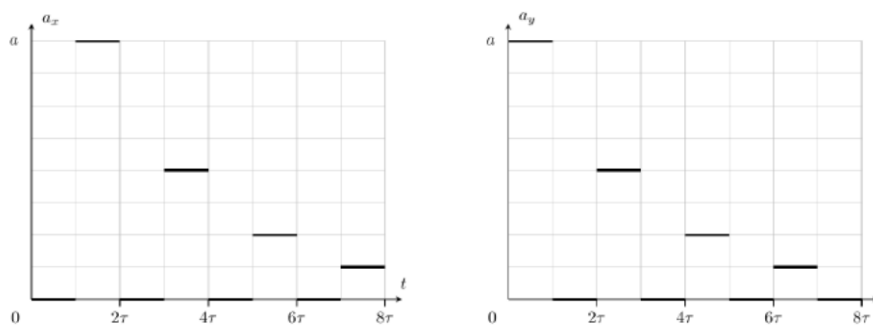


ВсОШ, 2024/25, региональный этап, 9 класс, теоретический тур

Всероссийская олимпиада школьников по физике [Условия, ответы и решения](#)

Задача 1 Импульсное ускорение

Частица двигалась в плоскости Oxy в положительном направлении оси x с постоянной скоростью, параллельной оси x . В момент времени $t = 0$ на неё начала действовать переменная сила, которая лежит в плоскости Oxy . Действие этой силы привело к возникновению ускорения, которое периодически изменяло своё направление. Модуль ускорения при $t = 0$ был равен a и через каждый промежуток времени 2τ уменьшался в 2 раза. На рисунке представлены графики зависимости проекций ускорения частицы от времени за некоторый начальный интервал времени.



Считая известными a и τ , определите максимальную и минимальную (по модулю) скорости частицы, которая двигалась под действием этой силы в течение долгого времени. При этом скорость частицы отклонялась от первоначального направления движения на максимальный угол α .

Примечание: сумма бесконечной геометрической прогрессии $b + bq + bq^2 + bq^3 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} bq^i = \frac{b}{1-q}$, где $|q| < 1$.

Подсказка

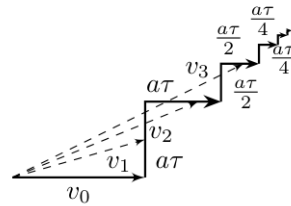
Нарисуйте векторную диаграмму: за каждый интервал τ к скорости добавляется отрезок $a\tau$, $a\tau/2$, ... попеременно вдоль y и вдоль x . Скорость только растёт, а наибольший угол отклонения достигается либо после первого «шага», либо в пределе — это зависит от v_0 .

Ответ

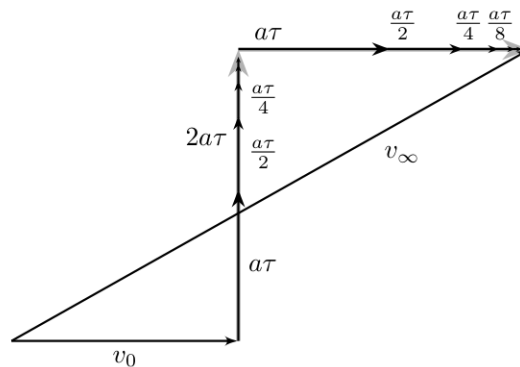
Если $v_0 \leq 2a\tau$: $v_{\min} = a\tau \operatorname{ctg} \alpha$, $v_{\max} = a\tau \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha + 4 \operatorname{ctg} \alpha + 8}$; если $v_0 \geq 2a\tau$: $v_{\min} = 2a\tau(\operatorname{ctg} \alpha - 1)$, $v_{\max} = \frac{2a\tau}{\sin \alpha}$.

Решение

Изобразим с помощью векторной диаграммы как изменялась скорость частицы.



Можно заметить, что скорость частицы монотонно возрастала со временем, значит минимальная по модулю скорость была в начале, а максимальная в конце движения (при очень большом времени). Перегруппируем векторы приращения скоростей.



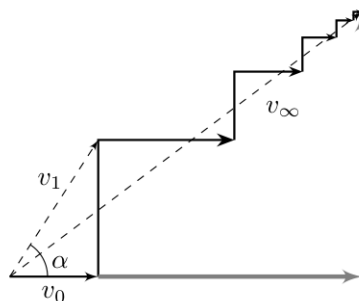
Воспользовавшись формулой для суммы геометрической прогрессии, получим, что изменение проекции скорости на ось x за длительное время (бесконечное количество циклов) будет $2a\tau$. Аналогично изменится и y компонента скорости. Значит, максимальная скорость в процессе движения:

$$v_\infty = \sqrt{(v_0 + 2a\tau)^2 + (2a\tau)^2}.$$

Выразим начальную скорость через $a\tau$. Угол отклонения вектора скорости через время τ после начала движения: $\operatorname{tg} \alpha_1 = (a\tau)/v_0$. Через большое время после начала движения — $\operatorname{tg} \alpha_\infty = (2a\tau)/(v_0 + 2a\tau)$. Тогда возможны два варианта:

1) если начальная скорость мала, тогда максимальное отклонение вектора скорости будет через τ после начала движения:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 \geq \operatorname{tg} \alpha_\infty \Rightarrow \alpha_1 = \alpha.$$

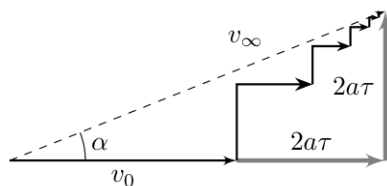


Рассматриваемый случай реализуется при $v_0 \leq 2a\tau$. Тогда:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a\tau}{v_0} \Rightarrow v_{\min} = v_0 = a\tau \cdot \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$v_{\max} = v_\infty = \sqrt{(a\tau \cdot \operatorname{ctg} \alpha + 2a\tau)^2 + (2a\tau)^2} = a\tau \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha + 4 \operatorname{ctg} \alpha + 8}.$$

2) Если $v_0 \geq 2a\tau$, то максимальное отклонение вектора скорости будет в предельной ситуации ($\alpha_\infty = \alpha$).

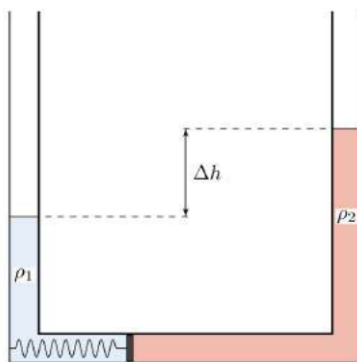


$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2a\tau}{v_0 + 2a\tau} \Rightarrow v_{\min} = v_0 = 2a\tau \cdot (\operatorname{ctg} \alpha - 1);$$

$$v_{\max} = v_\infty = \frac{2a\tau}{\sin \alpha}.$$

Задача 2 Другой уровень

Тонкая трубка площадью поперечного сечения S изогнута в виде перевернутой буквы П (см. рисунок). В горизонтальной части трубки находится невесомый поршень, который связан с левой стенкой пружиной. В вертикальных концах трубки в равновесии находятся две жидкости: в левой — жидкость плотностью ρ_1 , а в правой — жидкость плотностью $\rho_2 < \rho_1$. При этом разность уровней верхних границ жидкостей в вертикальных коленах составляет Δh , а пружина недеформирована. Коэффициент жёсткости k пружины подобран таким образом, чтобы при добавлении в левое колено жидкости плотностью ρ_1 разность уровней Δh всё время оставалась постоянной.



1. Чему равен коэффициент жёсткости k ?

В левую часть трубки добавляют объём ΔV жидкости плотностью ρ_2 , при этом верхние границы жидкостей в вертикальных частях оказываются на одном уровне.

2. Определите, какой объём ΔV жидкости добавили в левое колено?

Поршень скользит без трения. Жидкость между поршнем и стенками сосуда не подтекает и не выливается из сосуда. Объёмом пружины можно пренебречь, жидкости не смешиваются и не перетекают в другое вертикальное колено. Ускорение свободного падения равно g .

Подсказка

Запишите равновесие поршня: давления столбов жидкости слева и справа плюс сила пружины. Если поршень сдвинулся на x , правый уровень поднялся на x , а левый — на столько, на сколько долили, минус x .

Ответ

$$1) k = (\rho_1 - \rho_2)gS; \quad 2) \Delta V = \frac{\rho_1 \Delta h S}{\rho_1 - \rho_2}.$$

Решение

Так как оба конца трубки открыты в атмосферу, атмосферное давление можно не учитывать. Условие равновесия поршня в начальном положении:

$$\rho_1 g h_1 S = \rho_2 g h_2 S,$$

где h_1 и h_2 — высота столба жидкости выше центра поршня в левой и правой частях соответственно. При добавлении жидкости плотностью ρ_1 в левый сосуд поршень сместится на расстояние x вправо, и на него начнёт действовать сила упругости. Условие равновесия поршня после добавления некоторого количества жидкости:

$$\rho_1 g H_1 S = \rho_2 g H_2 S + kx.$$

После перемещения поршня на расстояние x , уровень жидкости в правой части тоже увеличится на x :

$$\rho_1 g (h_1 + y) S = \rho_2 g (h_2 + x) S + kx,$$

где y — высота, на которую увеличился уровень жидкости в левом сосуде. Для того чтобы разность высот Δh оставалась постоянной, y должно равняться x . Тогда:

$$k = (\rho_1 - \rho_2)gS.$$

Условие равновесия поршня после добавления в левую часть объёма ΔV жидкости плотностью ρ_2 :

$$\rho_1 g (h_1 - x) S + \rho_2 g z S = \rho_2 g (h_2 + x) S + kx.$$

Чтобы верхние границы жидкостей совпадали, высота z добавленной в левое колено жидкости плотностью ρ_2 должна быть равна: $z = \Delta h + 2x$. Тогда, с учётом найденного коэффициента жёсткости пружины $k = (\rho_1 - \rho_2)gS$:

$$x = \frac{\rho_2 \Delta h}{2(\rho_1 - \rho_2)}.$$

Убедимся, что при перемещении поршня на расстояние x в левой вертикальной части трубки останется жидкость плотностью ρ_1 . Условие равновесия поршня в начальный момент:

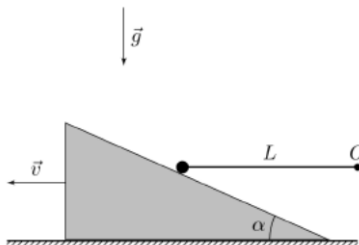
$$\rho_1 g h_1 S = \rho_2 g (h_1 + \Delta h) S \Rightarrow h_1 = \frac{\rho_2 \Delta h}{\rho_1 - \rho_2} \Rightarrow h_1 > x.$$

Объём добавленной жидкости может быть найден по формуле: $\Delta V = S(\Delta h + 2x)$. Подставив в это выражение значение x , найдём ΔV :

$$\Delta V = \frac{\rho_1 \Delta h S}{\rho_1 - \rho_2}.$$

Задача 3 Не падать

Один конец невесомого жесткого стержня длиной L с закреплённым на конце маленьким шариком массой m касается массивного клина с углом α при основании (см. рисунок). Другой конец стержня шарнирно закреплён в точке O . Систему удерживают в некотором положении, а затем отпускают. В момент, когда стержень горизонтален, шарик отрывается от клина.



Определите скорость v клина в этот момент.

Ускорение свободного падения g считайте известным. Трения в системе нет.

Подсказка

В момент отрыва на клин действуют только вертикальные силы, поэтому его ускорение равно нулю, а ускорение шарика направлено вдоль поверхности клина. Разложите ускорение шарика на касательную (g) и центростремительную (u^2/L) составляющие и свяжите скорости шарика и клина условием контакта.

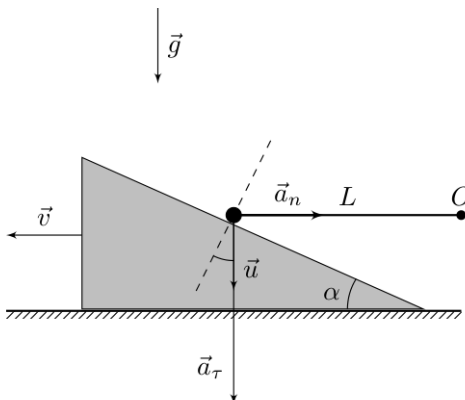
Ответ

$$v = \sqrt{\frac{gL}{\operatorname{tg}^3 \alpha}} = \sqrt{gL \operatorname{ctg}^3 \alpha}.$$

Решение

Чтобы шарик скользил по наклонной поверхности без отрыва, необходимо, чтобы проекции скорости v клина и скорости u шарика на ось нормальную к поверхности были равны. Запишем кинематическую связь для момента, когда стержень горизонтален:

$$u \cos \alpha = v \sin \alpha \Rightarrow u = v \operatorname{tg} \alpha.$$



Поскольку ось, перпендикулярная наклонной поверхности клина, постоянна по направлению, а проекции скоростей клина и шарика на эту ось одинаковы, то и проекции ускорений клина и шарика на данную ось также равны. После отрыва шарика от клина все действующие на клин

силы вертикальны. В результате этого клин начинает двигаться равномерно. Следовательно, в момент отрыва проекция ускорения шарика на нормаль к поверхности клина равна нулю.

Равенство нулю проекции ускорения шарика в момент отрыва можно доказать другим способом: перейдём в поступательно движущуюся систему отсчёта, связанную с клином. В этой системе отсчёта относительное ускорение шарика будет направлено вдоль наклонной поверхности клина. Поскольку в момент отрыва шарика от клина все действующие на клин силы вертикальны, его ускорение равно нулю. Это означает, что в лабораторной системе отсчёта ускорение шарика тоже будет направлено вдоль поверхности клина.

Так как стержень нерастяжимый, движение шарика представляет собой движение по окружности радиусом L . Найдём тангенциальную a_τ и нормальную a_n компоненты ускорения шарика. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на вертикальную ось. Так как по условию в рассматриваемый момент шарик отрывается от поверхности клина, на него действует единственная вертикальная сила — сила тяжести. Исходя из этого, получаем: $ma_\tau = mg \Rightarrow a_\tau = g$. Для нахождения нормальной компоненты ускорения воспользуемся формулой центростремительного ускорения:

$$a_n = \frac{u^2}{L}.$$

Далее рассмотрим три возможных способа определения скорости шарика u в момент отрыва.

Первый способ. Запишем уравнение кинематической связи для проекций ускорений на нормаль к наклонной поверхности клина:

$$0 = a_\tau \cos \alpha - a_n \sin \alpha \Rightarrow a_\tau = a_n \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow g = \frac{u^2}{L} \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow u^2 = gL \operatorname{ctg} \alpha.$$

Второй способ. Вторым закон Ньютона для шарика в момент отрыва:

$$m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g}.$$

Как было доказано ранее, в момент отрыва ускорение шарика в лабораторной системе отсчёта направлено вдоль поверхности клина. Спроецируем второй закон Ньютона на ось перпендикулярную наклонной поверхности клина и получим:

$$T \sin \alpha = mg \cos \alpha.$$

В этот момент шарик движется по окружности с центром в точке O и радиусом L , значит $T = ma_n$. Следовательно:

$$\frac{u^2}{L} \sin \alpha = g \cos \alpha \Rightarrow g = \frac{u^2}{L} \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow u^2 = gL \operatorname{ctg} \alpha.$$

Третий способ. Запишем уравнение кинематической связи для скоростей шарика и клина при скольжении без отрыва в произвольный момент времени:

$$u \cos \varphi = v \sin \alpha,$$

где φ — угол между стержнем и наклонной плоскостью клина. Возьмём производную по времени от кинематической связи:

$$a_\tau \cos \varphi - u \sin \varphi \cdot \omega = a_\kappa \sin \alpha.$$

В рассматриваемый момент $a_\kappa = 0$, так как все силы действующие на клин вертикальны, и $\varphi = \alpha$. Тогда:

$$a_\tau = u\omega \operatorname{tg} \alpha = a_n \operatorname{tg} \alpha = \frac{u^2 \operatorname{tg} \alpha}{L} \Rightarrow g = \frac{u^2 \operatorname{tg} \alpha}{L} \Rightarrow u^2 = gL \operatorname{ctg} \alpha.$$

С учётом того, что $u = v \operatorname{tg} \alpha$, окончательно получим:

$$v = \sqrt{\frac{gL}{\operatorname{tg}^3 \alpha}} = \sqrt{gL \operatorname{ctg}^3 \alpha}.$$

Задача 4 Тепловой цикл

Экспериментатор Глюк поставил на газовую плиту кастрюлю с водой. Вода имеет неизвестные начальные массу M и температуру t_1 . Ненадолго отвлекшись, он обнаружил, что большая часть воды уже выкипела. Глюк осознал, что процесс нагревания нужного количества воды придётся начинать сначала. Он выключил плиту, и с небольшим постоянным массовым расходом μ стал доливать в кастрюлю холодную воду температурой $t_x = 20^\circ\text{C}$. Когда масса воды в кастрюльке стала равна начальной, температура воды также оказалась равна начальной температуре.

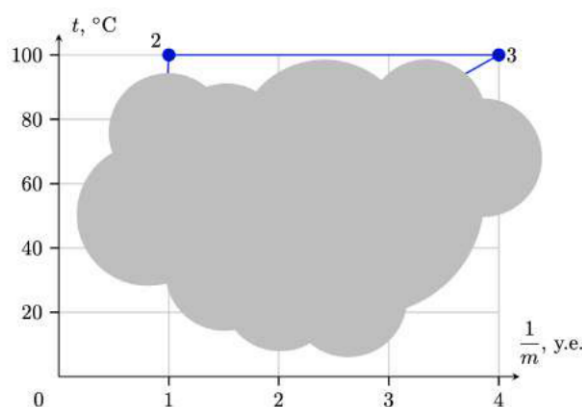


Диаграмма зависимости температуры воды в кастрюле в течение эксперимента от величины, обратной к общей массе воды в кастрюле (см. рисунок), оказалось, представляет собой замкнутый цикл 1 – 2 – 3 – 1, причём времена кипения воды на участке 2 – 3 и доливания холодной воды на участке 3 – 1 одинаковые. После окончания эксперимента Глюк случайно пролил воду на график, поэтому точка 1, участки 1 – 2 и 3 – 1 на графике оказались не видны, а единицы измерения одной из осей потеряны.

1. Считая известным коэффициент полезного действия (КПД) газовой плиты $\eta = 0,5$, массовый расход газа $\mu_0 = 0,14$ г/с и удельную теплоту его сгорания $q = 33$ МДж/кг, определите полезную мощность плиты P . Здесь коэффициентом полезного действия называется отношение полезной мощности, поступающей к воде в кастрюле, к общей мощности, выделяющейся при сгорании газа.
2. Определите массовый расход холодной воды μ на участке 3 – 1.
3. Определите температуру t_1 воды в точке 1. Восстановите вид всей диаграммы.
4. Во сколько раз время τ_{23} , в течение которого вода кипела на участке 2 – 3 больше, чем время τ_{12} нагревания воды на участке 1 – 2?

Тепловых потерь нет. Испарением на участках 1 – 2 и 3 – 1 и теплоёмкостью кастрюли пренебречь. Удельная теплота парообразования воды $L = 2,3$ МДж/кг, удельная теплоёмкость воды $c = 4200$ Дж/(кг · °C), температура кипения воды $t_{100} = 100^\circ\text{C}$.

Подсказка

На участке 1 – 2 масса не меняется — он вертикален, так что масса в точке 3 равна $M/4$. За одинаковое время плита испарила $3M/4$, а долив принёс те же $3M/4$; на участке 3 – 1 запишите тепловой баланс смешивания и найдите $t(m)$.

Ответ

1) $P = \eta \mu_0 q \approx 2,3$ кВт; 2) $\mu = \mu_0 \eta q / L = 1,0$ г/с; 3) $t_1 = 40^\circ\text{C}$, диаграмма — прямоугольный треугольник с вершинами (1; 40), (1; 100), (4; 100); 4) $\tau_{23} / \tau_{12} \approx 6,9$.

Решение

За время $\Delta\tau$ сжигается $\Delta m_0 = \mu_0 \Delta\tau$ газа, то есть выделяется $\Delta Q_{\text{вся}} = \Delta m_0 q$ энергии. Лишь η -ая её часть идёт на нагревание воды $\Delta Q_{\text{эфф}} = \eta \Delta Q_{\text{вся}}$. Тогда эффективная мощность

$$P = \frac{\Delta Q_{\text{эфф}}}{\Delta\tau} = \eta \mu_0 q \approx 2,3 \text{ кВт}.$$

Заметим, что на участке 1 – 2 не происходит изменения массы воды (не происходит испарений и доливаний), т. е. этот участок вертикальный. Обозначим массу воды в точке 1 за M . Уравнение, описывающее испарение на участке 2 – 3:

$$P \tau_{23} = \left(M - \frac{M}{4} \right) L = \frac{3M}{4} L.$$

Уравнение, описывающее доливание воды на участке 3 – 1:

$$\mu \tau_{31} = M - \frac{M}{4} = \frac{3M}{4}.$$

С учётом $\tau_{23} = \tau_{31}$, получим

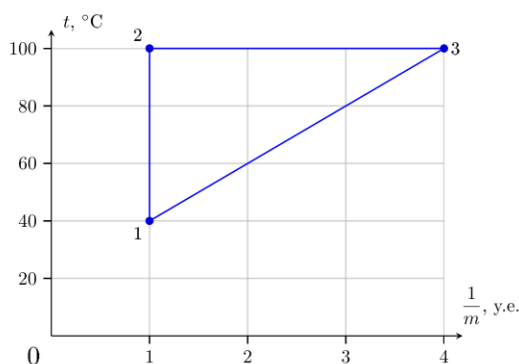
$$\mu = \frac{P}{L} = \mu_0 \frac{\eta q}{L} = 1,0 \text{ г/с}.$$

Уравнение теплового баланса на участке 3 – 1 ($t_{100} = 100^\circ\text{C}$ — температура кипения воды, c — удельная теплоемкость воды, m и t — текущие масса и температура воды на участке 3 – 1):

$$c \frac{M}{4} (t_{100} - t) = c \left(m - \frac{M}{4} \right) (t - t_x).$$

Из него следует зависимость температуры воды от её массы на этом участке

$$t(m) = t_x + \frac{M}{4} (t_{100} - t_x) \cdot \frac{1}{m}.$$



Последняя формула показывает линейность участка 3 – 1. Температура воды при массе, равной начальной M , равна $t_1 = t(M) = t_x + (t_{100} - t_x) / 4 = (t_{100} + 3t_x) / 4 = 40^\circ\text{C}$. Восстановим целостный вид диаграммы — это прямоугольный треугольник с вершинами (1; 40), (1; 100), (4; 100).

$$t_1 = 40^\circ\text{C}.$$

Уравнение, описывающее нагревание на участке 1 – 2:

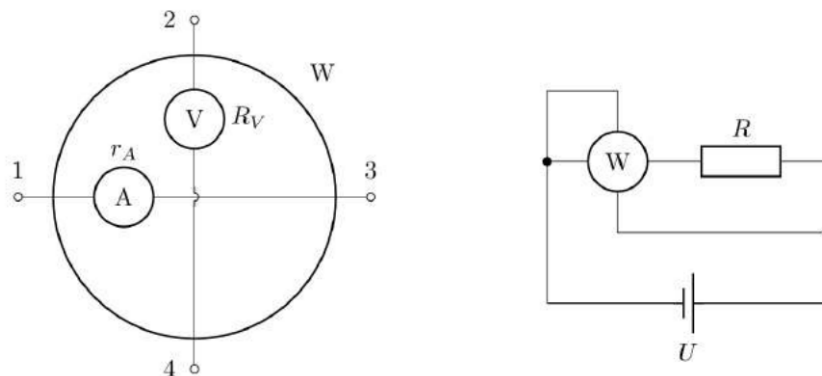
$$P\tau_{12} = cM(t_{100} - t_1).$$

Тогда

$$\frac{\tau_{23}}{\tau_{12}} = \frac{3L}{4c(t_{100} - t_1)} \approx 6,9.$$

Задача 5 Whatметр

Экспериментатор Глюк нашёл на чердаке ваттметр и технический паспорт к нему. В паспорте была схема устройства ваттметра, приведённая на рисунке слева, а также было указано: «Ваттметр выводит на экран модуль произведения показаний амперметра и вольтметра, встроенных внутри прибора. Контакты 1 и 3 подключены к амперметру с внутренним сопротивлением $r_A = 5 \text{ Ом}$, а контакты 2 и 4 — к вольтметру с внутренним сопротивлением $R_V = \infty$ ». К сожалению, от времени чернила выцвели, и Глюк не смог разобрать величину сопротивления вольтметра. Кроме того, на приборе не было видно подписей контактов.



Глюк, решив во всём разобраться, собрал цепь, схема которой изображена на рисунке справа. В цепь он включил идеальный источник постоянного напряжения и резистор сопротивлением $R = 500 \text{ Ом}$. Ваттметр, подключённый к цепи, показал значение $P_1 = 100 \text{ Вт}$. Затем Глюк вытащил ваттметр из цепи, повернул его на 90° и снова вставил в цепь. После этого прибор показал значение $P_2 = 1,0 \text{ Вт}$. Изображение ваттметра на обеих схемах соответствует его внешнему виду.

1. Определите внутреннее сопротивление вольтметра R_V , считая, что оно больше сопротивления амперметра ($R_V > r_A$).
2. Можно ли, используя те же самые элементы, собрать цепь так, чтобы ваттметр показал значение P_3 в диапазоне от 5 мВт до 20 мВт? Ответ подтвердите расчётами и приведите либо доказательство невозможности, либо одну схему, удовлетворяющую интервалу.

Подсказка

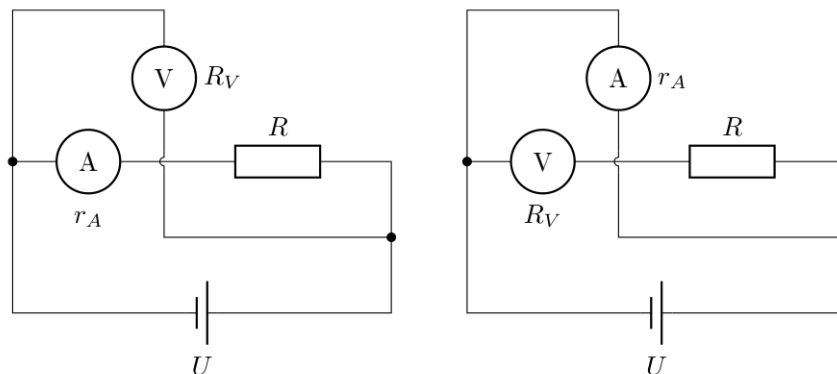
При повороте на 90° амперметр и вольтметр меняются местами в цепи. Запишите показания ваттметра для обоих включений и возьмите их отношение — напряжение источника сократится; из двух вариантов соответствия оставьте тот, где $R_V > r_A$.

Ответ

1) $R_V = 50 \text{ кОм}$; 2) можно: например, по схеме из решения (вольтметр последовательно с источником, амперметр параллельно резистору) $P_3 = P_2(R + r_A)/R_V \approx 10 \text{ мВт}$.

Решение

Необходимо проанализировать два возможных варианта подключения и рассчитать показания ваттметра для каждого из них. Обозначим напряжение на выводах идеального источника постоянного напряжения за U .



В случае левой схемы показания амперметра (I_1) и вольтметра (U_1):

$$\begin{cases} I_1 = \frac{U}{R + r_A}; \\ U_1 = U. \end{cases}$$

По условию показания ваттметра равны произведению показаний амперметра и вольтметра:

$$P'_1 = I_1 U_1 = \frac{U^2}{R + r_A}.$$

В случае правой схемы показания амперметра (I_2) и вольтметра (U_2):

$$\begin{cases} I_2 = \frac{U}{r_A}; \\ I_V = \frac{U}{R + R_V}; \\ U_2 = I_V R_V = \frac{U R_V}{R + R_V}. \end{cases}$$

Тогда показания ваттметра в рассмотренном случае:

$$P'_2 = I_2 U_2 = \frac{U^2}{R + R_V} \cdot \frac{R_V}{r_A}.$$

Отношение показаний ваттметра позволяет исключить напряжение источника.

$$k = \frac{P'_1}{P'_2} = \frac{R + R_V}{R + r_A} \cdot \frac{r_A}{R_V}.$$

Отметим, что индексы 1 и 2 для мощностей в формуле выше не обязаны соответствовать индексам в условии задачи, поскольку нам неизвестно, какая схема была собрана первой. Выразим искомое внутреннее сопротивление вольтметра:

$$R_V = \frac{R}{k \frac{R + r_A}{r_A} - 1}.$$

Подставляем числовые значения, учитывая два возможных варианта соответствия между индексами в условии и нашем решении:

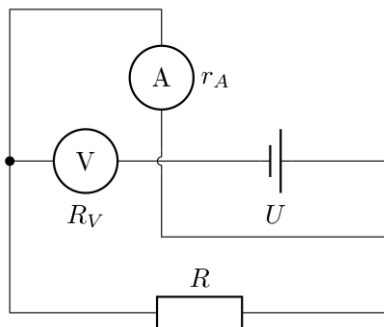
1. $k = 100/1 = 100 \Rightarrow R_V \approx 5,0 \cdot 10^{-2}$ Ом. Величина получилась меньше сопротивления амперметра, значит этот ответ неверный.

2. $k = 1/100 = 0,01 \Rightarrow R_V = 50$ кОм.

Таким образом искомое внутреннее сопротивление вольтметра:

$$R_V = 50 \text{ кОм.}$$

Рассмотрим схему, изображённую на рисунке.



Сила полного тока в цепи:

$$I = \frac{U}{R_V + \frac{Rr_A}{R+r_A}}.$$

С учётом неравенства $R_V \gg R \gg r_A$ получим:

$$I = \frac{U}{R_V + \frac{Rr_A}{R+r_A}} \approx \frac{U}{R_V}.$$

Силу тока, протекающего через амперметр, с учётом неравенства, можно выразить следующим образом:

$$I_A = I \cdot \frac{R}{R+r_A} \approx I = \frac{U}{R_V}.$$

Показания вольтметра равны $U_V = IR_V$, а показания ваттметра:

$$P_3 = I_A U_V = I^2 R_V = \frac{U^2}{R_V}; \quad U^2 = P_2(R+r_A) \Rightarrow P_3 = \frac{P_2(R+r_A)}{R_V} \approx 10 \text{ мВт.}$$