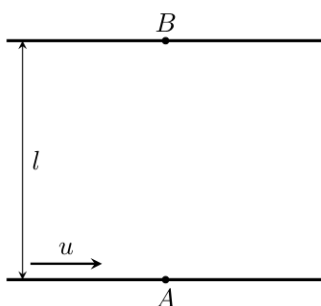


ВсОШ, 2024/25, заключительный этап, 10 класс, теоретический тур

Всероссийская олимпиада школьников по физике [Условия, ответы и решения](#)

Задача 1 Переправа

Из пункта A , расположенного на одном берегу реки шириной l , переправляется на противоположный берег небольшая моторная лодка. Берега реки параллельны друг другу. Скорость течения реки везде одинакова и равна u . На противоположном берегу реки на одном перпендикуляре к берегам с пунктом A расположен пункт B . Скорость лодки **относительно воды** постоянна по величине и равна $2u$, а её вектор в течение всего времени переправы перпендикулярен прямой BC , где C — центр лодки. В некоторый момент времени t_1 скорость лодки **относительно берега** перпендикулярна линии берега.



1. В каком направлении лодка начала движение из пункта A : по течению или против течения? Ответ обоснуйте.
2. Найдите угол $\angle ABC$ в момент времени t_1 .
3. На каком расстоянии от пункта B будет находиться лодка, когда она достигнет противоположного берега реки?
4. На каком расстоянии от пункта B будет находиться лодка в момент времени t_1 ?
5. Найдите радиус кривизны траектории лодки в системе отсчёта берега для двух случаев: а) в момент старта из пункта A ; б) в момент времени t_1 .

Подсказка

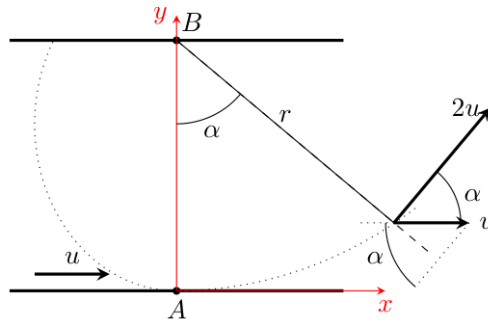
Запишите, как за малое время меняются расстояние $r = BC$ и координата y поперёк реки: из них складывается величина, которая не меняется. Ускорение лодки относительно берега — это только поворот вектора её скорости относительно воды.

Ответ

- 1) против течения; 2) $\angle ABC = 60^\circ$; 3) $l/2$; 4) $2l/3$; 5) а) $R_A = l/2$, б) $R_1 = \frac{4\sqrt{3}}{9} l$.

Решение

Рассмотрим случай, когда лодка начинает движение по течению реки. Введём систему координат с началом в пункте A , ось x направим вдоль скорости течения, а ось y направим к пункту B . Пусть r — расстояние от точки B до центра лодки, $\angle ABC = \alpha$. Тогда для движения «по течению» элементарные приращения за малое время dt :



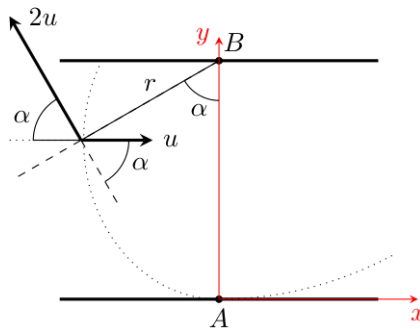
$$dr = u \sin \alpha dt, \quad (1)$$

$$dx = 2u \cos \alpha dt + u dt, \quad (2)$$

$$dy = 2u \sin \alpha dt. \quad (3)$$

В любой момент времени до достижения лодкой противоположного берега $0 \leq \alpha \leq \pi/2$, поэтому $v_x = \frac{dx}{dt} = 2u \cos \alpha + u \geq u > 0$. Поэтому скорость относительно берега не может быть направлена перпендикулярно линии берега. Отсюда делаем вывод, что лодка начала движение из пункта A против течения.

Итак, лодка начинает движение против течения реки. Введём также систему координат с началом в пункте A , ось x направим вдоль скорости течения, а ось y направим к пункту B , r — расстояние от точки B до центра лодки, $\angle ABC = \alpha$. Тогда для движения «против течения» элементарные приращения за малое время dt :



$$dr = -u \sin \alpha dt, \quad (4)$$

$$dx = -2u \cos \alpha dt + u dt, \quad (5)$$

$$dy = 2u \sin \alpha dt. \quad (6)$$

При движении перпендикулярно линии берега $dx = 0$, тогда из уравнения (5) следует $-2u \cos \alpha + u = 0 \Rightarrow \cos \alpha = 1/2 \Rightarrow \alpha = 60^\circ = \pi/3$.

Умножая уравнение (4) на 2 и складывая с уравнением (6), получим

$$2dr + dy = 0 \Rightarrow 2r + y = \text{const.}$$

Вычислим эту константу в момент начала движения ($r_A = l$, $y_A = 0$), откуда $r(y) = l - y/2$. В момент достижения противоположного берега

$$y_B = l \Rightarrow r_B = l/2.$$

В момент времени t_1 из геометрических соображений можно записать, что $r \cos \alpha = l - y$. Подставляя зависимость $r(y)$ и значение угла α в этот момент времени, получаем уравнение:

$$\frac{1}{2}(l - y_1/2) = l - y_1 \implies y_1 = \frac{2}{3}l \implies r_1 = \frac{2}{3}l.$$

Для нахождения радиуса кривизны траектории найдём скорость и ускорение в нужных точках. Скорость относительно берега равна сумме скорости воды $\vec{u}$ в реке и скорости лодки $\vec{u}_л$ относительно воды: $\vec{v} = \vec{u} + \vec{u}_л$. После возведения в квадрат получаем: $v = \sqrt{\vec{u}^2 + \vec{u}_л^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{u}_л)} = \sqrt{u^2 + 4u^2 + 4u^2 \cos \angle(\vec{u}, \vec{u}_л)} = u\sqrt{5 + 4 \cos \angle(\vec{u}, \vec{u}_л)}$. Для точки старта $\angle(\vec{u}, \vec{u}_л) = \pi$, тогда скорость равна $v_A = u$. Для момента времени t_1 угол между скоростями $\angle(\vec{u}, \vec{u}_л) = \pi - \alpha$, тогда скорость равна $v_1 = u\sqrt{3}$.

Скорость лодки равна векторной сумме скоростей течения воды и лодки относительно воды. Скорость течения не меняется ни по модулю, ни по направлению. Скорость лодки не меняется по модулю, но меняется по направлению. Производная вектора скорости лодки по модулю равна произведению угловой скорости вращения вектора $\vec{u}_л$ на модуль этого вектора. Получим выражение для ускорения лодки:

$$\vec{a}_{abc} = \frac{d}{dt}(\vec{u} + \vec{u}_л) = \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d\vec{u}_л}{dt} = \vec{a}_л,$$

$$|\vec{a}_л| = 2u \cdot \omega_\alpha = 2u \frac{d\alpha}{dt}.$$

Для нахождения производной угла α надо компоненту скорости, перпендикулярную отрезку BC , разделить на расстояние r :

$$v_\perp = 2u - u \cos \alpha,$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega_\alpha = \frac{2u - u \cos \alpha}{r}.$$

В момент выхода из пункта A угол $\alpha = 0$, поэтому:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{u}{l} \implies a_A = \frac{2u^2}{l}.$$

В момент времени t_1 угол $\alpha = \pi/3$, значит:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{3u/2}{2l/3} = \frac{9u}{4l} \implies a_1 = \frac{9u^2}{2l}.$$

В пункте отправления скорость и ускорение взаимно перпендикулярны, поэтому найти радиус кривизны траектории можно следующим образом:

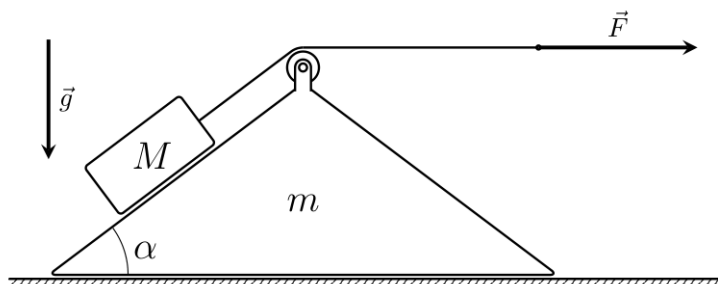
$$R_A = \frac{v_A^2}{a_A} = \frac{l}{2}.$$

Для момента времени t_1 найдём проекцию ускорения на перпендикуляр к скорости движения, т. е. на ось Ox : $a_{1x} = a_1 \sin \alpha = \frac{9u^2\sqrt{3}}{4l}$, тогда радиус кривизны траектории в этой точке:

$$R_1 = \frac{v_1^2}{a_{1x}} = \frac{4\sqrt{3}l}{9}.$$

Задача 2 Призма

На шероховатой горизонтальной поверхности стола находится система, состоящая из призмы массой m , снабжённой лёгким блоком, и бруска массой $M = 2m$ (см. рис.). Боковая поверхность призмы является гладкой, а угол между гранью, на которой находится брусок, и поверхностью стола равен α ($\sin \alpha = 3/5$). К бруску привязана лёгкая нерастяжимая нить, перекинута через блок, к противоположному концу которой приложена горизонтальная сила F . Известно, что ускорение призмы не зависит от величины этой силы.



1. Определите возможные значения коэффициента трения μ между призмой и поверхностью стола.
2. Для каждого из полученных в пункте 1 значений μ найдите ускорение призмы a .

Ускорение свободного падения равно g . Наклонный отрезок нити параллелен левой боковой грани призмы. Трение в оси блока отсутствует.

Подсказка

Сначала найдите силу давления бруска на призму в её системе отсчёта: она не содержит F . Далее два случая: если призма скользит, все слагаемые с F в её уравнении движения должны сократиться; если покоится — трения должно хватать при любом F , в том числе при $F = 0$.

Ответ

1) $\mu = 1/3$ или $\mu \geq 8/19 \approx 0,42$; 2) при $\mu = 1/3$ $a = g/7$, при $\mu \geq 8/19$ $a = 0$.

Решение

Первый способ решения.

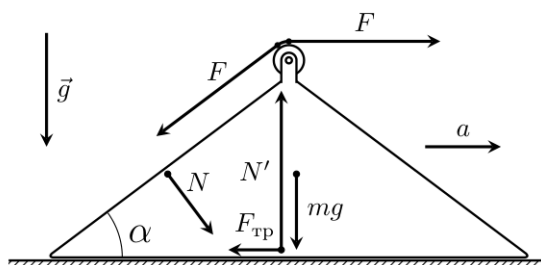


Рис. 1

Изобразим силы, действующие на призму (рис. 1). Обозначим N силу взаимодействия между бруском и призмой, N' — силу нормальной реакции, а $F_{\text{тр}}$ — силу трения, действующие на призму со стороны стола. Тогда

$$ma = N \sin \alpha + F(1 - \cos \alpha) - F_{\text{тр}},$$

$$N' = N \cos \alpha + F \sin \alpha + mg,$$

$$F_{\text{тр}} \leq \mu(N \cos \alpha + F \sin \alpha + mg).$$

Ускорение бруска относительно стола, для удобства, разложим на две составляющие: ускорение призмы a и ускорение бруска относительно поверхности призмы a' , которое направлено параллельно её левой боковой поверхности (рис. 2). Запишем второй закон Ньютона для бруска в проекции на ось, перпендикулярную направлению его относительного движения

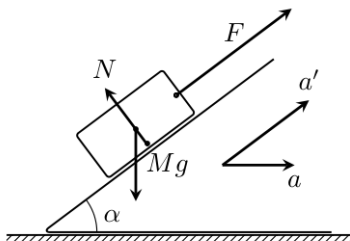


Рис. 2

$$-Ma \sin \alpha = -Mg \cos \alpha + N \quad \Rightarrow \quad N = Mg \cos \alpha - Ma \sin \alpha.$$

Полученная формула для N не содержит явно величину силы F , а ускорение призмы, согласно условию, не зависит от F . Отсюда следует, что и N не зависит от величины этой силы.

Рассмотрим два случая: 1) призма движется относительно стола; 2) трение не позволяет призме двигаться.

1. Пусть призма скользит по поверхности стола, то есть $a > 0$. Тогда

$$F_{\text{тр}} = \mu(N \cos \alpha + F \sin \alpha + mg) \quad \text{и} \quad ma = N \sin \alpha + F(1 - \cos \alpha) - \mu(N \cos \alpha + F \sin \alpha + mg).$$

Чтобы ускорение a не зависело от силы F , все слагаемые, включающие её, должны сократиться. Это возможно, если

$$1 - \cos \alpha = \mu \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1 - 4/5}{3/5} = \frac{1}{3}.$$

2. Пусть теперь призма не скользит, то есть $a = 0$. Тогда $N = Mg \cos \alpha$ и

$$F_{\text{тр}} = F(1 - \cos \alpha) + Mg \sin \alpha \cos \alpha \leq \mu(Mg \cos^2 \alpha + F \sin \alpha + mg).$$

Перегруппируем выражения в полученном неравенстве:

$$F(1 - \cos \alpha - \mu \sin \alpha) \leq \mu(Mg \cos^2 \alpha + m) - Mg \sin \alpha \cos \alpha.$$

Так как оно должно выполняться при любых значениях F (в том числе, при $F = 0$), выражение в правой части должно быть неотрицательным, а выражение в левой части — наоборот, неположительным. Отсюда следует, что

$$\mu \geq \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{3} \quad \text{и} \quad \mu \geq \frac{M \sin \alpha \cos \alpha}{M \cos^2 \alpha + m} = \frac{2 \cdot 3/5 \cdot 4/5}{2 \cdot (4/5)^2 + 1} = \frac{8}{19} \approx 0,42.$$

Поскольку последнее неравенство — более сильное, получим, что призма будет покоиться при любом значении F , если $\mu \geq 8/19$.

Используя полученное выше значение $\mu = 1/3$, найдём величину ускорения a в случае, когда призма скользит по столу:

$$\begin{aligned} ma &= N(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - \mu mg = M(g \cos \alpha - a \sin \alpha)(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - \mu mg \Rightarrow \\ \Rightarrow a &= 2 \left(g \cdot \frac{4}{5} - a \cdot \frac{3}{5} \right) \cdot \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} \right) - \frac{1}{3} \cdot g = g \cdot \frac{8}{15} - a \cdot \frac{2}{5} - \frac{g}{3} \Rightarrow a = \frac{g}{7}. \end{aligned}$$

Второй способ решения. Изобразим силы, действующие на призму (рис. 1). Обозначим N силу взаимодействия между брусом и призмой, N' — силу нормальной реакции, а $F_{\text{тр}}$ — силу трения, действующие на призму со стороны стола. Тогда, из второго закона Ньютона в проекции на вертикальную ось:

$$N' = N \cos \alpha + F \sin \alpha + mg.$$

Ускорение бруса относительно стола, для удобства, разложим на две составляющие: ускорение призмы a и ускорение бруса относительно поверхности призмы a' , которое направлено параллельно её левой боковой поверхности (рис. 2). Запишем второй закон Ньютона для бруса в проекции на ось, перпендикулярную направлению его относительного движения

$$-Ma \sin \alpha = -Mg \cos \alpha + N \quad \Rightarrow \quad N = Mg \cos \alpha - Ma \sin \alpha.$$

Полученная формула для N не содержит явно величину силы F , а ускорение призмы, согласно условию, не зависит от F . Отсюда следует, что и N не зависит от величины этой силы.

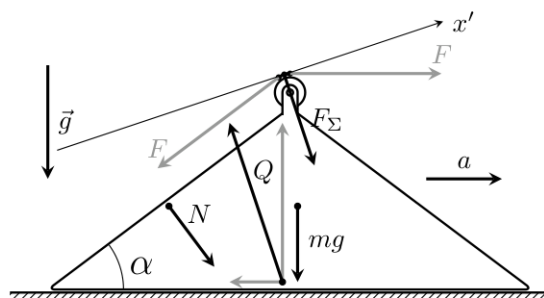


Рис. 3

Рассмотрим случай, когда призма скользит. Результирующая сила $\vec{F}_{\Sigma}$, действующая на блок со стороны нити, направлена под углом $\alpha/2$ к вертикали (рис. 3). Вместо N' и $F_{\text{тр}}$ введём вектор полной силы реакции опоры

$$\vec{Q} = \vec{N}' + \vec{F}_{\text{тр}} \neq 0.$$

Из второго закона Ньютона для призмы в проекции на ось Ox' , перпендикулярную силе $\vec{F}_{\Sigma}$:

$$N \sin(\alpha/2) + Q_x - mg \sin(\alpha/2) = ma \cos(\alpha/2). \quad (a)$$

В приведённой формуле все слагаемые, кроме Q_x , не зависят от F , это означает, что $Q_x = 0$. Такое возможно, если вектор $\vec{Q}$ направлен перпендикулярно оси Ox' , т. е. под углом $\alpha/2$ к вертикали. Тогда коэффициент трения:

$$\mu = \operatorname{tg}(\alpha/2) = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{3}.$$

Ускорение найдём, подставив $N = Mg \cos \alpha - Ma \sin \alpha$ в соотношение (a):

$$(Mg \cos \alpha - Ma \sin \alpha) \sin(\alpha/2) - mg \sin(\alpha/2) = ma \cos(\alpha/2).$$

Откуда

$$a = \frac{\frac{M}{m} \cos \alpha - 1}{\frac{M}{m} \sin \alpha + \operatorname{ctg}(\alpha/2)} g = \frac{g}{7}.$$

В случае, когда трение не позволяет призме двигаться, сумма сил, действующих на неё, равна нулю:

$$\vec{Q} + \vec{F}_\Sigma + \vec{N} + m\vec{g} = 0 \implies \vec{Q} = -\vec{F}_\Sigma - \vec{N} - m\vec{g}.$$

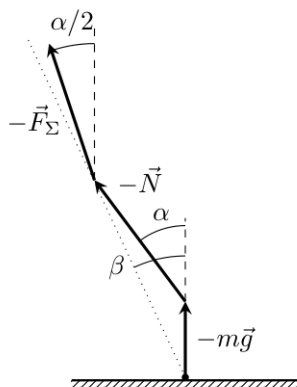


Рис. 4

Рассмотрим одно из возможных значений $F_\Sigma = 0$, тогда

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{N \sin \alpha}{N \cos \alpha + mg} = \frac{M \cos \alpha \sin \alpha}{M(\cos \alpha)^2 + m} = \frac{2 \cdot 3/5 \cdot 4/5}{2 \cdot (4/5)^2 + 1} = \frac{8}{19} > \operatorname{tg}(\alpha/2) = \frac{1}{3}.$$

Последнее неравенство показывает, что при росте F_Σ угол между вертикалью и вектором $\vec{Q}$ будет уменьшаться. А это означает, что β — предельный угол отклонения $\vec{Q}$ от вертикали, т. е.

$$a = 0 \text{ при } \mu \geq \frac{8}{19}.$$

Задача 3 Падающий поршень

В цилиндрическом сосуде, установленном вертикально в поле силы тяжести, под массивным горизонтальным поршнем массой $m = 100$ кг содержится одноатомный идеальный газ. Над поршнем — вакуум. Поршень находится в равновесии и может перемещаться вдоль стенок сосуда практически без трения. Поршень закрепляют в этом равновесном положении, после чего кладут на него гирю массой M . Затем поршень освобождают. При дальнейшем движении поршня с гирей его минимальное расстояние $h_{\min}$ до дна сосуда в два раза меньше исходного расстояния $h_0 = 1,0$ м. Определите:

1. массу гири M ;
2. модуль максимального ускорения $a_{\max}$ поршня с гирей в процессе движения;
3. модуль максимальной скорости $v_{\max}$ поршня с гирей в процессе движения.
4. Через длительное время поршень остановился. Найдите расстояние h до дна сосуда, на котором будет находиться поршень в состоянии нового термодинамического равновесия.

Теплоёмкость сосуда и поршня пренебрежимо мала, теплоотдача в окружающую среду отсутствует. При движении поршня от исходного положения до его первой остановки процессы в

газе можно считать равновесными. Масса газа много меньше массы поршня. Ускорение свободного падения считайте равным $g = 10 \text{ м/с}^2$.

Подсказка

До первой остановки газ сжимается адиабатически и обратимо ($PV^{5/3} = \text{const}$), а механическая энергия поршня с гирей целиком уходит во внутреннюю энергию газа. В конце процесс необратим: адиабата уже не годится, но закон сохранения энергии вместе с условием равновесия поршня по-прежнему работает.

Ответ

$$1) M = (3(2^{2/3} - 1) - 1)m \approx 76 \text{ кг}; \quad 2) a_{\max} = g \left(\frac{2^{5/3}m}{M+m} - 1 \right) \approx 0,80g = 8 \text{ м/с}^2; \quad 3) v_{\max} \approx \sqrt{0,14gh_0} \approx 1,2 \text{ м/с}; \quad 4) h = \frac{5m + 2M}{5(M+m)} h_0 \approx 0,74 \text{ м}.$$

Решение

Так как поршень вначале находится в равновесии, то $P_0 S = mg$ или $P_0 V_0 = mgh_0$, где P_0 и V_0 — начальное давление и начальный объём газа соответственно, S — площадь внутреннего поперечного сечения сосуда.

При движении системы механическая энергия поршня с грузом передаётся только газу (поршень перемещается в сосуде практически без трения, снаружи вакуум), а газ не передаёт теплоту в окружающую среду (по условию). В этом случае первое начало термодинамики имеет вид:

$$A_{\text{внеш}} = \Delta U,$$

где ΔU — изменение внутренней энергии газа, $A_{\text{внеш}}$ — работа внешних сил над газом, равная убыли полной механической энергии поршня с грузом: $A_{\text{внеш}} = -\Delta E$. В результате получаем:

$$\Delta U + \Delta E = 0.$$

Согласно условию, при движении поршня от исходного положения до его первой остановки процессы в газе можно считать равновесными. Поэтому будем считать, что с газом происходит обратимый адиабатический процесс.

Для него справедливо уравнение Пуассона $PV^\gamma = \text{const}$, где $\gamma = 5/3$ для одноатомного идеального газа, P и V — давление и объём газа в некоторый произвольный момент времени. В нашем случае $PV^{5/3} = P_0V_0^{5/3}$ или

$$P = P_0 (V_0/V)^{5/3} = P_0 (h_0/h)^{5/3},$$

$$PV = P_0V_0 (V_0/V)^{2/3} = P_0V_0 (h_0/h)^{2/3},$$

где h — расстояние от поршня до дна сосуда в произвольный момент времени.

Рассмотрим момент времени, когда поршень находился в самой нижней точке на расстоянии $h_{\min}$ от дна сосуда. В этот момент скорость поршня с грузом равна нулю, т. е. $\Delta E = (M + m)g(h_{\min} - h_0)$.

Изменение внутренней энергии газа:

$$\Delta U = \frac{3}{2} (P_1 V_1 - P_0 V_0) = \frac{3}{2} P_0 V_0 \left(\left(\frac{h_0}{h_{\min}} \right)^{2/3} - 1 \right) = \frac{3}{2} mgh_0 \left(\left(\frac{h_0}{h_{\min}} \right)^{2/3} - 1 \right),$$

где P_1 и V_1 — давление и объём газа соответственно в рассматриваемый момент времени.

После объединения получаем:

$$\frac{3}{2}mgh_0 \left(\left(\frac{h_0}{h_{\min}} \right)^{2/3} - 1 \right) + (M + m)gh_0 \left(\frac{h_{\min}}{h_0} - 1 \right) = 0.$$

Подставляем $\frac{h_0}{h_{\min}} = 2$ и находим:

$$M/m = 3 \left(2^{2/3} - 1 \right) - 1 \approx 0,762.$$

$$M \approx 0,762m \approx 76 \text{ кг.}$$

Будем рассматривать поршень с грузом как единое тело. Максимальный модуль ускорения поршня с грузом достигается, когда их скорость равна нулю, при этом суммарная внешняя сила — максимальна. Этим условиям удовлетворяют два положения поршня: начальное положение (сила тяжести больше силы давления газа на поршень) и нижнее положение (сила давления газа на поршень больше силы тяжести).

В начальный момент модуль ускорения поршня с грузом равен:

$$a_0 = \frac{(M + m)g - P_0S}{M + m} = \frac{(M + m)g - mg}{M + m} = \frac{M}{M + m}g \approx 0,43g.$$

В нижнем положении модуль ускорения поршня с грузом равен:

$$\begin{aligned} a &= \frac{P_0S (h_0/h_{\min})^{5/3} - (M + m)g}{M + m} = g \left(\frac{m (h_0/h_{\min})^{5/3}}{M + m} - 1 \right) = \\ &= g \left(\frac{2^{5/3}m}{M + m} - 1 \right) \approx 0,80g. \end{aligned}$$

Выбираем максимальное значение:

$$a_{\max} = g \left(\frac{m (h_0/h_{\min})^{5/3}}{M + m} - 1 \right) \approx 0,80g = 8 \text{ м/с}^2.$$

Максимальной скорости поршень достигает на первом участке движения (от верхней точки до нижней). При максимальной скорости движения ускорение равно нулю, т. е. сила тяжести $(M + m)g$ равна силе давления газа P_2S :

$$(M + m)g = P_2S = P_0S (h_0/h_2)^{5/3} = mg (h_0/h_2)^{5/3},$$

где h_2 — расстояние от поршня до дна сосуда в указанный момент времени. Из полученного уравнения найдём $h_2/h_0 = (M/m + 1)^{-3/5} \approx 0,712$.

Закон сохранения энергии (первое начало термодинамики) для газа записывается так:

$$\frac{3}{2} (P_2V_2 - P_0V_0) + (M + m)g(h_2 - h_0) + \left(\frac{(M + m)v_{\max}^2}{2} - 0 \right) = 0$$

или

$$\frac{3}{2}mgh_0 \left(\left(\frac{h_0}{h_2} \right)^{2/3} - 1 \right) + (M + m)gh_0 \left(\frac{h_2}{h_0} - 1 \right) + \frac{(M + m)v_{\max}^2}{2} = 0,$$

где P_2 и V_2 — давление и объём газа соответственно в момент прохождения поршнем положения равновесия. Откуда:

$$\frac{v_{\max}^2}{2gh_0} = \left(1 - \frac{h_2}{h_0} \right) + \frac{3m}{2(M + m)} \left(1 - \left(\frac{h_0}{h_2} \right)^{2/3} \right).$$

Подставляем значение h_2/h_0 :

$$\frac{v_{\max}^2}{2gh_0} \approx 0,07,$$

откуда получаем:

$$v_{\max} \approx \sqrt{0,14gh_0} \approx 1,2 \text{ м/с.}$$

На длительном промежутке времени процессы, протекающие в газе, становятся необратимыми, т. е. механическая энергия необратимо переходит во внутреннюю энергию.

Уравнение адиабаты $PV^\gamma = \text{const}$, выведенное для обратимого процесса, в этом случае не применимо.

Запишем условие равновесия поршня с грузом: $PS = (M + m)g$. Закон сохранения энергии (первое начало термодинамики) в этом случае имеет вид:

$$\frac{3}{2}(PS h - P_0 V_0) + (M + m)g(h - h_0) = 0.$$

Получаем:

$$\frac{3}{2}((M + m)gh - mgh_0) + (M + m)g(h - h_0) = 0.$$

Находим новую высоту:

$$h = \frac{5m + 2M}{5(M + m)} h_0 \approx 0,74h_0 = 0,74 \text{ м.}$$

Задача 4 Квадрат vs круг

Из тонкой непроводящей плоской пластины вырезали пять фигур разной формы и размера. Каждую из них зарядили электрическим зарядом с постоянной, положительной и одинаковой для всех фигур поверхностной плотностью.

Первая фигура представляет собой квадрат со стороной $2a$, от которого с одного из углов отрезали квадрат со стороной a (см. рис. 1). Модуль напряжённости электрического поля, созданного в точке O зарядами на поверхности такой фигуры, равен E_0 .

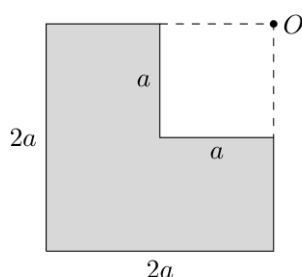


Рис. 1

1. Чему равно отношение E'/E_0 , где E' – модуль напряжённости электрического поля, созданного в точке O' второй заряженной фигурой, имеющей форму квадрата со стороной $2\lambda a$, от которого с одного из углов отрезали квадрат со стороной λa (рис. 2)? λ – некоторое положительное число.

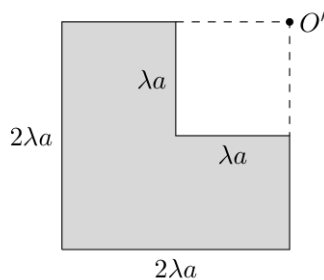


Рис. 2

2. Определите модуль и направление вектора напряжённости $\vec{E}_A$ электрического поля, созданного в точке A третьей заряженной фигурой, представляющей собой квадрат со стороной $8a$, от которого с одного из углов отрезали квадрат со стороной a (рис. 3). Модуль вектора $\vec{E}_A$ выразите через величину E_0 .

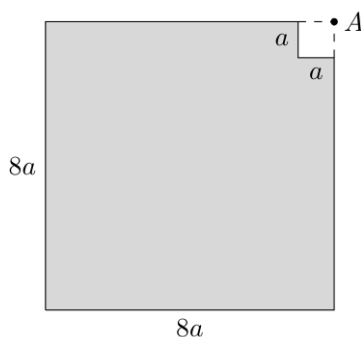


Рис. 3

3. Определите модуль и направление вектора напряжённости $\vec{E}_B$ электрического поля, созданного в точке B четвертой заряженной фигурой, имеющей форму четверти кольца (рис. 4), внутренний радиус которого равен a , а внешний — $2a$. Модуль вектора $\vec{E}_B$ выразите через E_0 .

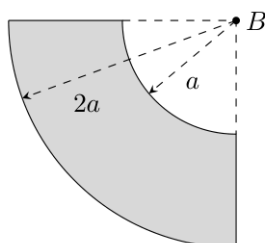


Рис. 4

4. Определите модуль и направление вектора напряжённости $\vec{E}_C$ электрического поля, созданного в точке C пятой заряженной фигурой, имеющей форму трапеции (рис. 5), одно основание которой равно a , второе — $2a$. Модуль вектора $\vec{E}_C$ выразите через E_0 . Углы при большем основании данной трапеции указаны на рисунке.

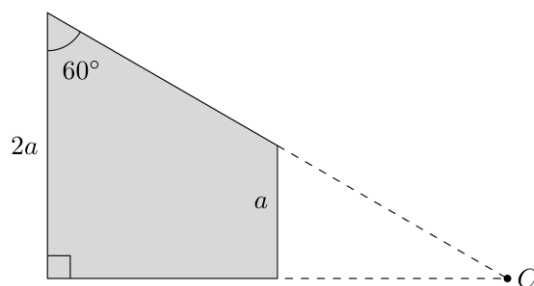


Рис. 5

Точки O , O' , A , B и C находятся в одной плоскости с соответствующей фигурой.

Подсказка

Маленькая площадку и подобная ей площадку в λ раз дальше (при той же плотности заряда) создают одинаковое поле: заряд растёт как λ^2 , квадрат расстояния — тоже. Разбейте каждую фигуру на части, подобные первой фигуре относительно нужной точки.

Ответ

1) $E'/E_0 = 1$; 2) $E_A = 3E_0$, вверх и вправо вдоль оси симметрии фигуры; 3) $E_B = E_0$, вверх и вправо вдоль оси симметрии фигуры; 4) $E_C = \frac{E_0}{\sqrt{3} + 1}$, вдоль внешней биссектрисы угла $\angle C$.

Решение

Пусть поверхностная плотность заряда **всех** фигур, упоминаемых ниже, постоянна, одинакова и равна σ ($\sigma > 0$).

Рассмотрим бесконечно малую заряженную площадку с площадью ΔS_1 и зарядом $\sigma \Delta S_1$, расположенную на расстоянии r от точки O , и геометрически ей подобную вторую площадку, заряженную с той же поверхностной плотностью σ , но расположенную на расстоянии λr , где λ — коэффициент подобия. Поскольку

$$\Delta S_2 = \lambda^2 \Delta S_1,$$

напряжённости электрических полей, созданных этими площадками, равны:

$$E_2 = \frac{\sigma \Delta S_2}{4\pi\epsilon_0(\lambda r)^2} = \frac{\sigma \lambda^2 \Delta S_1}{4\pi\epsilon_0(\lambda r)^2} = \frac{\sigma \Delta S_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} = E_1.$$

Рассмотрим теперь две заряженные пластины конечного размера, геометрически подобные друг другу с коэффициентом подобия λ и расположенные так, как показано на рис. 1, где O — центр подобия этих пластин ($\vec{OC} = \lambda \cdot \vec{OA}$, $\vec{OD} = \lambda \cdot \vec{OB}$ и т. п.). Разобьём обе пластины на бесконечно малые площадки, причём так, чтобы каждый элемент разбиения второй пластины был подобен соответствующему элементу первой с центром подобия в точке O . Поскольку, как было показано выше, напряжённости электрических полей, созданных в точке O бесконечно малыми площадками, образующими такую пару, совпадают, то и напряжённости электрических полей, созданных в точке O всей первой и всей второй пластиной, тоже будут совпадать (по модулю и по направлению).

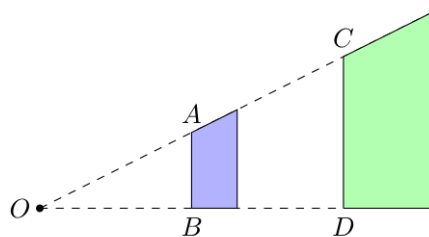


Рис. 1

В частности, это значит, что напряжённость поля в точке O' , созданного фигурой, изображённой на рис. 2 из условия задачи, будет также равна E_0 .

$$E'/E_0 = 1.$$

Из симметрии фигуры следует, что вектор $\vec{E}_A$ направлен вверх и вправо вдоль этой оси симметрии.

Используя результат пункта 1, получим, что напряжённость электрического поля, созданного в точке A каждой из трёх фигур на рис. 2 (зелёной, синей или серой), равна E_0 . Отсюда следует, что заряженная фигура, изображённая в условии на рис. 3, создаёт в точке A поле с напряжённостью $3E_0$.

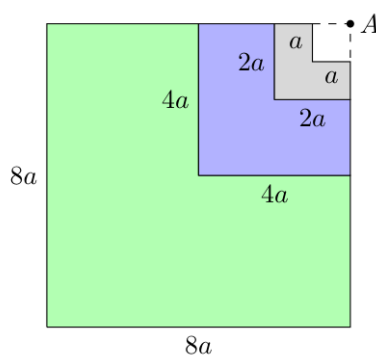


Рис. 2

Вектор $\vec{E}_A$ направлен вверх и вправо вдоль оси симметрии фигуры; $E_A = 3E_0$.

Из симметрии фигуры следует, что вектор $\vec{E}_B$ направлен вверх и вправо вдоль этой оси симметрии.

Для ответа на третий вопрос задачи рассмотрим заряженную пластину, изображённую на рис. 3 (всю окрашенную как-либо область). Обозначим $E_{\text{зел}}$ и $E_{\text{син}}$ напряжённости полей, созданных в точке B зелёной и синей областью соответственно. Из подобия этих областей следует, что $E_{\text{зел}} = E_{\text{син}}$.

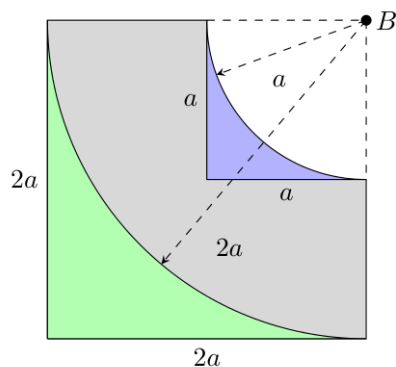


Рис. 3

Напряжённость электрического поля E , созданного всей пластиной в точке B , с одной стороны, равна $E = E_0 + E_{\text{син}}$, а с другой стороны, $E = E_B + E_{\text{зел}}$, где E_B — искомая напряжённость поля, созданного фигурой, изображённой в условии на рис. 4. Приравнявая правые части этих соотношений, получим, что

$$E_B = E_0.$$

Вектор $\vec{E}_B$ направлен вверх и вправо вдоль оси симметрии фигуры; $E_B = E_0$.

Воспользуемся подходом из предыдущего пункта и рассмотрим заряженную пластину, изображённую на рис. 4 (снова всю окрашенную как-либо область). Зелёная и синяя области, благодаря подобию, создают в точке C поле с одинаковой по величине и направлению напряжённостью. Следовательно, напряжённость поля, созданного в точке C указанной в условии трапецией, совпадает с напряжённостью поля, созданного в той же точке кольцевым сектором с углом в 30° .

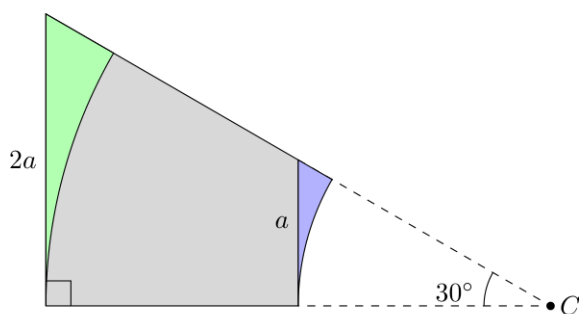


Рис. 4

Отсюда, используя симметрию кольцевого сектора, делаем вывод, что вектор $\vec{E}_C$ напряжённости электрического поля, созданного трапецией в точке C , направлен по внешней биссектрисе угла $\angle C$ (см. рис. 5).

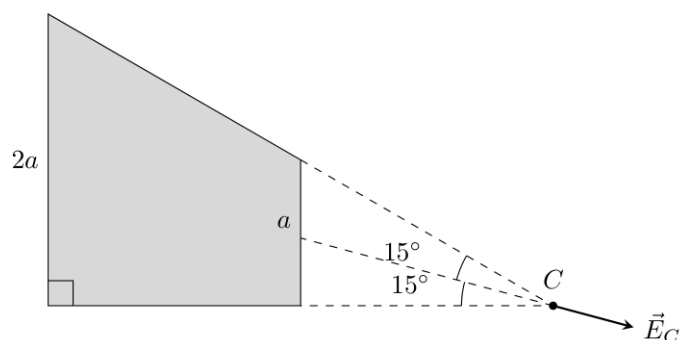


Рис. 5

Кольцевой сектор с внутренним и внешним радиусами, отличающимися в два раза, представляет собой (с точностью до подобия) одну треть от фигуры, изображённой в условии на рис. 4. Используя результат предыдущего пункта, получим (см. рис. 6)

$$E_0 = 2E_C \cos 30^\circ + E_C = E_C (\sqrt{3} + 1) \Rightarrow E_C = \frac{E_0}{\sqrt{3} + 1}.$$

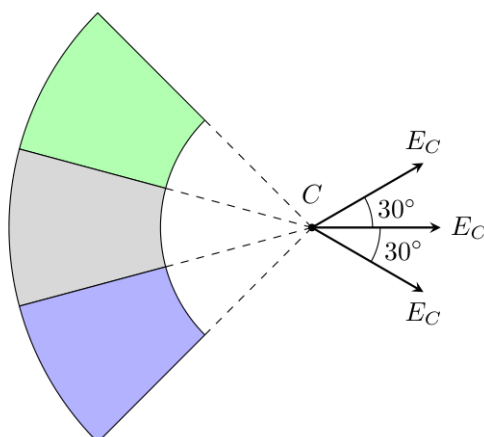


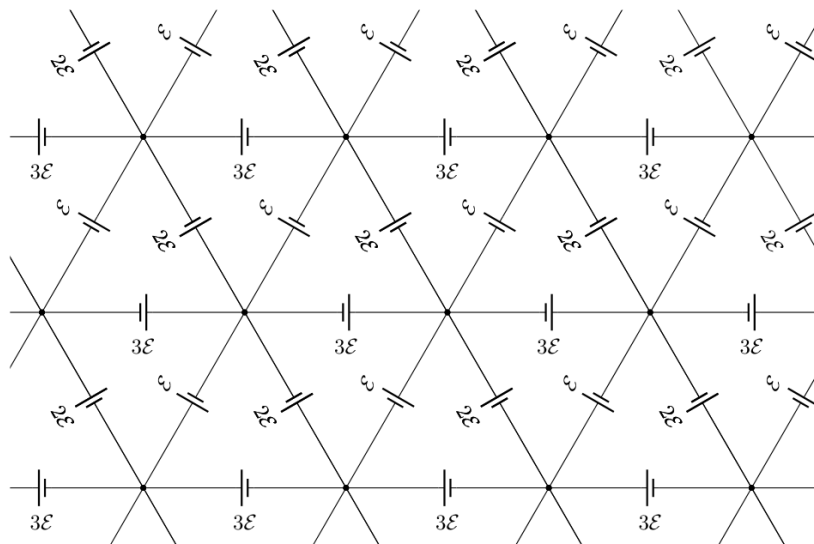
Рис. 6

Вектор $\vec{E}_C$ направлен вдоль внешней биссектрисы угла $\angle C$;

$$E_C = \frac{E_0}{\sqrt{3} + 1}.$$

Задача 5 Вай кодамо!

В бесконечной электрической цепи, фрагмент схемы которой представлен на рисунке, каждая треугольная ячейка содержит три источника с одинаковыми внутренними сопротивлениями r , но разными ЭДС ($\mathcal{E}$, $2\mathcal{E}$ и $3\mathcal{E}$), причём полярность подключения источников с одной и той же ЭДС периодически меняется (см. рис.).



1. Чему равны разности потенциалов ($\varphi_+ - \varphi_-$) между плюсом и минусом каждого источника в данной цепи?
2. Определите силы токов через все источники в данной цепи.
3. Какое сопротивление R_1 покажет омметр при подключении к плюсу и минусу источника с ЭДС $\mathcal{E}$, находящегося в данной цепи? Какие сопротивления R_2 и R_3 покажет прибор, если сделать то же самое с источниками $2\mathcal{E}$ и $3\mathcal{E}$ соответственно? Будут ли зависеть показания омметра от полярности его подключения?
4. Один из источников с ЭДС $2\mathcal{E}$ заменили другим источником с ЭДС, равной $\mathcal{E}$, и внутренним сопротивлением $r/2$. Какова в этом случае будет сила тока I , текущего через заменённый источник?

Величины $\mathcal{E}$ и r считайте известными. Сопротивлением соединительных проводов можно пренебречь.

Подсказка

Рассмотрите по отдельности источники каждого типа (метод наложения) и найдите преобразования бесконечной схемы — сдвиг и поворот, — переводящие её в себя: они дают, что потенциалы всех узлов одинаковы. Для омметра и для замены источника представьте всю остальную сетку эквивалентным источником.

Ответ

1) $\varphi_+ - \varphi_- = 0$; 2) $I_1 = \mathcal{E}/r$, $I_2 = 2\mathcal{E}/r$, $I_3 = 3\mathcal{E}/r$; 3) $R_1 = R_2 = R_3 = r/3$, от полярности не зависят; 4) $I = 0$ или $I = 2\mathcal{E}/r$ в зависимости от полярности подключения.

Решение

Используя симметрию электрической цепи, докажем, что потенциалы на соседних выводах источников каждого типа одинаковы. Для этого введём обозначения узлов $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$ и т. д., как показано на рис. 1.

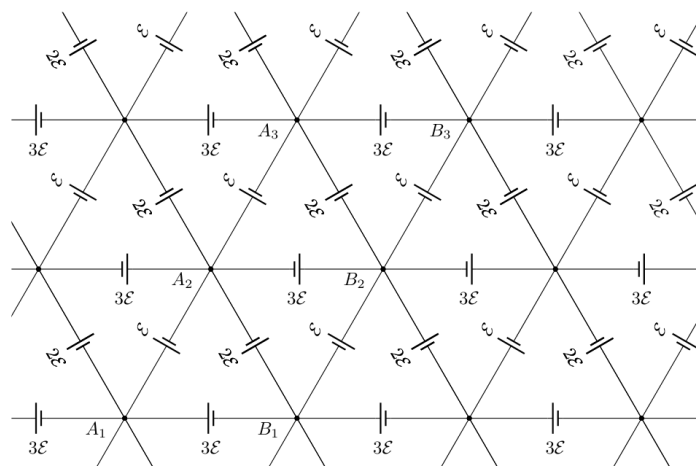


Рис. 1

Воспользуемся методом наложения. Рассмотрим сначала систему из источников только с ЭДС $\mathcal{E}$ при «выключенных» ЭДС всех остальных источников (см. рис. 2).

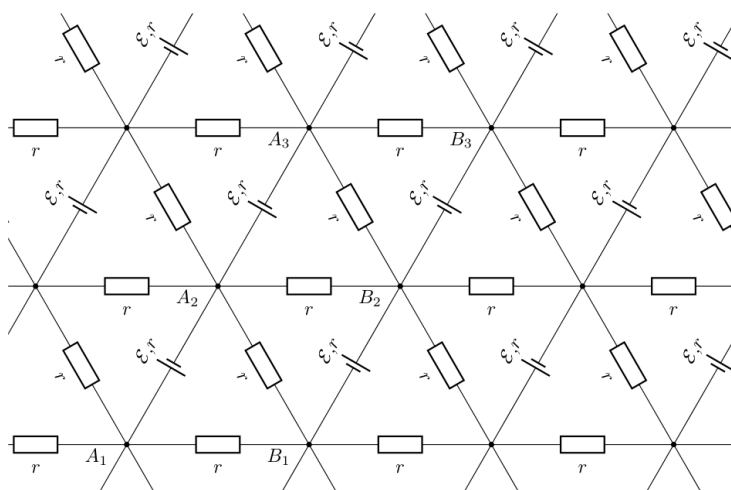


Рис. 2

Сдвиг на одно звено схемы вдоль направления $A_3 - A_1$ переводит схему «саму в себя», поэтому $\varphi_{A_3} - \varphi_{B_3} = \varphi_{A_2} - \varphi_{B_2} = \varphi_{A_1} - \varphi_{B_1} = \Delta\varphi$, а также $\varphi_{A_4} - \varphi_{B_3} = \varphi_{A_3} - \varphi_{B_2} = \varphi_{A_2} - \varphi_{B_1} = \Delta\varphi'$, где φ_M — потенциал соответствующего узла M .

Перевернём цепь таким образом, что узлы A_3 и B_2 , а также узлы A_2 и B_3 меняются местами (см. рис. 3).

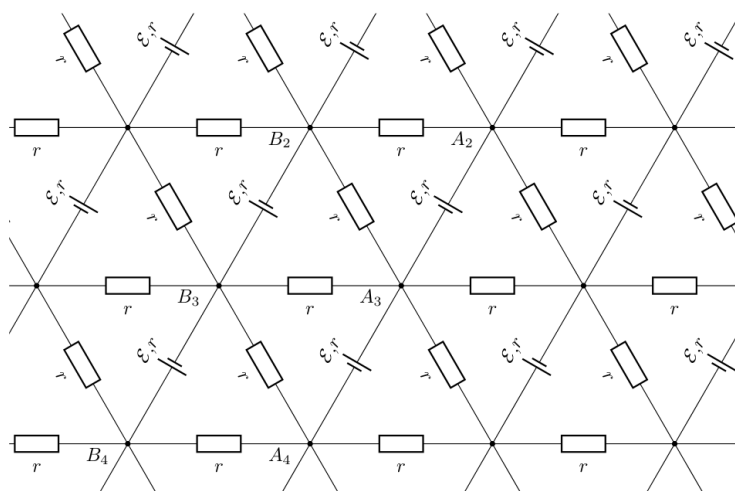


Рис. 3

Так как цепь перешла «сама в себя», то

$$\varphi_{B_2} - \varphi_{A_2} = \varphi_{B_3} - \varphi_{A_3} = \varphi_{B_4} - \varphi_{A_4} = \Delta\varphi,$$

$$\varphi_{B_1} - \varphi_{A_2} = \varphi_{B_2} - \varphi_{A_3} = \varphi_{B_3} - \varphi_{A_4} = \Delta\varphi'.$$

Откуда следует, что $\Delta\varphi = -\Delta\varphi$ и $\Delta\varphi' = -\Delta\varphi'$ или $\Delta\varphi = 0$ и $\Delta\varphi' = 0$. С учётом этого получаем, что потенциалы, созданные системой источников с ЭДС $\mathcal{E}$, во всех узлах такой схемы одинаковы.

Аналогично можно рассмотреть отдельно систему из источников только с ЭДС $2\mathcal{E}$ и систему из источников только с ЭДС $3\mathcal{E}$ при «выключенных» ЭДС всех остальных источников. Таким образом, разность потенциалов между любыми двумя узлами схемы в каждой рассмотренной системе равна нулю, а согласно методу наложения и результирующая разность потенциалов между любыми двумя узлами схемы также равна нулю. Значит, разности потенциалов между плюсом и минусом каждого типа источников равны:

$$\varphi_+ - \varphi_- = 0.$$

Запишем закон Ома для произвольной пары соседних узлов, участок цепи между которыми содержит ЭДС $\mathcal{E}$:

$$(\varphi_+ - \varphi_-) + \mathcal{E} = I_1 r.$$

Здесь положительному значению I_1 соответствует ток, текущий в направлении действия $\mathcal{E}$. Поскольку $\varphi_+ - \varphi_- = 0$, сила тока $I_1 = \mathcal{E}/r$ для любого такого участка. Аналогично для участков цепи, содержащих ЭДС $2\mathcal{E}$ и $3\mathcal{E}$:

$$(\varphi_+ - \varphi_-) + 2\mathcal{E} = I_2 r;$$

$$(\varphi_+ - \varphi_-) + 3\mathcal{E} = I_3 r.$$

Следовательно,

$$I_1 = \mathcal{E}/r \quad (1)$$

$$I_2 = 2\mathcal{E}/r \quad (2)$$

$$I_3 = 3\mathcal{E}/r \quad (3)$$

Рассмотрим бесконечную электрическую цепь с двумя соседними (ближайшими) выводами на источнике любого типа как эквивалентный источник с ЭДС $\mathcal{E}_{\text{ЭКВ}}$ и внутренним сопротивлением $r_{\text{ЭКВ}}$ (рис. 4).



Рис. 4

ЭДС эквивалентного источника $\mathcal{E}_{\text{ЭКВ}} = 0$, так как разность потенциалов между любыми двумя соседними выводами равна нулю.

Внутреннее сопротивление эквивалентного источника $r_{\text{ЭКВ}}$ определим как сопротивление между двумя соседними (ближайшими) узлами бесконечной сетки с «выключенными» ЭДС. Для этого снова воспользуемся методом наложения. Рассмотрим сначала бесконечную сетку с внутренними сопротивлениями источников, где в один из узлов втекает ток силой I_0 и растекается до бесконечности. В ближайших к данному узлу ветках силы токов будут одинаковы (в силу симметрии) и равны $I_+ = I_0/6$. Затем рассмотрим ту же бесконечную сетку, где из соседнего узла вытекает ток силой I_0 . Аналогично, в данной схеме токи в ближайших к данному узлу ветках будут одинаковы и равны $I_- = I_0/6$.

Далее рассмотрим суперпозицию этих двух случаев. Тогда напряжение на сопротивлении r равно $(I_+ + I_-)r$, следовательно

$$r_{\text{ЭКВ}} = \frac{(I_+ + I_-)r}{I_0} = \frac{r}{3}.$$

Таким образом, при использовании любых двух соседних (ближайших) узлов электрическая схема ведёт себя как резистор с сопротивлением $r_{\text{ЭКВ}} = r/3$. Поэтому показания омметра не будут зависеть от полярности его подключения. С учётом этого получаем ответ для показаний омметра:

$$R_1 = r/3 \quad (4)$$

$$R_2 = r/3 \quad (5)$$

$$R_3 = r/3 \quad (6)$$

Эти результаты не зависят от полярности подключения омметра.

Эквивалентный источник из предыдущего пункта можно представить как параллельное соединение источника с ЭДС $2\mathcal{E}$ и сопротивлением r (который заменяется другим источником по условию) и источника с ЭДС $\mathcal{E}^*$ и сопротивлением r^* , который эквивалентен оставшейся части электрической схемы (см. рис. 5).

С учётом того, что ЭДС эквивалентного источника $\mathcal{E}_{\text{ЭКВ}} = 0$ и его сопротивление $r_{\text{ЭКВ}} = r/3$, найдём $\mathcal{E}^*$ и r^* .

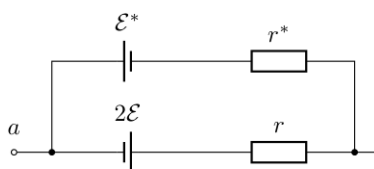


Рис. 5

Сопротивления связаны соотношением

$$\frac{1}{r_{\text{ЭКВ}}} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^*},$$

откуда $r^* = r/2$. Приравнявая токи короткого замыкания рассмотренного параллельного соединения источников и эквивалентного источника, приходим к соотношению:

$$\frac{\mathcal{E}^*}{r^*} - \frac{2\mathcal{E}}{r} = \frac{\mathcal{E}_{\text{ЭКВ}}}{r_{\text{ЭКВ}}},$$

откуда находим $\mathcal{E}^* = \mathcal{E}$.

Источник с ЭДС $2\mathcal{E}$ и сопротивлением r можно заменить источником с ЭДС $\mathcal{E}$ и сопротивлением $r/2$ двумя разными способами (используя разную полярность подключения, как представлено на рис. 6).

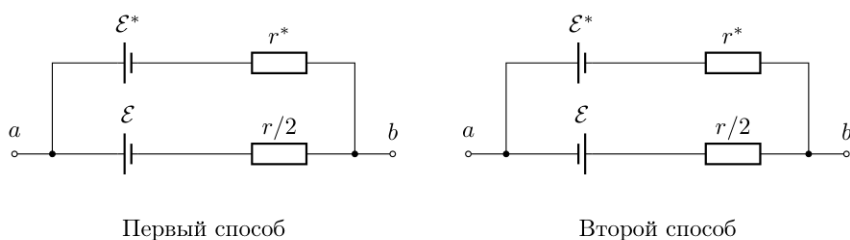


Рис. 6

При подключении первым способом согласно закону Ома для полной цепи

$$I = \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}}{r/2 + r/2} = 0.$$

При подключении вторым способом согласно закону Ома для полной цепи

$$I = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{E}}{r/2 + r/2} = \frac{2\mathcal{E}}{r}.$$

В итоге, в зависимости от способа подключения получаем:

$$I = 0 \quad \text{или} \quad I = 2\mathcal{E}/r.$$