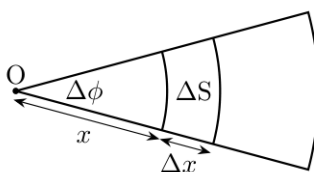
1) $E_O = \frac{\sqrt{3}}{16} \frac{A}{\varepsilon_0 l}$, вектор направлен вдоль оси конуса; 2) $OF = \frac{2\sqrt{3}}{3} l$ (точка пересечения диагоналей осевого сечения); 3) устойчиво при $\sigma_0 < \frac{A}{2l}$, период $T = \frac{8\pi}{3} \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{m\varepsilon_0 l}{q} \left(\frac{A}{l} - 2\sigma_0 \right)^{-1}}$.

Решение

1. Первый способ. Из осевой симметрии системы следует, что в любой точке на оси конуса вектор напряжённости параллелен оси. Мысленно разрежем конус на $2N$ одинаковых практически плоских трапеций. При увеличении N площадь кусочка искривлённой трапеции стремится к площади плоской трапеции, так что при достаточно большом N кусочки можно считать плоскими.



Наибольшее основание Δc трапеции выражается через центральный угол $\Delta\beta$ окружности сечения с наибольшим радиусом или через угол $\Delta\phi$ при вершине треугольника, получающегося при дополнении трапеции, как $\Delta c = l\Delta\beta = 2l\Delta\phi$. При достаточно малом $\Delta\beta$ справедливо соотношение $\Delta c \ll l$, так что в первом приближении каждую из трапеций можно представить в виде тонкого стержня с некоторой эффективной линейной плотностью заряда $\lambda(x)$.



Найдём $\lambda(x)$. Выразим заряд на малой площади треугольника, получающегося при дополнении трапеции.

$$\Delta q = \sigma(x) \Delta S = \sigma(x) x \Delta x \Delta \phi = A \Delta x \Delta \phi.$$

Тогда имеем

$$\lambda(x) = \frac{\Delta q}{\Delta x} = A \Delta \phi = A \frac{\Delta \beta}{2} \equiv \text{const}.$$

Рассмотрим тонкий диэлектрический равномерно заряженный стержень длины l с линейной плотностью заряда λ . Найдём напряжённость на прямой, содержащей стержень, в точке O на расстоянии l от стержня. Сделаем это методом разности потенциалов. При смещении из точки O на расстояние $\Delta x \ll l$ имеем

$$\Delta E_O = -\frac{\Delta \varphi}{\Delta x} = k\lambda \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{2l} \right) = \frac{A}{8\varepsilon_0 l} \frac{\Delta \beta}{2\pi}.$$

Тогда с учётом проекции на ось после суммирования $\Delta\beta$ от 0 до 2π получаем вклад в результирующую напряжённость от боковой поверхности конуса:

$$E_O^{side} = \frac{\sqrt{3}}{16} \frac{A}{\varepsilon_0 l}.$$

Нормальная компонента поля к плоской равномерно заряженной площадке в любой точке пространства выражается через телесный угол, под которым видна площадка из этой точки. Покажем, что если по плоскому слою равномерно распределён заряд с поверхностной плотностью σ , то в точке A компонента электрического поля, перпендикулярная слою, равна:

$$E_n = \frac{\sigma \Omega_A}{4\pi\varepsilon_0},$$

где Ω_A — телесный угол, под которым виден плоский слой из точки A .

Доказательство: Рассмотрим элемент плоского слоя с площадью dS . Пусть $\vec{e}_n$ — единичный вектор нормали к поверхности слоя, направленный к точке A , а $\vec{r}$ — радиус-вектор, проведённый от элемента слоя к точке A . Тогда для нормальной компоненты электрического поля элемента слоя получим:

$$d\vec{E}_n = \vec{e}_n \cdot \frac{\sigma \vec{r} dS}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r} \cdot d\vec{S}}{r^3}.$$

Если направления векторов $\vec{r}$ и $d\vec{S}$ изменить на противоположные, величина $(\vec{r} \cdot d\vec{S})/r^3$ по определению будет представлять собой элемент телесного угла $d\Omega_A$, под которым элемент плоского слоя виден из точки A . Таким образом:

$$dE_n = \frac{\sigma d\Omega_A}{4\pi\varepsilon_0} \Rightarrow E_n = \frac{\sigma \Omega_A}{4\pi\varepsilon_0},$$

что и требовалось доказать.

Так как оба основания видны из точки O под одинаковым телесным углом, а $\sigma_1 = -\sigma_2$, из теоремы о выражении нормальной к площадке напряжённости через телесный угол следует, что суммарный вклад в результирующую напряжённость от оснований

$$E_O^{bases} = 0.$$

Значит,

$$E_O = \frac{\sqrt{3}}{16} \frac{A}{\varepsilon_0 l}.$$

Второй способ. Разобьём боковую поверхность на колечки и начнём интегрировать.

$$E_O = \int_l^{2l} k \frac{2\pi x \sin(\alpha)}{x^2} \frac{A}{x} \cos(\alpha) dx = \frac{\sqrt{3}A}{8\varepsilon_0} \int_l^{2l} \frac{1}{x^2} dx = \frac{\sqrt{3}}{16} \frac{A}{\varepsilon_0 l}.$$

Пусть y — расстояние от центра диска, заряженного с σ_0 , по его оси. Радиус диска R . Будем интегрировать по радиусу.

$$E^{disk}(y) = \frac{y\sigma_0}{2\varepsilon_0} \int_0^R \frac{r}{(r^2 + y^2)^{3/2}} dr = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{y}{\sqrt{y^2 + R^2}} \right).$$

В нашем случае

$$y_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}l, \quad R_1 = \frac{l}{2}; \quad y_2 = \sqrt{3}l, \quad R_2 = l.$$

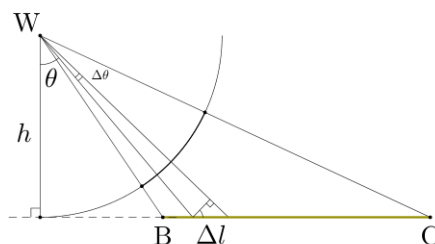
Тогда, так как $\sigma_1 = -\sigma_2$, суммарная напряжённость от оснований:

$$E_O^{bases} = 0, \quad E_O = \frac{\sqrt{3}}{16} \frac{A}{\varepsilon_0 l}.$$

2. Первый способ. Рассмотрим пару противоположных стержней. Они образуют равнобокую трапецию с основаниями l , $2l$ и боковой стороной l .

Заметим, что для равномерно заряженного стержня BC в любой точке W, не принадлежащей стержню, напряжённость направлена вдоль биссектрисы угла $\angle BWC$.

Доказательство: Рассмотрим малый элемент длины Δl стержня. Напряжённость от него в точке W эквивалентна напряжённости от точечного заряда $\Delta q = \lambda \Delta l$.



По закону Кулона,

$$\Delta E_W = k \frac{\lambda \Delta l \cos^2 \theta}{h^2}.$$

Заметим, что

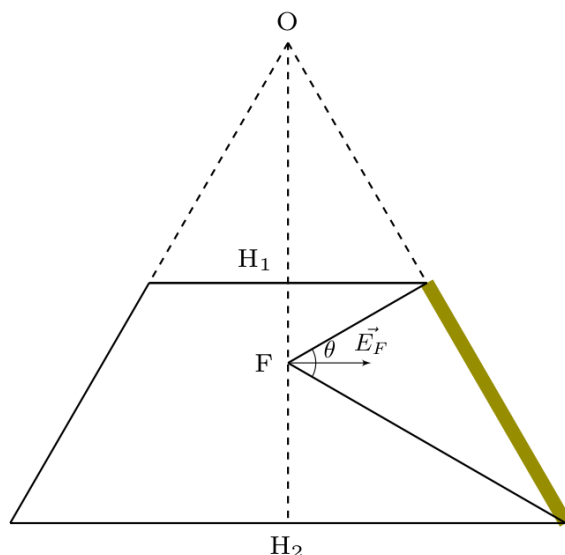
$$\frac{h}{\cos \theta} \Delta \theta = \cos(\theta) \Delta l.$$

Тогда выражение для ΔE_W примет вид

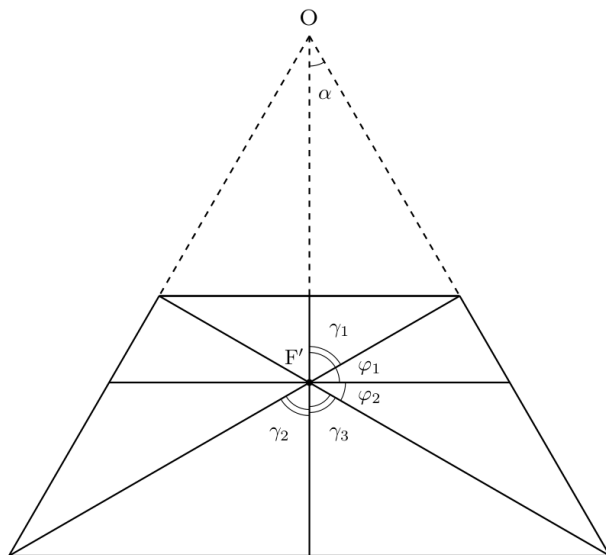
$$\Delta E_W = \frac{k\lambda}{h^2} h \Delta \theta,$$

что в точности соответствует напряжённости от малого элемента длины $h \Delta \theta$ дуги окружности радиусом h с плотностью заряда λ . Поскольку для дуги окружности в силу симметрии результирующая напряжённость в точке W направлена по биссектрисе центрального угла, то же самое верно и для стержня. Что и требовалось доказать.

Таким образом, напряжённость $\vec{E}_F$ в точке пересечения диагоналей трапеции F от боковой стороны направлена вдоль биссектрисы угла θ .

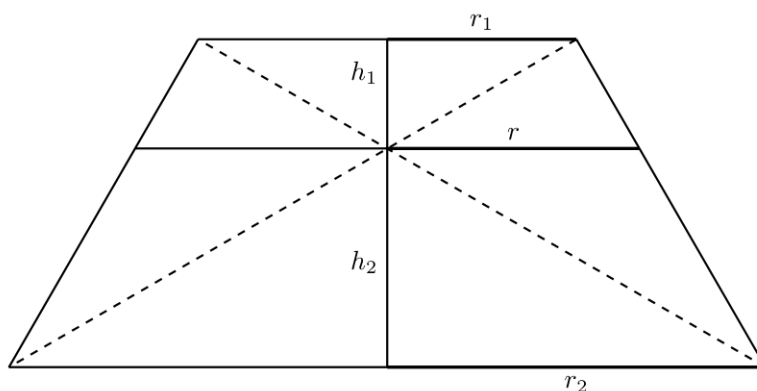


Заметим, что точка F' , в которой суммарная напряжённость от боковой поверхности усечённого конуса равна 0, совпадает с точкой F . В самом деле, рассмотрим соотношения углов: $\gamma_1 = \gamma_2$ — как вертикальные, $\gamma_2 = \gamma_3$ — так как треугольник в основании равнобедренный, $\varphi_1 + \gamma_1 = \pi/2$, $\varphi_2 + \gamma_3 = \pi/2$ — так как напряжённость от боковой стороны должна быть перпендикулярна высоте конуса.



Получаем $\varphi_1 = \varphi_2$, значит, биссектриса угла θ перпендикулярна высоте конуса. В точке пересечения диагоналей напряжённость от боковой стороны перпендикулярна высоте конуса, точки F и F' совпадают.

Согласно теореме о выражении нормальной к площадке напряжённости через телесный угол, так как $\sigma_1 = \sigma_2$, в точке F пересечения диагоналей трапеции суммарная напряжённость от оснований конуса равна нулю при любом значении σ_0 .



Из подобия треугольников получаем

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{r_2}{r_1}, \quad \frac{r - r_1}{h_1} = \frac{r_2 - r}{h_2}.$$

Откуда:

$$r = \frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2}. \quad (1)$$

При $r_1 = \frac{l}{2}$, $r_2 = l$ получаем:

$$r = \frac{2}{3}l.$$

В конусе

$$OF = \frac{r}{\operatorname{tg}(\alpha)},$$

откуда имеем

$$OF = \frac{2\sqrt{3}}{3}l.$$

Второй способ. Введём координатную ось z с началом в точке O и направлением вдоль оси симметрии. Разобьём боковую поверхность усечённого конуса на колечки и для нахождения напряжённости проинтегрируем вклад от одного колечка в пределах изменения координаты x — от l до $2l$.

$$E^{sides}(z) = \int_l^{2l} k \frac{2\pi x \sin(\alpha) A (x \cos(\alpha) - z)}{\left((x \sin(\alpha))^2 + (x \cos(\alpha) - z)^2\right)^{3/2} x} dx = \frac{A}{4\varepsilon_0} \int_l^{2l} \frac{x \cos(\alpha) - z}{\left((x \sin(\alpha))^2 + (x \cos(\alpha) - z)^2\right)^{3/2}} dx.$$

Введём новую переменную:

$$u = x - \frac{\sqrt{3}}{2}z.$$

Тогда выражение примет вид

$$E^{sides}(z) = \frac{A}{4\varepsilon_0} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \int_{l-\frac{\sqrt{3}}{2}z}^{2l-\frac{\sqrt{3}}{2}z} \frac{u}{\left(u^2 + \frac{z^2}{4}\right)^{3/2}} du - \frac{z}{4} \int_{l-\frac{\sqrt{3}}{2}z}^{2l-\frac{\sqrt{3}}{2}z} \frac{1}{\left(u^2 + \frac{z^2}{4}\right)^{3/2}} du \right].$$

Для взятия данных интегралов можно использовать подстановки Эйлера или Чебышёва или тригонометрическую подстановку, однако первообразная легко угадывается:

$$E^{sides}(z) = \frac{A}{4\varepsilon_0} \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{2}{\sqrt{4u^2 + z^2}} \Big|_{l-\frac{\sqrt{3}}{2}z}^{2l-\frac{\sqrt{3}}{2}z} - \frac{z}{4} \frac{8u}{z^2 \sqrt{4u^2 + z^2}} \Big|_{l-\frac{\sqrt{3}}{2}z}^{2l-\frac{\sqrt{3}}{2}z} \right].$$

После подстановки пределов и приведения к общему знаменателю имеем

$$E^{sides}(z) = \frac{l}{z} \left(\frac{2\sqrt{l^2 - \sqrt{3}lz + z^2} - \sqrt{4l^2 - 2\sqrt{3}lz + z^2}}{\sqrt{l^2 - \sqrt{3}lz + z^2} \sqrt{4l^2 - 2\sqrt{3}lz + z^2}} \right).$$

Из условия

$$E^{sides}(z_0) = 0$$

получаем единственный корень

$$z_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}l.$$

Теперь получим выражение для $E^{bases}(z)$. Пусть y — расстояние от центра по оси диска, заряженного с σ_0 . Радиус диска R . Будем интегрировать по радиусу.

$$E^{disk}(y) = \frac{y\sigma_0}{2\varepsilon_0} \int_0^R \frac{r}{(r^2 + y^2)^{3/2}} dr = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{y}{\sqrt{y^2 + R^2}} \right).$$

Здесь напряжённость положительна вдоль направления положительного отсчёта y . В нашем случае

$$R_1 = \frac{l}{2}, \quad y_1 = z - \frac{\sqrt{3}}{2}l; \quad R_2 = l, \quad y_2 = \sqrt{3}l - z.$$

Вклад в осевую напряжённость от оснований:

$$E^{bases}(z) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} \left(\frac{\sqrt{3}l - z}{\sqrt{4l^2 - 2\sqrt{3}lz + z^2}} - \frac{z - \frac{\sqrt{3}}{2}l}{\sqrt{l^2 - \sqrt{3}lz + z^2}} \right).$$

Тогда из условия

$$E^{bases}(z'_0) = 0$$

имеем единственный корень

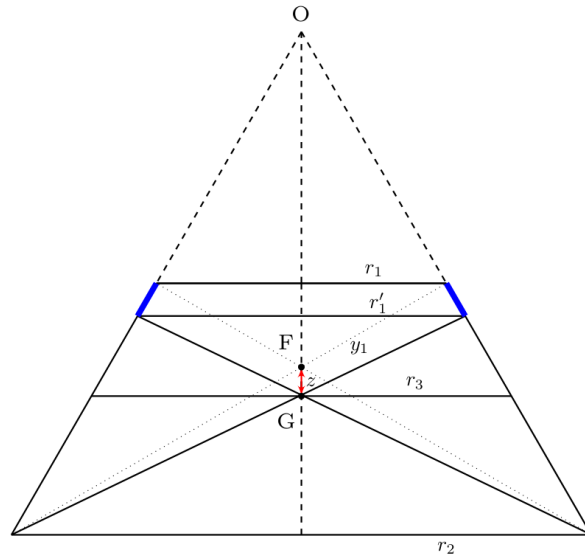
$$z'_0 = z_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}l.$$

Поскольку $E^{sides}(z_0) = E^{bases}(z_0) = 0$, z_0 — искомое положение равновесия:

$$OF = \frac{2\sqrt{3}}{3}l.$$

3. Первый способ. Пусть пробный заряд смещён относительно положения равновесия F на расстояние z в точку G, $z \ll l$.

Рассчитаем вклад в напряжённость E_G в точке G от боковой поверхности конуса. Отрежем от трапеции верхушку так, чтобы точка G была точкой равновесия для получившейся новой трапеции. Тогда на пробный заряд будет действовать сила со стороны отрезанного кольца (на рисунке обозначенного синим цветом), эта сила будет возвращающей. Значит, положение равновесия устойчивое.



$$OG - OF = z, \quad r_3 = OG \operatorname{tg}(\alpha), \quad r = OF \operatorname{tg}(\alpha).$$

Используя (1), можно записать

$$r_3 = \frac{2r'_1 r_2}{r'_1 + r_2},$$

откуда

$$r'_1 = \frac{r_2 r_3}{2r_2 - r_3}, \quad \Delta r_1 = r'_1 - r_1, \quad \Delta x_1 = \frac{\Delta r_1}{\sin \alpha} = \frac{3\sqrt{3}}{4}z.$$

$$\Delta E_G^{side} = \frac{k\lambda(x)\Delta x_1}{y_1^2} \cos 60^\circ = \frac{kA\Delta x_1}{4y_1^2} \Delta \beta,$$

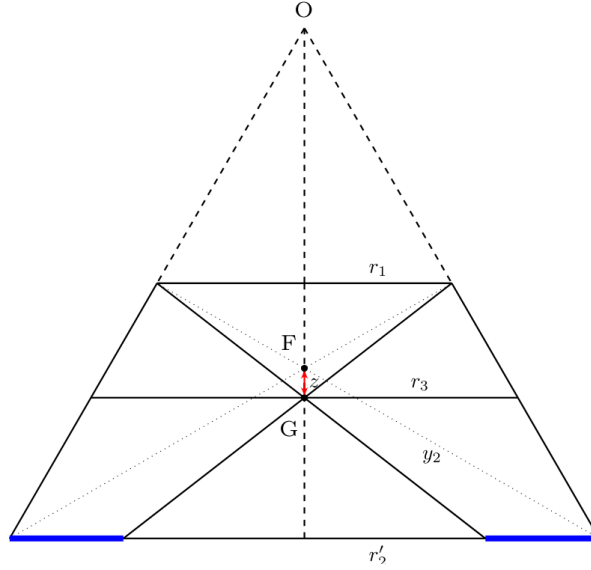
где

$$y_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}l.$$

Просуммируем $\Delta\beta$ от 0 до 2π :

$$E_G^{side} = \frac{9\sqrt{3}}{32} \frac{A}{\varepsilon_0 l^2} z.$$

Рассчитаем вклад в напряжённость E_G в точке G от оснований конуса. Воспользуемся упомянутой в первом пункте теоремой. Тогда нескомпенсированный заряд расположен в форме кольца (на рисунке обозначенного синим цветом) в нижнем основании усечённого конуса.



Из подобия треугольников,

$$\frac{r'_2}{OH_2 - (OF + z)} = \frac{r_1}{OF + z - OH_1}.$$

При этом

$$OH_1 = l \cos \alpha, \quad OH_2 = 2l \cos \alpha, \quad \Delta r_2 = r_2 - r'_2,$$

$$\Delta E_G^{bases} = k \frac{2\pi r_2 \Delta r_2 \sigma}{y_2^2} \cos 60^\circ,$$

где

$$y_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}l.$$

Тогда для вклада в напряжённость в G от оснований имеем

$$E_G^{bases} = -\frac{9\sqrt{3}}{16} \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 l} z.$$

Окончательно, уравнение движения пробного заряда по оси принимает вид

$$\ddot{z} + \frac{9\sqrt{3}}{32} \frac{q}{m\varepsilon_0 l} \left(\frac{A}{l} - 2\sigma_0 \right) z = 0.$$

Откуда ясно, что положение равновесия устойчивое в случае

$$\sigma_0 < \frac{A}{2l},$$

а период колебаний

$$T = \frac{8\pi}{3} \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{m\varepsilon_0 l}{q} \left(\frac{A}{l} - 2\sigma_0 \right)^{-1}}.$$

Второй способ. Пусть

$$z = z_0 + z, \quad z \ll l.$$

Принимая во внимание

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x, \quad x \ll 1,$$

получим

$$E^{sides}(z_0 + z) \approx \frac{9\sqrt{3}}{32} \frac{A}{\varepsilon_0 l^2} z.$$

Проделявая то же самое для оснований, получим

$$E^{bases}(z_0 + z) \approx -\frac{9\sqrt{3}}{16} \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 l} z.$$

Окончательно, уравнение движения пробного заряда по оси принимает вид

$$\ddot{z} + \frac{9\sqrt{3}}{32} \frac{q}{m\varepsilon_0 l} \left(\frac{A}{l} - 2\sigma_0 \right) z = 0.$$

Откуда ясно, что положение равновесия устойчивое в случае

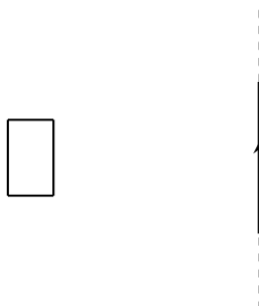
$$\sigma_0 < \frac{A}{2l},$$

а период колебаний

$$T = \frac{8\pi}{3} \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{m\varepsilon_0 l}{q} \left(\frac{A}{l} - 2\sigma_0 \right)^{-1}}.$$

Задача 4 Рамка и провод

Жёсткая прямоугольная рамка, изготовленная из тонкой проволоки, может двигаться по гладкой горизонтальной поверхности, на которой закреплён тонкий бесконечно длинный прямой провод. На рисунке показан вид сверху на данную систему. Изначально силы токов в проводе и в рамке равны нулю. Рамка покоится в таком положении, что одна из пар её сторон параллельна проводу, причём расстояние между проводом и ближайшей к нему стороной рамки во много раз превышает все размеры рамки. Силу тока в проводе увеличивают до некоторого максимального значения настолько быстро, что смещением рамки за время увеличения силы тока можно пренебречь. В дальнейшем силу тока в проводе поддерживают постоянной. Оказалось, что в момент достижения силой тока в проводе максимального значения скорость рамки равнялась v_0 . Индуктивностью рамки можно пренебречь, а её сопротивление можно считать постоянным. Чему будет равна скорость рамки v_1 спустя очень большое время после достижения силой тока в проводе максимального значения?



Подсказка

Пока ток быстро нарастает, рамка неподвижна, и импульс силы Ампера выражается через $\int I dI$. После этого тормозящая сила пропорциональна скорости рамки, поэтому $m dv$ пропорционально dx/x^4 — интегрируйте по пути, а не по времени.

Ответ

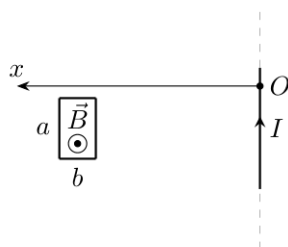
$$v_1 = \frac{v_0}{3}.$$

Решение

Пусть сторона рамки, параллельная проводу, равна a , а перпендикулярная ей сторона равна b . Введём ось Ox с началом на проводе перпендикулярно ему в направлении к рамке (см. рис. 1). Далее величина x везде обозначает расстояние между проводом и ближайшей к нему стороной рамки, которое изначально равнялось x_0 . Пусть сила тока в проводе равна I . Тогда индукция создаваемого магнитного поля провода на расстоянии r от него направлена перпендикулярно горизонтальной поверхности на читателя и равна:

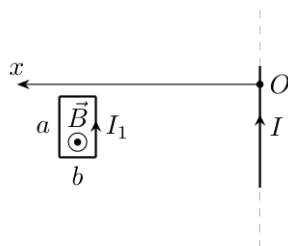
$$B(I, r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

где μ_0 — магнитная постоянная.



Пусть I_1 — величина силы тока в рамке в направлении против часовой стрелки при виде сверху. Равнодействующая сил Ампера, действующих на контур, составляет:

$$F_x = I_1 a B(I, x + b) - I_1 a B(I, x).$$



Поскольку рамка выполнена из тонкой проволоки, а величины a и b во много раз меньше x_0 , то выражение для F_x можно приблизить следующим образом:

$$F_x \approx \frac{\mu_0 I_1 I a}{2\pi} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \right) b = -\frac{\mu_0 I_1 I a b}{2\pi x^2}.$$

Пусть R — сопротивление рамки, а Φ — поток индукции магнитного поля, пронизывающего рамку. Поскольку индуктивностью рамки можно пренебречь, для силы тока I_1 из закона электромагнитной индукции Фарадея находим:

$$I_1 = -\frac{\dot{\Phi}}{R}.$$

Поскольку рамка выполнена из тонкой проволоки, а величины a и b во много раз меньше x_0 , то индукцию магнитного поля провода можно считать постоянной по всей поверхности, натянутой на контур рамки, и равной $B(x)$, поэтому $\Phi \approx B(x)ab$. Тогда имеем:

$$I_1 = -\frac{ab}{R} \frac{dB(x)}{dt} = -\frac{\mu_0 ab}{2\pi R} \frac{d}{dt} \left(\frac{I}{x} \right),$$

откуда:

$$F_x = \left(\frac{\mu_0 ab}{2\pi} \right)^2 \frac{I}{Rx^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{I}{x} \right).$$

Рассмотрим увеличение силы тока в проводе. Поскольку это увеличение происходит очень быстро, движением рамки и её смещением за время увеличения силы тока в проводе до максимального значения можно пренебречь. Тогда для силы F_x имеем:

$$F_x \approx \left(\frac{\mu_0 ab}{2\pi} \right)^2 \frac{I}{Rx^3} \frac{dI}{dt}.$$

Пусть m и v_x — масса рамки и проекция её скорости на ось x соответственно. Из закона изменения импульса для рамки имеем:

$$m \frac{dv_x}{dt} = \left(\frac{\mu_0 ab}{2\pi} \right)^2 \frac{I}{Rx^3} \frac{dI}{dt}.$$

Умножим закон изменения импульса для рамки на dt :

$$m dv_x = \left(\frac{\mu_0 ab}{2\pi} \right)^2 \frac{I dI}{Rx^3}.$$

Проинтегрируем полученное выражение, обозначив за I_0 максимальную величину силы тока в проводе:

$$\int_0^{v_0} m dv_x = mv_0 = \int_0^{I_0} \left(\frac{\mu_0 ab}{2\pi} \right)^2 \frac{I dI}{Rx_0^3} = \left(\frac{\mu_0 ab I_0}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{2Rx_0^3}.$$

Отметим, что рамка начинает удаляться от провода после достижения в нём максимального значения силы тока.

Проанализируем дальнейшее движение рамки. Для этого получим выражение для силы F_x при постоянном значении силы тока в проводе $I = I_0$:

$$F_x = \left(\frac{\mu_0 ab I_0}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{Rx^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{x} \right) = - \left(\frac{\mu_0 ab I_0}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{Rx^4} \frac{dx}{dt}.$$

Запишем закон изменения импульса для рамки:

$$m \frac{dv_x}{dt} = - \left(\frac{\mu_0 ab I_0}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{Rx^4} \frac{dx}{dt}.$$

Умножим закон изменения импульса для рамки на dt :

$$m dv_x = - \left(\frac{\mu_0 ab I_0}{2\pi} \right)^2 \frac{dx}{Rx^4}.$$

Проинтегрируем полученное выражение в предположении, что рамка удаляется бесконечно далеко от провода, обозначив за v_{1x} проекцию скорости рамки на ось x на бесконечном удалении от провода. Поскольку скорость рамки уменьшается, предположение окажется оправданным в том случае, если величина v_{1x} окажется положительной. Имеем:

$$m(v_{1x} - v_0) = - \frac{1}{R} \left(\frac{\mu_0 ab I_0}{2\pi} \right)^2 \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{x^4} = - \frac{1}{3Rx_0^3} \left(\frac{\mu_0 ab I_0}{2\pi} \right)^2 = - \frac{2mv_0}{3}.$$

Отсюда:

$$v_{1x} = \frac{v_0}{3}.$$

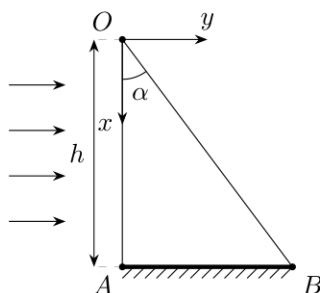
Поскольку $v_{1x} > 0$, рамка в процессе движения после достижения силой тока в проводе максимального значения никогда не останавливалась, а значит, полученное значение является ответом на вопрос задачи. Если бы величина v_{1x} оказалась отрицательной, то скорость рамки и расстояние между рамкой и проводом асимптотически стремились бы к нулю и к постоянному значению соответственно. Таким образом:

$$v_1 = \frac{v_0}{3}.$$

Задача 5 Неоднородность в призме

Экспериментатор Глюк проводит оптические исследования со сплошной призмой, поперечное сечение OAB которой представляет собой прямоугольный треугольник с катетами AB и $OA = h$. Все грани призмы либо параллельны, либо перпендикулярны плоскости рисунка. Если ввести прямоугольную систему координат xOy с началом в точке O так, как показано на рисунке, то показатель преломления материала призмы зависит только от координаты x по закону:

$$n(x) = \frac{3}{2 - x/h}.$$



Глюк решил целиком осветить грань призмы, содержащую OA и перпендикулярную плоскости рисунка, перпендикулярным ей пучком света. Дно призмы, содержащее AB и перпендикулярное плоскости рисунка, покрыто веществом, полностью поглощающим попавший на неё свет. Призма расположена в воздухе, показатель преломления которого можно считать равным единице. Далее рассматривайте только лучи, попадающие внутрь призмы через точки, расположенные на стороне OA призмы.

1. Рассмотрим луч, попадающий в призму в точке с координатой x_0 . Найдите уравнение траектории данного луча внутри призмы до попадания на стороны AB и OB призмы. Значения x , при которых полученное уравнение траектории является применимым, находить не обязательно.
2. При каких значениях угла $\angle AOB = \alpha$ лучи света попадают во все точки стороны OB сечения призмы?
3. При каких значениях угла α все лучи, достигнувшие стороны OB сечения призмы, преломляются и проходят в воздух?

Подсказка

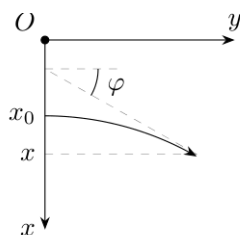
В слоистой среде сохраняется $n(x) \cos \varphi$, где φ — угол луча с осью y . Покажите, что радиус кривизны траектории при этом постоянен: лучи идут по дугам окружностей, и у всех лучей центр в одной точке.

Ответ

- 1) $y^2 + (x - 2h)^2 = (2h - x_0)^2$ — дуга окружности с центром в точке $x = 2h, y = 0$; 2) $\alpha \leq 45^\circ$;
3) $\alpha \leq \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{3} \approx 9,74^\circ$.

Решение

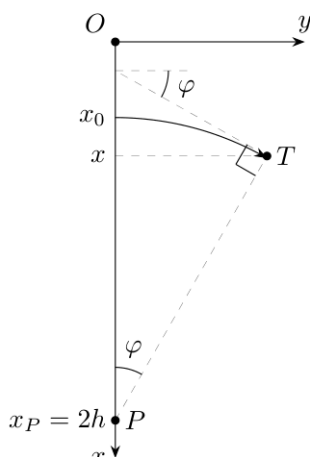
1. Поскольку пучок света направлен по нормали к грани призмы, на которую он падает, на входе в призму пучок не преломляется. Исследуем траектории лучей внутри призмы. Пусть φ — угол между направлением распространения луча и осью y , а x_0 — координата точки входа луча в призму. При этом угол падения на границу раздела сред равен $90^\circ - \varphi$, поэтому из закона Снелла следует:



$$n \cos \varphi = \frac{3 \cos \varphi}{2 - \frac{x}{h}} = \frac{3}{2 - \frac{x_0}{h}} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{2h - x}{2h - x_0}.$$

Первое решение. Обратим внимание на соотношение:

$$\frac{2h - x}{\cos \varphi} = 2h - x_0 = \text{const.}$$



Проведём через некоторую точку T траектории луча линию, перпендикулярную направлению его распространения, до точки P такой, что $x_P = 2h$. Обратим внимание, что расстояние между точками P и T является постоянной величиной, равной $2h - x_0$. Поскольку свет распространяется в направлении, перпендикулярном PT , а $PT = 2h - x_0 = \text{const}$ и $x_P = 2h = \text{const}$ — положение точки P является постоянным, поскольку её смещение должно быть одновременно перпендикулярно PT и оси x , что невозможно. Значит, траектория луча света до попадания на стороны AB и OB сечения призмы представляет собой окружность с центром в точке P . Обратим внимание, что сразу после преломления все лучи света распространяются вдоль оси

y , а значит, для каждого луча центр окружности лежит в точке P такой, что $x_P = 2h$ и $y_P = 0$.
Окончательно:

$$y^2 + (x - 2h)^2 = (2h - x_0)^2.$$

Второе решение. Продифференцируем выражение, полученное из закона Снелла:

$$dx = (2h - x_0) \sin \varphi d\varphi.$$

Изменения координат dx и dy можно связать с помощью угла φ :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dx}{dy}.$$

Найдём изменение dy координаты y при изменении угла φ на величину $d\varphi$:

$$dy = dx \operatorname{ctg} \varphi = (2h - x_0) \operatorname{ctg} \varphi \sin \varphi d\varphi = (2h - x_0) \cos \varphi d\varphi.$$

Величине $y = 0$ соответствует $\varphi = 0$. Тогда получим:

$$y(\varphi) = (2h - x_0) \int_0^\varphi \cos \varphi d\varphi = (2h - x_0) \sin \varphi.$$

Теперь получим выражение, связывающее y и x :

$$1 = \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = \left(\frac{y}{2h - x_0} \right)^2 + \left(\frac{x - 2h}{2h - x_0} \right)^2,$$

откуда:

$$y^2 + (x - 2h)^2 = (2h - x_0)^2.$$

Третье решение. Получим зависимость $y(x)$ для траектории луча света. Для этого избавимся от угла φ :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dx}{dy}.$$

Поскольку $\varphi > 0$:

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \varphi} - 1} = \sqrt{\left(\frac{2h - x_0}{2h - x} \right)^2 - 1} = \frac{dx}{dy}.$$

Учитывая, что $2h > x$, получим:

$$y(x) = \int_{x_0}^x \frac{(2h - x) dx}{\sqrt{(2h - x_0)^2 - (2h - x)^2}} = \int_{2h-x_0}^{2h-x} \frac{x' dx'}{\sqrt{(2h - x_0)^2 - x'^2}}.$$

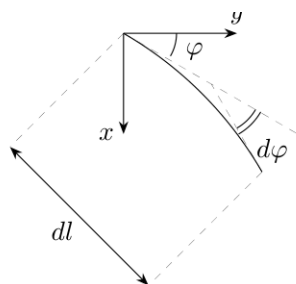
Отсюда:

$$y(x) = \sqrt{(2h - x_0)^2 - (2h - x)^2} \Rightarrow y^2 + (x - 2h)^2 = (2h - x_0)^2.$$

Четвёртое решение. Для радиуса кривизны ρ траектории луча имеем:

$$\rho = \frac{dl}{d\varphi},$$

где dl — элемент пути, пройденного лучом. Но $dl = dx / \sin \varphi$, откуда:



$$\rho = \frac{1}{\sin \varphi} \frac{dx}{d\varphi} = -\frac{dx}{d \cos \varphi}.$$

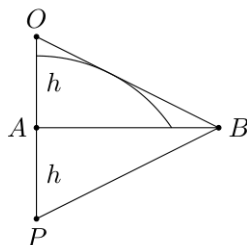
Продифференцируем выражение, полученное из закона Снелла:

$$-\frac{dx}{d \cos \varphi} = 2h - x_0 = \rho = \text{const}.$$

Таким образом, радиус кривизны траектории каждого луча остаётся постоянным, т. е. траектория луча света до попадания на стороны AB и OB сечения призмы представляет собой дугу окружности радиусом $2h - x_0$. Обратим внимание, что сразу после преломления все лучи света распространяются вдоль оси y , а значит, для каждого луча центр окружности лежит в точке P такой, что $x_P = 2h - x_0 + x_0 = 2h$ и $y_P = 0$. Окончательно:

$$y^2 + (x - 2h)^2 = (2h - x_0)^2.$$

2. Из решения первого пункта следует, что траектории любого луча внутри призмы до попадания на AB и OB сечения призмы являются дугами окружностей, лежащими в плоскости рисунка, а центры этих окружностей расположены в точке P такой, что $x_P = 2h$, а $y_P = 0$.



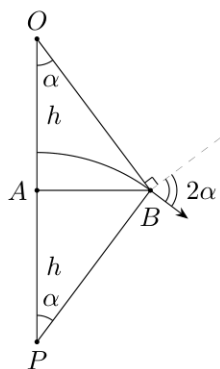
Обратим внимание, что радиус окружности уменьшается с увеличением координаты x_0 . Расстояние от точки P до точки пересечения дуги окружности с OB уменьшается вплоть до момента, пока дуга окружности не коснётся рассматриваемой грани. При дальнейшем увеличении координаты x_0 дуги окружности не будут пересекать OB . Таким образом, лучи достигнут всех точек OB при условии отсутствия точек касания с дугами окружностей, а значит, угол $\angle PBO$ не должен быть острым. Поскольку треугольник OPB является равнобедренным, имеем:

$$\angle PBO = 180^\circ - 2\alpha \geq 90^\circ,$$

откуда:

$$\alpha \leq 45^\circ.$$

3. Обратим внимание, что при увеличении координаты x_0 угол падения лучей на OB будет увеличиваться, как и показатель преломления вещества призмы. Тогда условие, при котором все лучи, достигнувшие OB , попадают в воздух, состоит в том, что лучи, достигнувшие её вблизи точки B , не испытают полного отражения. Поскольку исходно такие лучи падают под углом α к OB и поворачивают на угол α при движении по дуге окружности — угол падения луча в момент достижения OB равен 2α .



Тогда имеем:

$$n(h) \sin 2\alpha = 3 \sin 2\alpha \leq 1,$$

откуда:

$$\alpha \leq \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{3} \approx 9,74^\circ.$$