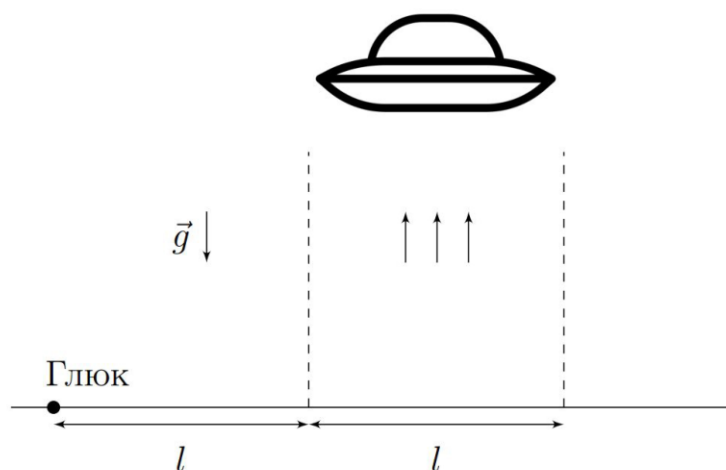


ВсОШ, 2025/26, региональный этап, 10 класс, теоретический тур

Всероссийская олимпиада школьников по физике [Условия, ответы и решения](#)

Задача 1 Опять 45?

В фантастических фильмах иногда показывают, как НЛО захватывает тела на земле с помощью «притягивающего луча» (англ. «tractor beam»). Предположим, он устроен таким образом, что в небольшой вертикальной области пространства на любое произвольное тело массой m со стороны него действует сила $\vec{F}_{\text{tb}} = -2m\vec{g}$, направленная противоположно силе тяжести и вдвое превосходящая её по модулю (сила тяжести действовать, разумеется, не перестаёт). Экспериментатору Глюку приснилось, что он оказался на расстоянии l от такой области, ширина которой тоже l (см. рисунок).



1. С какой минимальной скоростью v_{m1} Глюк должен бросить камень с поверхности земли, чтобы он достиг притягивающего луча?
2. С какой минимальной скоростью v_{m2} Глюк должен бросить камень, чтобы он пролетел область, ограниченную лучом, насквозь?
3. Какова максимальная дальность броска L_{m2} , если начальная скорость камня равна v_0 ($v_0 \geq v_{m2}$)?
4. Найдите максимальную дальность броска L_{m3} в случае $v_0 = v_{m2}$.

Считайте, что камень не отскакивает от земли, а НЛО находится так высоко, что камень ни при каких условиях не может в него попасть. Поверхность земли горизонтальна. Ускорение свободного падения g .

Подсказка

Внутри луча камень движется с ускорением $-\vec{g}$, и его траектория там — та же парабола, отражённая центрально относительно точки входа в луч. Поэтому камню достаточно пересечь границу луча выше половины своей наибольшей высоты подъёма; после выхода из луча скорость камня совпадает с начальной.

Ответ

$$1) v_{m1} = \sqrt{gl}; \quad 2) v_{m2} = \sqrt{2(2 - \sqrt{2})gl} \approx \sqrt{1,17lg}; \quad 3) L_{m2} = 2l + \frac{v_0^2}{2g} + \sqrt{\left(2l + \frac{v_0^2}{2g}\right)^2 - 6l^2};$$

$$4) L_{m3} = (2 + \sqrt{2})l \approx 3,41l.$$

Решение

Пока камень не долетел до притягивающего луча, он движется с постоянным ускорением $\vec{g}$. Дальность полёта камня, брошенного с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту равна

$$l_0 = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Это выражение принимает максимальное значение при $\alpha = 45^\circ$, следовательно

$$v_{m1} = \sqrt{gl}.$$

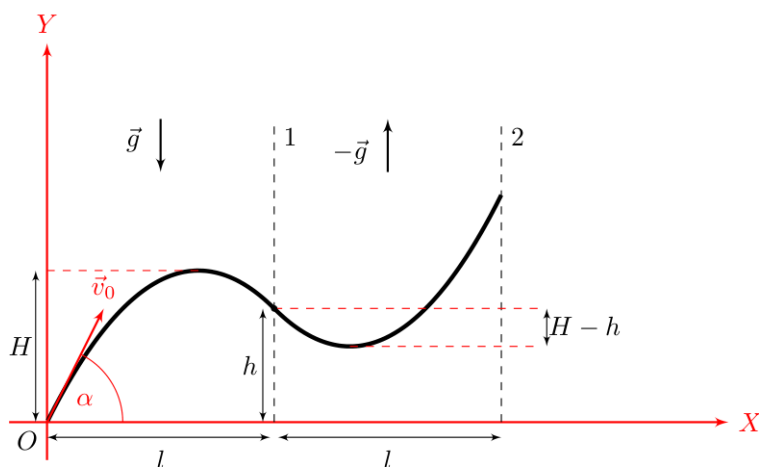
Направим ось OX горизонтально, а ось OY — вертикально вверх; в качестве начала отсчёта O выберем положение Глюка. Левую и правую (по ходу полёта камня) границы области, ограниченной притягивающим лучом, пронумеруем 1 и 2 соответственно (см. рисунок). Ясно, что внутри луча камень движется с ускорением $-\vec{g}$, и если он пересекает границу 1 так, что проекция его скорости $v_y \geq 0$, то камень достигнет и границы 2. Этому соответствует условие

$$v_0 \sin \alpha - gt_1 \geq 0,$$

где $t_1 = l/(v_0 \cos \alpha)$, а α — угол между $\vec{v}_0$ и горизонтом. Следовательно, чтобы пролететь область, ограниченную лучом, насквозь, заведомо достаточно скорости

$$v'_{m2} = \sqrt{\frac{2gl}{\sin 2\alpha}}.$$

Проверим, что $v_{2m} < v'_{m2}$. Характерная для такого случая траектория камня приведена на рисунке. Её участок левее границы 2 обладает центральной симметрией относительно точки пересечения границы 1. Пусть H — наибольшая высота подъёма камня на участке слева от луча, а h — высота, на которой камень пересекает границу 1.



Траектория камня при $v_0 > v_{m1}$ обладает центральной симметрией

Из сказанного выше следует (см. рисунок), что для того, чтобы камень достиг границы 2, достаточно

$$H - h < h \quad \Rightarrow \quad h > H/2.$$

Из закона равноускоренного движения следует, что

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g},$$

$$h = y(l) = \operatorname{tg} \alpha \cdot l - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot l^2.$$

Тогда условие $h > H/2$ может быть приведено к виду

$$\frac{8g^2 l^2}{\sin^2 2\alpha} - \frac{8gl}{\sin 2\alpha} \cdot v_0^2 + v_0^4 < 0.$$

Выделим в этом выражении полный квадрат:

$$\left(\frac{4gl}{\sin 2\alpha} - v_0^2 \right)^2 - \frac{8g^2 l^2}{\sin^2 2\alpha} < 0.$$

Откуда выразим v_0^2 (напомним, что нас интересуют значения $v_0^2 < 2gl/\sin 2\alpha$, так что выражение в скобках положительно):

$$v_0^2 > \frac{4gl}{\sin 2\alpha} - \frac{2\sqrt{2}gl}{\sin 2\alpha} = \frac{2(2 - \sqrt{2})gl}{\sin 2\alpha}.$$

Правая часть меньше v_{2m}' и достигает минимального значения при $\alpha = 45^\circ$, следовательно

$$v_{m2} = \sqrt{2(2 - \sqrt{2})lg} \approx \sqrt{1,17lg}.$$

Горизонтальная компонента скорости камня неизменна, следовательно участки слева от притягивающего луча и внутри него камень проходит за одно время

$$t_0 = t_1 = \frac{l}{v_0 \cos \alpha}.$$

Найдём скорость камня при пересечении границы 2

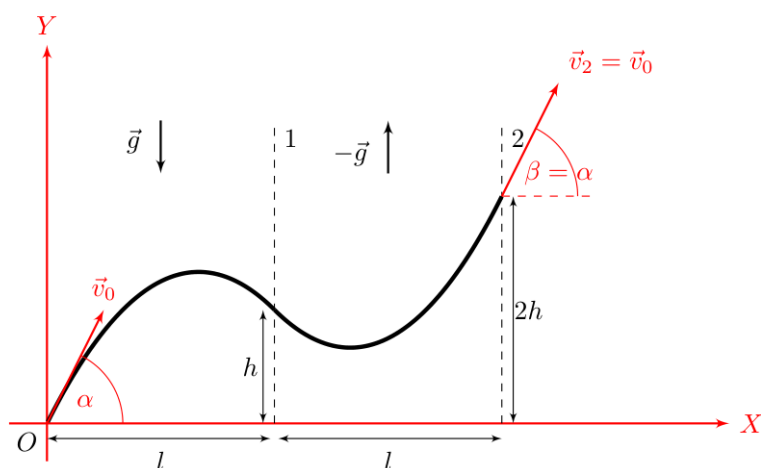
$$\vec{v}_2 = \vec{v}_0 + \vec{g}t_0 - \vec{g}t_1 = \vec{v}_0.$$

Из соображений симметрии (см. рисунок) следует, что камень пересекает границу 2 на высоте $2h$. Время t_2 , за которое он после этого упадёт на землю,

$$2h + v_0 \sin \alpha \cdot t_2 - \frac{gt_2^2}{2} = 0,$$

откуда

$$t_2 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2} + \frac{4h}{g}}.$$



Камень пересекает границу 2 со скоростью $\vec{v}_2 = \vec{v}_0$

Этому соответствует горизонтальное смещение

$$l_2 = v_0 \cos \alpha \cdot t_2 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} + \sqrt{\left(\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}\right)^2 + \frac{4hv_0^2 \cos^2 \alpha}{g}}.$$

Подставим в это выражение

$$h = l \operatorname{tg} \alpha - \frac{gl^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

и получим

$$l_2 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} + \sqrt{\left(\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}\right)^2 + \frac{2lv_0^2 \sin 2\alpha}{g} - 2l^2}.$$

Выделим в подкоренном выражении полный квадрат

$$l_2 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} + \sqrt{\left(2l + \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}\right)^2 - 6l^2}.$$

l_2 монотонно возрастает при увеличении $\sin 2\alpha$, следовательно достигает максимального значения при $\alpha = 45^\circ$:

$$l_{m2} = \frac{v_0^2}{2g} + \sqrt{\left(2l + \frac{v_0^2}{2g}\right)^2 - 6l^2}.$$

Искомое расстояние $L_{m2} = 2l + l_{m2}$.

$$L_{m2} = 2l + \frac{v_0^2}{2g} + \sqrt{\left(2l + \frac{v_0^2}{2g}\right)^2 - 6l^2}.$$

Поскольку и v_{m2} , и L_{m2} соответствуют броску под углом в 45° , достаточно подставить $v_0^2 = 2(2 - \sqrt{2})gl$ в выражение для L_{m2} . Получим

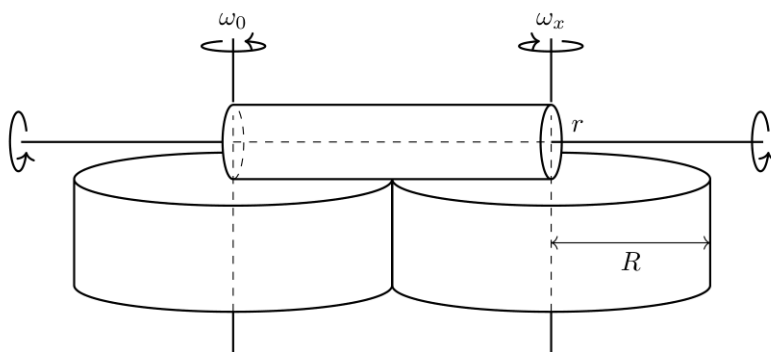
$$L_{m3} = \left(4 - \sqrt{2} + \sqrt{12 - 8\sqrt{2}}\right) l$$

или после преобразований

$$L_{m3} = (2 + \sqrt{2})l \approx 3,41l.$$

Задача 2 Раскрутка трением

Два одинаковых диска с радиусами R насажены на параллельные вертикальные оси, на которых они могут вращаться без трения. Расстояние между осями чуть больше $2R$, так что между боковыми поверхностями дисков остаётся небольшой зазор. Верхние основания дисков лежат в одной горизонтальной плоскости. Цилиндрический валик радиуса r , длины $2R$ может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, плоскость которой лежит в одной плоскости с осями дисков. Сам валик располагается между осями дисков и прижимается к верхним основаниям дисков с одинаковыми силами. Линия касания валика и дисков совпадает с радиусами дисков. Один из дисков вращается с помощью электродвигателя с постоянной угловой скоростью ω_0 и приводит во вращение из-за трения между соприкасающимися поверхностями валик, который в свою очередь раскручивает второй диск.



1. Найдите установившуюся скорость вращения ω_x второго диска.

Примечание. При вращении твёрдого тела с постоянной угловой скоростью сумма моментов внешних сил относительно оси вращения равна нулю.

Подсказка

Вдоль линии касания скорости точек валика и диска совпадают лишь в одной точке — там сила трения меняет направление. Положение этой точки на свободном диске найдите из равенства нулю суммарного момента сил трения на нём, затем так же — для валика.

Ответ

$$\omega_x = \omega_0(\sqrt{2} - 1).$$

Решение

Рассмотрим момент времени, когда валик и правый диск вращаются с постоянными угловыми скоростями Ω и ω_x соответственно. Введём ось Oy , направленную вдоль оси симметрии валика влево, с началом в центре его правого основания.

Сила трения, действующая на правый диск, меняет своё направление в некоторой точке с координатой y_x . На участке с координатой от 0 до y_x скорость точек валика Ωr больше, чем скорость точек диска $v_x = \omega_x y$, значит сила трения на этом участке направлена по скорости точек валика («от нас»). Аналогично можно показать, что на участке с координатой от y_x до R , сила трения направлена против скорости точек валика («на нас»).

Сила трения, действующая на участке длиной Δy , равна $f\Delta y$, где f — сила трения, приходящаяся на единицу длины. Равнодействующая такой равномерно распределённой силы приложена к середине указанного отрезка. С учётом того, что суммарный момент внешней силы трения, действующей на правый диск, равен нулю, получаем:

$$f y_x \cdot \frac{y_x}{2} = f(R - y_x) \cdot \frac{R + y_x}{2}.$$

Откуда $y_x = R/\sqrt{2}$.

Сила трения, действующая на валик со стороны левого диска меняет своё направление в некоторой точке с координатой y_0 . Плечо этой силы равно r , а так как валик равномерно вращается, то суммарный момент силы трения, действующей на валик относительно оси вращения также равен нулю, а значит:

$$f y_x \cdot r + f(2R - y_0) \cdot r = f(y_0 - y_x) \cdot r.$$

Откуда $y_0 = y_x + R = R/\sqrt{2} + R$.

В точках с координатами y_x и y_0 , где сила трения меняет направление, скорости точек дисков равны скорости точек валика Ωr . Скорость точки правого диска с координатой y_x равна $\omega_x \cdot y_x =$

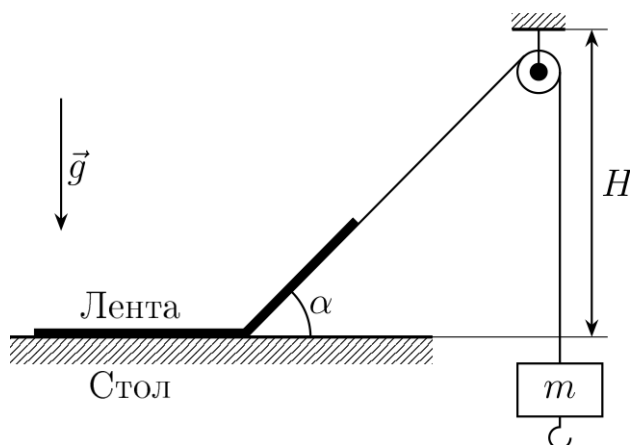
$\omega_x \frac{R}{\sqrt{2}}$. Скорость точки левого диска с координатой y_0 равна $\omega_0 \cdot (2R - y_0) = \omega_0 \cdot \left(R - \frac{R}{\sqrt{2}}\right)$. С учётом этого $\omega_x \frac{R}{\sqrt{2}} = \omega_0 \cdot \left(R - \frac{R}{\sqrt{2}}\right)$ или

$$\omega_x = \omega_0(\sqrt{2} - 1).$$

Задача 3 Клейкая лента

Длинная клейкая лента шириной $d = 2$ см приклеена к горизонтальной поверхности стола. Известно, что для того, чтобы оторвать единицу площади такой ленты от стола, нужно совершить работу $\sigma = 10$ Дж/м² (считайте, что эта величина не зависит от угла, под которым тянут ленту). Ленту можно считать невесомой и нерастяжимой.

1. Под каким углом к горизонту и в каком направлении следует тянуть за конец ленты, чтобы сила, при которой лента начнёт отрываться от стола, была минимальной?
2. Один из концов ленты частично оторвали от стола и прикрепили к нему невесомую нить, переброшенную через маленький (по сравнению с длинами нити и ленты) невесомый блок, расположенный на высоте $H = 1$ м, как показано на рисунке. При этом угол между нитью и горизонтом составил $\alpha_1 = 45^\circ$. К другому концу нити прикрепили груз. При какой максимальной массе груза m система будет покоиться?
3. К первому грузу с максимально возможной массой m из предыдущего пункта прикрепили второй с неизвестной массой M и отпустили без начальной скорости. Лента стала отрываться, и система пришла в движение. Спустя некоторый промежуток времени грузы остановились, а наклонный участок ленты оказался под углом $\alpha_2 = 30^\circ$ к горизонту. Найдите массу второго груза M , расстояние Δh , на которое в результате сместились грузы, а также модули ускорений грузов в момент начала движения a_1 и в момент остановки a_2 .



Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с².

Подсказка

Сравните работу силы при отрыве короткого куска ленты с работой $\sigma \cdot d \cdot \Delta l$, нужной для его отрыва: перемещение точки приложения силы зависит от угла. Во втором и третьем пунктах помогут нерастяжимость нити с лентой и закон изменения механической энергии.

Ответ

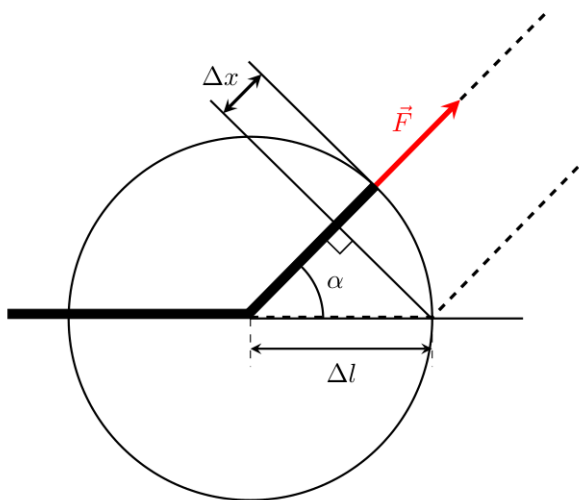
- 1) $\alpha = 180^\circ$ — тянуть вдоль стола, загнув ленту назад над её приклеенной частью; тогда $F =$

$$\sigma d / (1 - \cos \alpha) = \sigma d / 2; \quad 2) m = \frac{\sigma d}{(1 - \cos \alpha_1)g} \approx 68 \text{ г}; \quad 3) M \approx 32 \text{ г}, \Delta h \approx 0,146 \text{ м}, a_1 \approx 3,2 \text{ м/с}^2, a_2 \approx 4,9 \text{ м/с}^2.$$

Решение

Когда приложенная сила F постоянна по величине и направлению, угол наклона оторванной части ленты α также постоянен. Если внешняя сила достаточна по величине и приводит к отрыву части ленты малой длины Δl , точка, к которой приложена внешняя сила, перемещается на расстояние Δx , совершая при этом работу, которую можно связать с величиной σ и площадью ленты оторвавшейся части ленты $\Delta S = d \cdot \Delta l$:

$$\Delta A = \Delta x \cdot F = \sigma \cdot \Delta S = \sigma \cdot d \cdot \Delta l. \quad (1)$$



Перемещение точки приложения силы Δx может быть выражено через Δl и α :

$$\Delta x = \Delta l \cdot (1 - \cos \alpha). \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получаем выражение для силы $F = F(\alpha)$, необходимой для отрывания ленты от стола под некоторым углом:

$$F = \frac{\sigma d}{1 - \cos \alpha}.$$

Сила принимает минимальное значение при максимальном знаменателе $1 - \cos \alpha = 2$, то есть при $\alpha = \pi$.

Теперь рассмотрим второй случай. Силы натяжения ленты и нити равны по модулю, так что будем их обозначать T . Из условия равновесия груза $T = mg$. Очевидно, что если сила натяжения T не превышает силу отрыва ленты для угла α_1 , то лента не будет отрываться и система будет покоиться. Максимальная сила T , которая может быть достигнута при равновесии системы $T = \sigma d / (1 - \cos \alpha_1)$. Тогда масса груза равна

$$m = \frac{\sigma d}{(1 - \cos \alpha_1) \cdot g} \approx 0,068 \text{ кг}.$$

Теперь рассмотрим случай добавления груза массой M . Для начала определим длину участка ленты ΔL , который оторвался от стола до момента остановки грузов. Его можно выразить через высоту блока H и углы α_1 и α_2 :

$$\Delta L = \frac{H}{\operatorname{tg} \alpha_2} - \frac{H}{\operatorname{tg} \alpha_1} \approx 0,732 \cdot H = 0,732 \text{ м}.$$

Для нахождения Δh используем условие на сохранение полной длины нити и ленты (ввиду их нерастяжимости):

$$\Delta L + L_1 = L_2 + \Delta h,$$

где $L_1 = H / \sin \alpha_1$ и $L_2 = H / \sin \alpha_2$ — это расстояния от блока до точки отрыва ленты от стола в начальный и конечный момент соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta h &= \frac{H}{\operatorname{tg} \alpha_2} - \frac{H}{\operatorname{tg} \alpha_1} + \frac{H}{\sin \alpha_1} - \frac{H}{\sin \alpha_2} = \\ &= H \left(\frac{1 - \cos \alpha_1}{\sin \alpha_1} - \frac{1 - \cos \alpha_2}{\sin \alpha_2} \right) \approx 0,146 \cdot H = 0,146 \text{ м.} \end{aligned}$$

Положение, в котором остановится система, определяется законом изменения полной механической энергии: изменение потенциальной энергии груза (кинетическая энергия в крайних положениях равна нулю) равно работе по отрыву ленты:

$$(m + M)g \cdot \Delta h = A = \sigma d \Delta L.$$

Отсюда

$$M = \frac{\sigma d \Delta L}{g \Delta h} - m \approx 0,032 \text{ кг} = 32 \text{ г.}$$

Ускорения грузов в начальный и конечный моменты времени находятся из второго закона Ньютона:

$$(m + M)a_1 = (m + M)g - T(\alpha_1)$$

или

$$(m + M)a_1 = (m + M)g - \frac{\sigma d}{1 - \cos \alpha_1}.$$

Искомые значения:

$$a_1 = g - \frac{\sigma d}{(m + M)(1 - \cos \alpha_1)} \approx 3,2 \text{ м/с}^2,$$

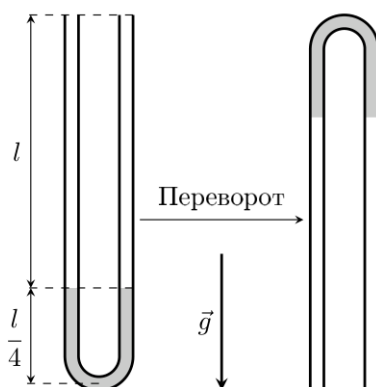
и

$$a_2 = \frac{\sigma d}{(m + M)(1 - \cos \alpha_2)} - g \approx 4,9 \text{ м/с}^2.$$

Заметим, что после остановки ускорения грузов будут равны нулю.

Задача 4 Трубка со ртутью

В U-образную трубку, расположенную вертикально открытыми концами вверх, залили ртуть, после чего концы трубки запаляли. Радиус закругления внизу трубки и внутренний диаметр трубки много меньше длины прямых участков. Длина столбиков воздуха в исходном положении составляла $l = 625$ мм, длина столбиков ртути справа и слева от места изгиба трубки равнялась $l_2 = l/4$ (см. рисунок). Трубку повернули вокруг горизонтальной оси на 180° . Через некоторое время ртуть заняла устойчивое положение равновесия.



1. На какое расстояние h_0 сместятся концы столбика ртути после переворота, если в конечном состоянии температура не изменится и будет равна T_0 ?
2. На какое расстояние h_1 сместятся концы столбика ртути, если температуру ртути и воздуха в трубке уменьшить до $T_1 = 0,8T_0$?
3. На какое расстояние h_2 сместятся концы столбика ртути, если температуру ртути и воздуха в трубке уменьшить до $T_2 = 0,7T_0$?
4. Докажите устойчивость положения равновесия, найденного в п.3.

Капиллярными эффектами и колебаниями столбика ртути можно пренебречь. Ускорение свободного падения равно g . Атмосферное давление во время эксперимента $P_A = 750$ мм.рт.ст.

Подсказка

При смещении столбика на h разность давлений воздуха в коленях уравнивает лишний столбик ртути высотой $2h$; давления воздуха — по закону Бойля–Мариотта, а охлаждение равносильно уменьшению начального давления. Проверьте, не выходит ли ответ за длину столбика $l/4$, и выберите из корней устойчивый.

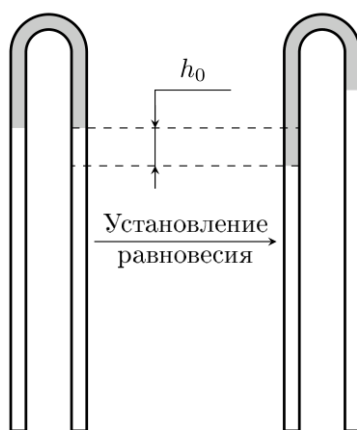
Ответ

1) $h_0 = 0$; 2) $h_1 = l/5 = 125$ мм; 3) $h_2 = \sqrt{4L_2^2 + l^2} - 2L_2 \approx 172$ мм, где $L_2 = 0,7 \cdot 750 = 525$ мм (ртуть целиком переходит в одно колено); 4) при малом смещении x из этого положения разность сил давления воздуха $(\Delta P_1 + \Delta P_2)S > 0$ возвращает ртуть, а сила тяжести не меняется — равновесие устойчиво.

Решение

Пусть смещение концов столбика ртути после переворота трубки равно h_0 . Разность давлений воздуха в левой и правой частях трубки $\Delta P = P_{\text{л}} - P_{\text{п}}$ уравнивается избыточным гидростатическим давлением ртути $2\rho gh_0$. Используя закон Бойля–Мариотта, найдем:

$$P_{\text{л}} = P_A \frac{l}{l - h_0}, \quad P_{\text{п}} = P_A \frac{l}{l + h_0}.$$



Запишем условие равновесия столбика ртути:

$$P_A \frac{l}{l - h_0} - P_A \frac{l}{l + h_0} = 2\rho gh_0.$$

После преобразований получаем:

$$\frac{2lh_0P_A}{l^2 - h_0^2} = 2\rho gh_0.$$

Решения этого уравнения

$$h_0 = 0, \quad h_0 = \pm \sqrt{l \left(l - \frac{P_A}{\rho g} \right)}.$$

При $P_A = 750 \text{ мм рт.ст.} > 625 \text{ мм рт.ст.} = \rho g l$ подходит только один из корней $h_0 = 0$. Таким образом, сразу после переворота столбик ртути не смещается.

Понижение температуры до $0,8 T_0$ соответствует изменению начального давления воздуха (давления воздуха в трубке с запаянными концами до её переворота) с P_A до $P_1 = 0,8 P_A = \rho g L_1$, где $L_1 = 0,8 \cdot 750 \text{ мм} = 600 \text{ мм}$. В этом случае существует решение:

$$h_1 = \sqrt{l \left(l - \frac{P_1}{\rho g} \right)} = \sqrt{l(l - L_1)} = \sqrt{0,625(0,625 - 0,600)} \text{ м} = \frac{l}{5} = 125 \text{ мм}.$$

Можно показать, что именно это решение соответствует устойчивому положению столбика ртути. Корень $h_1 = 0 \text{ мм}$ соответствует неустойчивому положению, то есть при небольшом смещении столбика ртути избыточное гидростатическое давление превышает разность давлений воздуха в левом и правом участках трубки и ртуть стремится занять положение, соответствующее устойчивому положению.

Покажем, что корень $h_1 = 125 \text{ мм}$ соответствует устойчивому равновесию. Пусть от положения равновесия столбик ртути сместился дополнительно на некоторое малое расстояние x , тогда давление газа в левой части сосуда:

$$P_{\text{л}}(x) = \frac{lP_1}{l - h_1 - x} = \frac{lP_1}{l - h_1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{l - h_1}} \approx \frac{lP_1}{l - h_1} \left(1 + \frac{x}{l - h_1} \right) = \frac{lP_1}{l - h_1} + \frac{x l P_1}{(l - h_1)^2}.$$

Аналогично для давления в правой части сосуда:

$$P_{\text{п}}(x) = \frac{lP_1}{l + h_1 + x} \approx \frac{lP_1}{l + h_1} - \frac{x l P_1}{(l + h_1)^2}.$$

Суммарная сила давления газа, стремящаяся вернуть столбик ртути в положение равновесия, равна

$$\begin{aligned} F_{\text{д}}(x) &= (P_{\text{л}} - P_{\text{п}})S \approx \left(\frac{lP_1}{l - h_1} - \frac{lP_1}{l + h_1} \right) S + \left(\frac{1}{(l - h_1)^2} + \frac{1}{(l + h_1)^2} \right) x l P_1 S = \\ &= F_{\text{д}}(0) + \frac{2(l^2 + h_1^2)}{(l^2 - h_1^2)^2} x l P_1 S. \end{aligned}$$

Сила, равная разности сил тяжести, действующих на столбики ртути в разных частях сосуда, стремится вывести столбик ртути из положения равновесия:

$$F_{\text{т}}(x) = \rho S(l/4 + h_1 + x) - \rho S(l/4 - h_1 - x) = 2\rho g S h_1 + 2\rho g S x = F_{\text{т}}(0) + 2\rho g S x.$$

Найдем разность возвращающей и выводящей из положение равновесия сил с учётом равенства $F_{\text{д}}(0) = F_{\text{т}}(0)$ в положении равновесия:

$$\Delta F = F_{\text{д}} - F_{\text{т}} = 2 \left(\frac{(l^2 + h_1^2)lL_1}{(l^2 - h_1^2)^2} - 1 \right) \rho g S x.$$

Подставив в выражение корень $h_1 = 0$, получим:

$$\begin{aligned} \Delta F &= F_{\text{д}} - F_{\text{т}} = 2 \left(\frac{(l^2 + 0^2)lL_1}{(l^2 - 0^2)^2} - 1 \right) \rho g S x = 2 \left(\frac{L_1}{l} - 1 \right) \rho g S x = \\ &= 2 \left(\frac{600 \text{ мм}}{625 \text{ мм}} - 1 \right) \rho g S x < 0, \end{aligned}$$

т. е. суммарная сила, действующая на систему, будет выводить её из положения равновесия, и $h_1 = 0$ мм соответствует неустойчивому положению равновесия.

Подставив $h_1 = l/5$, получим:

$$\begin{aligned}\Delta F &= F_{\text{давл}} - F_{\text{тяж}} = 2 \left(\frac{(l^2 + (l/5)^2)lL_1}{(l^2 - (l/5)^2)^2} - 1 \right) \rho g S x = \\ &= 2 \left(\frac{25 \cdot 26 \cdot L_1}{24^2 \cdot l} - 1 \right) \rho g S x = 2 \left(\frac{25 \cdot 26 \cdot 600 \text{ мм}}{24^2 \cdot 625 \text{ мм}} - 1 \right) \rho g S x = \\ &= 2 \left(\frac{26}{24} - 1 \right) \rho g S x > 0,\end{aligned}$$

т. е. суммарная сила, действующая на систему, будет стремиться вернуть её в положение равновесия, и $h_1 = l/5 = 125$ мм соответствует устойчивому положению равновесия.

Расчёт по полученной формуле для смещения при начальном давлении $P_2 = 0,7 P_A = \rho g L_2$, где $L_2 = 0,7 \cdot 750 \text{ мм} = 525 \text{ мм}$, соответствующего температуре $T_2 = 0,7 T_0$, даёт результат:

$$h_2 = \sqrt{l \left(l - \frac{P_2}{\rho g} \right)} = \sqrt{0,625 (0,625 - 0,525)} \text{ м} = 0,25 \text{ м} = 250 \text{ мм} = \frac{2l}{5} > \frac{l}{4}.$$

Но в этом случае столбик ртути целиком перемещается в одну из частей трубки и выражение для избыточного гидростатического давления $2\rho g h_2$ должно быть заменено на $\rho g l/2$.

Пусть столбик ртути целиком перешёл в одну из частей трубки и его нижний конец переместился вниз на h_2 , тогда в левой и правой частях трубки давление будет соответственно равно:

$$P_{\text{л}} = P_2 \frac{l}{l - h_2} = \frac{\rho g l L_2}{l - h_2}, \quad P_{\text{п}} = P_2 \frac{l}{l + h_2} = \frac{\rho g l L_2}{l + h_2}.$$

Условие равновесия столбика выглядит теперь следующим образом:

$$\frac{2\rho g l L_2 h_2}{l^2 - h_2^2} = \frac{\rho g l}{2}.$$

Получим квадратное уравнение:

$$h_2^2 + 4L_2 h_2 - l^2 = 0,$$

которое имеет корни

$$h_2 = -2L_2 \pm \sqrt{4L_2^2 + l^2}.$$

Отбросив отрицательный корень, получаем ответ:

$$h_2 = \sqrt{4 \cdot \left(\frac{T_2 P_A}{T_0 \rho g} \right)^2 + l^2} - \frac{2T_2 P_A}{T_0 \rho g} = \sqrt{4 \cdot 0,525^2 + 0,625^2} \text{ мм} - 2 \cdot 0,525 \text{ мм} \approx 172 \text{ мм}.$$

Покажем, что $h_2 \approx 172$ мм соответствует устойчивому положению равновесия. Пусть от положения равновесия ртуть дополнительно сместилась на малое расстояние $x > 0$, тогда давление газа в левой части сосуда:

$$P_{\text{л}}(x) = \frac{lP_2}{l - h_2 - x} = \frac{lP_2}{l - h_2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{l - h_2}} = \frac{lP_2}{l - h_2} + \Delta P_1, \quad \Delta P_1 > 0.$$

Аналогично находим давление газа в правой части сосуда:

$$P_{\text{п}}(x) = \frac{lP_2}{l + h_2 + x} = \frac{lP_2}{l + h_2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x}{l + h_2}} = \frac{lP_2}{l + h_2} - \Delta P_2, \quad \Delta P_2 > 0.$$

Суммарная сила давления газа, стремящаяся вернуть столбик ртути в положение равновесия, равна

$$F_d = (P_l - P_n)S \approx \left(\frac{lP_2}{l - h_2} - \frac{lP_2}{l + h_2} \right) S + (\Delta P_1 + \Delta P_2)S = \\ = F_{d0} + (\Delta P_1 + \Delta P_2)S.$$

Сила тяжести не изменяется при движении столба жидкости внутри одной части сосуда:

$$F_T = \rho S l g / 2.$$

Найдем разность возвращающей и выводящей из положение равновесия сил с учетом равенства $F_{d0} = F_T$ в положении равновесия:

$$\Delta F = F_d - F_T = (\Delta P_1 + \Delta P_2)S > 0,$$

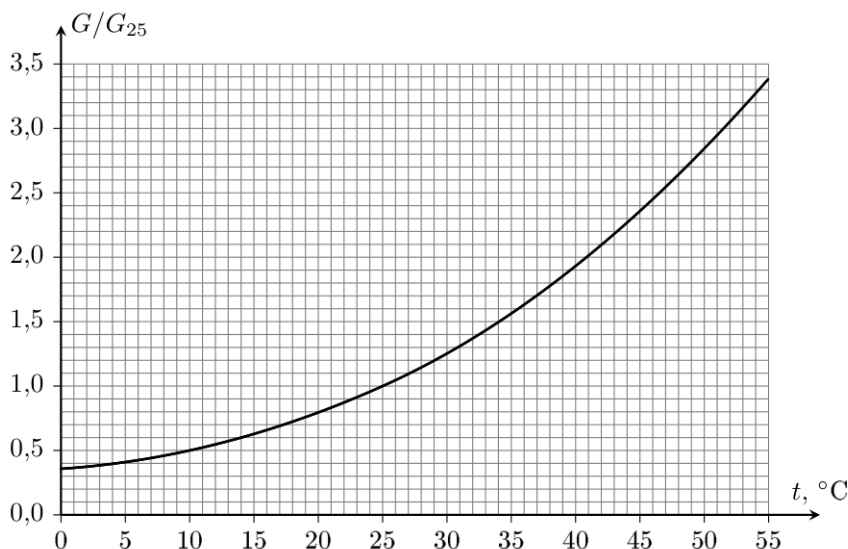
т. е. результирующая сила положительна и положение равновесия устойчиво.

Задача 5 Термистор

Для измерения температуры можно использовать термистор — элемент, проводимость G которого сильно зависит от его температуры. На графике этой зависимости, представленном на отдельном листе, G_{25} — проводимость термистора при 25°C . Термистор подключается последовательно к источнику постоянного напряжения и амперметру, показания которого встроенный компьютер переводит в числовое значение температуры, выводимое на экран. Известно, что при номинальном напряжении источника экран показывает **верное** значение **температуры термистора**. Экспериментатор Глюк решил поэкспериментировать с этим прибором в собственной лаборатории. Оказалось, что при реальном значении температуры воздуха 27°C и поданном на термистор номинальном напряжении экран показывает 29°C . При ответе на вопросы 1 и 2 считайте, что напряжение на термисторе равно номинальному.

1. При какой температуре воздуха t_1 экран прибора показал бы значение, превышающее t_1 на 1°C ?
2. Какое значение показал бы экран прибора при температуре воздуха $38,5^\circ\text{C}$?
3. Продолжая эксперименты, Глюк увеличил напряжение источника, сделав его вдвое больше номинального. Какое значение температуры покажет экран в этом случае, если Глюк не менял настройки компьютера, а температура воздуха в лаборатории равна 24°C ?

Амперметр считайте идеальным. Мощность тепловых потерь пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. Термистор во всех экспериментах находится в воздухе, не контактируя с другими предметами, а все измерения проводятся в установившемся режиме.



Примечание:

1. Проводимостью элемента электрической цепи называется физическая величина, равная отношению силы тока, текущего через данный элемент, к напряжению на этом элементе.
2. На отдельном листе приведены два одинаковых экземпляра графика зависимости проводимости термистора от его температуры. При сдаче работы этот лист вкладывается в решение участника.

Подсказка

В установившемся режиме джоулева мощность $U^2 G(t)$ равна мощности теплоотдачи $k(t - t_b)$; коэффициент k найдите из первого опыта. Каждое следующее уравнение решается графически — пересечением прямой с графиком $G(t)$. Помните, что прибор переводит в температуру ток, считая напряжение номинальным.

Ответ

- 1) $t_1 = 13\text{ }^\circ\text{C}$; 2) $\approx 42\text{ }^\circ\text{C}$; 3) $t_* \approx 51,5\text{ }^\circ\text{C}$ (сам термистор при этом нагрет до $t_2 = 34\text{ }^\circ\text{C}$).

Решение

Пусть U_0 — номинальное напряжение источника. Тепловая мощность, выделяющаяся на термисторе, должна в установившемся режиме рассеиваться в окружающий воздух. Поэтому

$$U_0^2 G(t) = k(t - t_b), \quad (1)$$

где t — собственная температура термистора, t_b — температура воздуха, а k — коэффициент пропорциональности в законе Ньютона-Рихмана. Определяя по графику значение проводимости при температуре $t = 29\text{ }^\circ\text{C}$

$$G(29\text{ }^\circ\text{C}) = 1,2 G_{25}$$

и подставляя $t_b = 27\text{ }^\circ\text{C}$, получим, что

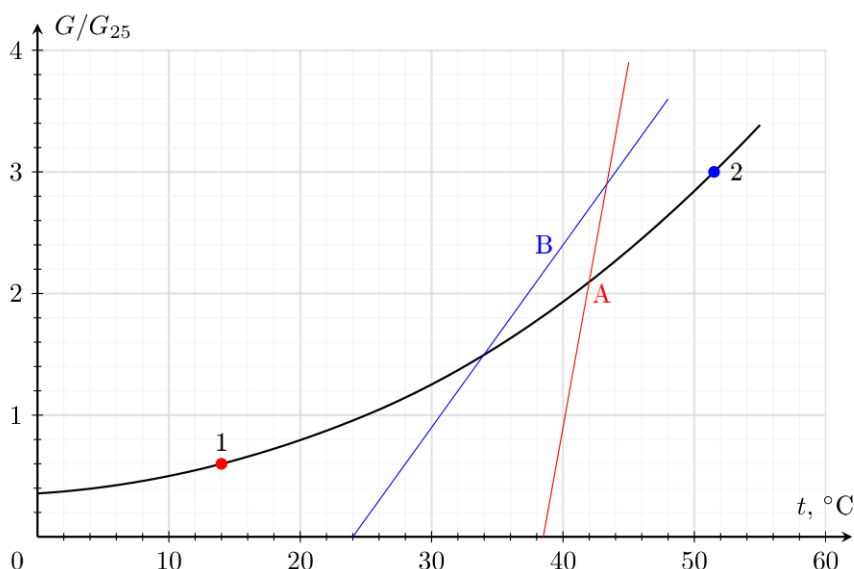
$$k = 0,6 \frac{1}{^\circ\text{C}} \cdot U_0^2 G_{25}.$$

Пусть теперь температура воздуха равна t_1 , а температура термистора, соответственно, $(t_1 + 1\text{ }^\circ\text{C})$.

Подставим эти значения в (1):

$$U_0^2 G(t_1 + 1\text{ }^\circ\text{C}) = k \cdot 1\text{ }^\circ\text{C} \quad \Rightarrow \quad G(t_1 + 1\text{ }^\circ\text{C}) = 0,6 G_{25}.$$

Данное значение проводимости (точка 1 на рис.) соответствует температуре $t_1 + 1\text{ }^\circ\text{C} = 14\text{ }^\circ\text{C}$, откуда $t_1 = 13\text{ }^\circ\text{C}$.



Пусть теперь $t_B = 38,5^\circ\text{C}$. Тогда

$$U_0^2 G(t) = k(t - 38,5^\circ\text{C}) \quad \Rightarrow \quad \frac{G(t)}{G_{25}} = 0,6 \frac{1}{^\circ\text{C}} \cdot (t - 38,5^\circ\text{C}).$$

Полученное уравнение решим графически, построив прямую, заданную этим уравнением, поверх данного в условии графика (прямая A на рис.). Точка пересечения соответствует температуре термистора $t = 42^\circ\text{C}$.

Пусть при напряжении источника $2U_0$ и температуре воздуха $t_B = 24^\circ\text{C}$, термистор в установленном режиме имеет температуру t_2 . Запишем условие теплового равновесия для термистора и подставим в него выражение для k :

$$4U_0^2 G(t_2) = k(t_2 - t_B) \quad \Rightarrow \quad \frac{G(t_2)}{G_{25}} = 0,15 \frac{1}{^\circ\text{C}} \cdot (t_2 - 24^\circ\text{C}).$$

Полученное уравнение снова решим графически, построив прямую, заданную этим уравнением (прямая B на рис.):

$$t_2 = 34^\circ\text{C}, \quad G(t_2) = 1,5G_{25}.$$

Однако экран прибора будет показывать не значение t_2 , а совершенно другое число $t_* \neq t_2$! Это связано с тем, что встроенный компьютер, переводящий показания амперметра в значение температуры, выводимое на экран настроен на напряжение U_0 . Чтобы найти формулу для пересчёта, запишем выражения для силы тока через термистор в двух случаях: 1) напряжение равно U_0 , температура равна t_* ; 2) напряжение равно $2U_0$, температура — t_2

$$I_1 = U_0 G(t_*) \quad \text{и} \quad I_2 = 2U_0 G(t_2).$$

Приравняв их, получим

$$G(t_*) = 2G(t_2) \quad \Rightarrow \quad \frac{G(t_*)}{G_{25}} = 3.$$

Отсюда, по графику (точка 2 на рис.), определяем, что $t_* \approx 51,5^\circ\text{C}$.