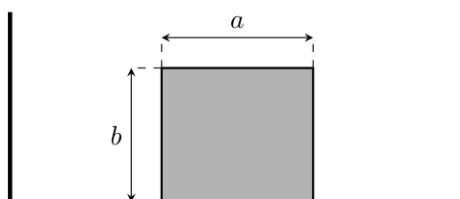


ВсОШ, 2025/26, заключительный этап, 10 класс, теоретический тур

Всероссийская олимпиада школьников по физике [Условия, ответы и решения](#)

Задача 1 Всплывающий брусок

На дне сосуда с плоским горизонтальным дном лежит длинный однородный брусок, поперечное сечение которого представляет собой прямоугольник со сторонами a и $b = a\sqrt{7}/3$ (см. рис.). В сосуд медленно наливают воду.



При какой высоте H уровня воды в сосуде брусок перестанет касаться дна? Плотность материала бруска равна 50% от плотности воды. Длина бруска много больше a . Из-за шероховатости поверхностей бруска и дна сосуда вода свободно подтекает между ними.

Подсказка

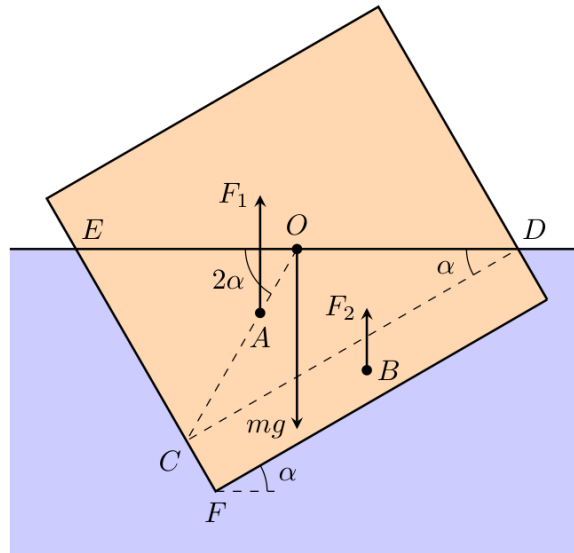
Брусок вдвое легче воды, поэтому, плавая, он погружён ровно наполовину и его ось лежит на уровне воды. Проверьте, устойчиво ли при таком отношении b/a положение «плашмя», и найдите угол наклона, при котором моменты сил Архимеда относительно оси уравновешены.

Ответ

$$H = \frac{\sqrt{7/3} + 1}{4} a \approx 0,632 a.$$

Решение

Рассмотрим сначала ситуацию, когда брусок плавает, не касаясь дна и повернувшись на угол α вокруг своей продольной оси (на рисунке изображено поперечное сечение бруска). Поскольку плотность материала равна 50% плотности воды, брусок погружён на половину своего объёма, и, следовательно, поверхность воды проходит через продольную ось симметрии бруска (через точку O на рис.). Помимо силы тяжести, приложенной в точке O , на брусок действует сила Архимеда. Для удобства подсчётов, разобьём погружённую часть изображённого сечения отрезком CD на две фигуры — треугольник ECD и оставшийся прямоугольник — и найдём центры масс каждой из них. Центр первой фигуры находится в точке пересечения медиан $\triangle ECD$ (в точке A), а центр второй — в точке B , где пересекаются диагонали прямоугольника.



Учитывая, что $CD = a$, $EC = a \operatorname{tg} \alpha$, $CF = (b - a \operatorname{tg} \alpha)/2$, и обозначив длину бруска как L , запишем выражения для составляющих силы Архимеда F_1 и F_2 , приложенных в точках A и B соответственно:

$$F_1 = \rho_{\text{в}} g L \cdot \frac{1}{2} a \cdot a \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \rho_{\text{в}} g a^2 L \operatorname{tg} \alpha, \quad F_2 = \rho_{\text{в}} g a L \cdot \frac{b - a \operatorname{tg} \alpha}{2}.$$

Длины отрезков AO и BO , опираясь на различные геометрические теоремы, можно найти как

$$AO = \frac{1}{3} CO = \frac{1}{6} ED = \frac{a}{6 \cos \alpha}, \quad BO = \frac{a \operatorname{tg} \alpha + CF}{2} = \frac{b + a \operatorname{tg} \alpha}{4}.$$

Определим теперь значение угла α , не равное нулю, при котором брусок находится в равновесии. Для этого запишем правило моментов относительно точки O :

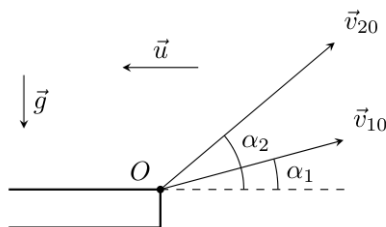
$$\begin{aligned} F_1 \cdot AO \cos 2\alpha &= F_2 \cdot BO \cos(90^\circ - \alpha) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \rho_{\text{в}} g a^2 L \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{a \cos 2\alpha}{6 \cos \alpha} &= \rho_{\text{в}} g a L \cdot \frac{b^2 - a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{8} \cdot \sin \alpha \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{2}{3} (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) &= \left(\frac{b}{a} \right)^2 - \operatorname{tg}^2 \alpha \Rightarrow \\ \Rightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha &= 3 \left(\frac{b}{a} \right)^2 - 2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = 30^\circ. \end{aligned}$$

Данное положение равновесия является устойчивым, так как при $\alpha > 30^\circ$ момент силы F_1 превышает момент силы F_2 , и брусок будет поворачиваться по часовой стрелке (угол α будет уменьшаться). Если же $\alpha < 30^\circ$, то, наоборот, момент силы F_2 будет больше, и брусок будет поворачиваться против часовой стрелки (α станет увеличиваться). Причём это справедливо, в том числе, и для малых углов, близких к 0° . Таким образом, когда вода дойдёт до высоты $b/2$, исходное положение бруска (при $\alpha = 0^\circ$) перестанет быть устойчивым, и один из краёв бруска (левый или правый — дело случая) станет подниматься вверх. При дальнейшем подъёме уровня воды вращение бруска продолжится, пока угол α не достигнет величины 30° . Если уровень воды продолжит увеличиваться, брусок оторвётся от дна сосуда и будет плавать в таком (устойчивом!) положении. Найдём высоту уровня воды, при которой произойдёт отрыв бруска:

$$H = EF \cos \alpha = \frac{b + a \operatorname{tg} \alpha}{2} \cdot \cos \alpha = \frac{\sqrt{7/3} + 1}{4} \cdot a \approx 0,632 a.$$

Задача 2 Двое против ветра

С высокого, но узкого моста над рекой одновременно и практически из одной точки O бросили два одинаковых шарика: первый — под углом $\alpha_1 = 10^\circ$ к горизонту со скоростью $v_{10} = 8$ м/с, второй — под углом $\alpha_2 = 50^\circ$ к горизонту (см. рис.).



В районе моста дует сильный горизонтальный ветер, в результате чего шарики спустя достаточно большое время стали двигаться по параллельным прямым, всё время находясь на **одной вертикали** на расстоянии $L = 6$ м друг от друга. Известно, что первый шарик упал в воду спустя $\tau = 5$ с после броска, а второй упал позднее. Считая, что величина и направление скорости ветра всюду одинаковы и не меняются со временем, определите:

1. начальную скорость второго шарика v_{20} ;
2. высоту моста H над поверхностью воды;
3. скорость ветра u , если известно, что оба шарика пересекли вертикаль, проходящую через точку O , на одинаковом от неё **расстоянии**.

Траектории обоих шариков лежат в одной плоскости, параллельной вектору $\vec{u}$. Сила, действующая на шарик со стороны воздуха, определяется формулой $\vec{F} = -k\vec{v}_{\text{отн}}$, где $\vec{v}_{\text{отн}}$ — скорость шарика относительно воздуха, а k — коэффициент пропорциональности. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с².

Подсказка

Вычтите друг из друга уравнения движения шариков: относительная скорость меняется пропорционально относительному смещению. Для одного шарика так же свяжите изменение вертикальной скорости с высотой падения, а в пункте 3 рассмотрите движение центра масс пары шариков.

Ответ

1) $v_{20} = v_{10} \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2} \approx 12,26$ м/с; 2) $H \approx 30,8$ м (30,83 м в приближении установившейся скорости, 30,84 м по точной формуле); 3) $u = \frac{m}{k} \frac{2g}{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2} \approx 10,96$ м/с.

Решение

Пункт 1. Метод №1. Рассмотрим относительное движение шариков. Запишем второй закон Ньютона для каждого из них

$$\begin{aligned} m\vec{a}_1 &= m\vec{g} - k(\vec{v}_1 - \vec{u}), \\ m\vec{a}_2 &= m\vec{g} - k(\vec{v}_2 - \vec{u}) \end{aligned}$$

и вычтем полученные выражения друг из друга

$$m\vec{a}_r = -k\vec{v}_r.$$

Здесь $\vec{a}_r = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$ — относительное ускорение шариков, а $\vec{v}_r = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ — их относительная скорость. Из этого равенства следует, что малое изменение относительной скорости $d\vec{v}_r$ и малое

изменение вектора смещения второго шарика относительно первого $d\vec{l}$ связаны соотношением

$$d\vec{v}_r = -\frac{k}{m} d\vec{l}.$$

Поскольку оно справедливо в любой момент времени, полное изменение относительной скорости $\Delta\vec{v}_r$ и полное изменение вектора смещения $\Delta\vec{l}$ связаны аналогично

$$\Delta\vec{v}_r = -\frac{k}{m} \Delta\vec{l}.$$

Согласно условию, спустя некоторое достаточно большое время относительная скорость шариков пренебрежимо мала ($\vec{v}_r = \vec{0}$), а вектор смещения между ними $\vec{l} = \vec{L}$ направлен вертикально вверх и имеет длину L , следовательно

$$\begin{aligned} \vec{0} - (\vec{v}_{20} - \vec{v}_{10}) &= -\frac{k}{m} (\vec{L} - \vec{0}), \\ \vec{v}_{20} - \vec{v}_{10} &= \frac{k}{m} \vec{L}. \end{aligned}$$

Запишем это равенство в проекции на горизонтальную ось

$$v_{20} \cos \alpha_2 - v_{10} \cos \alpha_1 = 0,$$

откуда

$$v_{20} = v_{10} \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2} \approx 12,26 \text{ м/с}.$$

Пункт 1. Метод №2. Запишем для первого шарика второй закон Ньютона в проекции на ось OX , направленную горизонтально вправо,

$$m \frac{dv_{1x}}{dt} = -k(v_{1x} + u).$$

Отсюда, применяя непосредственное интегрирование и учитывая начальные условия ($x_1(0) = 0$ и $v_{1x}(0) = v_{10} \cos \alpha_1$), получим

$$\begin{aligned} v_{1x}(t) &= (v_{10} \cos \alpha_1 + u) e^{-\frac{k}{m}t} - u, \\ x_1(t) &= \frac{m}{k} (v_{10} \cos \alpha_1 + u) \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) - ut. \end{aligned}$$

Аналогичным образом,

$$\begin{aligned} v_{2x}(t) &= (v_{20} \cos \alpha_2 + u) e^{-\frac{k}{m}t} - u, \\ x_2(t) &= \frac{m}{k} (v_{20} \cos \alpha_2 + u) \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) - ut. \end{aligned}$$

Из условия следует, что $x_1(\infty) = x_2(\infty)$, поэтому

$$v_{10} \cos \alpha_1 = v_{20} \cos \alpha_2,$$

откуда

$$v_{20} = v_{10} \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2} \approx 12,26 \text{ м/с}.$$

Пункт 2. Метод №1. Заметим, что в соответствии с тем, что второй шарик упал позднее, вектор $\vec{L}$ направлен вверх. Запишем полученное выше векторное равенство $\vec{v}_{20} - \vec{v}_{10} = \frac{k}{m} \vec{L}$ в проекции на вертикальную ось

$$v_{20} \sin \alpha_2 - v_{10} \sin \alpha_1 = \frac{k}{m} L.$$

Отсюда

$$\frac{m}{k} = \frac{L}{v_{20} \sin \alpha_2 - v_{10} \sin \alpha_1} = 0,75 \text{ с.}$$

Теперь рассмотрим движение первого шарика в отдельности. Запишем для него второй закон Ньютона в проекции на вертикальную ось OY ,

$$m \frac{dv_{1y}}{dt} = -mg - kv_{1y} \quad \Rightarrow \quad dv_{1y} = -g dt - \frac{k}{m} dy_1.$$

Здесь y_1 — вертикальная координата первого шарика. Нетрудно заметить, что спустя достаточно большое время вертикальная проекция скорости примет значение $-mg/k$. Переходя к конечным приращениям так, как мы раньше сделали с относительной скоростью и вектором смещения между шариками, получим

$$-\frac{mg}{k} - v_{10} \sin \alpha_1 = -g\tau + \frac{k}{m} H.$$

Отсюда

$$H = \frac{m}{k}(g\tau - v_{10} \sin \alpha_1) - \frac{m^2}{k^2} g = 30,83 \text{ м.}$$

Пункт 2. Метод №2. Запишем для первого шарика второй закон Ньютона в проекции на ось OY , направленную вертикально вверх,

$$m \frac{dv_{1y}}{dt} = -mg - kv_{1y}.$$

Отсюда, интегрируя с учётом начальных условий ($y(0) = 0$ и $v_{1y}(0) = v_{10} \sin \alpha_1$), получим

$$\begin{aligned} v_{1y}(t) &= \left(v_{10} \sin \alpha_1 + \frac{mg}{k} \right) e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}, \\ y_1(t) &= \frac{m}{k} \left(v_{10} \sin \alpha_1 + \frac{mg}{k} \right) \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right) - \frac{mg}{k} t. \end{aligned}$$

Аналогичным образом,

$$\begin{aligned} v_{2y}(t) &= \left(v_{20} \sin \alpha_2 + \frac{mg}{k} \right) e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}, \\ y_2(t) &= \frac{m}{k} \left(v_{20} \sin \alpha_2 + \frac{mg}{k} \right) \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right) - \frac{mg}{k} t. \end{aligned}$$

Из условия следует, что $y_2(\infty) - y_1(\infty) = L$, так что

$$\frac{m}{k}(v_{20} \sin \alpha_2 - v_{10} \sin \alpha_1) = L.$$

Отсюда

$$\frac{m}{k} = \frac{L}{v_{20} \sin \alpha_2 - v_{10} \sin \alpha_1} = 0,75 \text{ с.}$$

Согласно условию,

$$H = -y_1(\tau) = \frac{mg}{k}\tau - \frac{m}{k} \left(v_{10} \sin \alpha_1 + \frac{mg}{k} \right) \left(1 - e^{-\frac{k}{m}\tau} \right) = 30,84 \text{ м.}$$

Пункт 3. Метод №1. Рассмотрим движение системы шариков как целого. Ускорение центра масс $\vec{a}_c = (\vec{a}_1 + \vec{a}_2)/2$ связано с внешними силами выражением

$$2m\vec{a}_c = -k(\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - 2\vec{u}) + 2m\vec{g} = -2k(\vec{v}_c - \vec{u}) + 2m\vec{g},$$

где $\vec{v}_c = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2)/2$ — скорость центра масс. Введём обозначение $\vec{v}_f = \vec{u} + m\vec{g}/k$ — несложно показать, что это установившаяся скорость любого из шариков. Получим

$$\vec{a}_c = -\frac{k}{m}(\vec{v}_c - \vec{v}_f).$$

Перейдём в систему отсчёта, которая движется с постоянной скоростью $\vec{v}_f$. Ускорение и скорость центра масс в этой системе обозначим $\vec{a}'_c$ и $\vec{v}'_c$ соответственно. Тогда

$$\vec{a}'_c = -\frac{k}{m}\vec{v}'_c.$$

Это уравнение описывает прямолинейное движение! При этом известно, что центр масс дважды проходил через точку O , которая в выбранной системе отсчёта движется с постоянной скоростью $-\vec{v}_f$. Следовательно, $\vec{v}'_c \parallel \vec{v}_f$. Но $\vec{v}'_c = \vec{v}_c - \vec{v}_f$, а значит

$$\vec{v}_c \parallel \vec{v}_f,$$

то есть

$$(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \parallel \left(\vec{u} + \frac{m\vec{g}}{k} \right).$$

Это верно для любого момента времени, в том числе для начального. Таким образом

$$\frac{v_{10} \cos \alpha_1 + v_{20} \cos \alpha_2}{v_{10} \sin \alpha_1 + v_{20} \sin \alpha_2} = \frac{u}{mg/k}.$$

С учётом $v_{20} \cos \alpha_2 = v_{10} \cos \alpha_1$ отсюда получим

$$u = \frac{m}{k} \frac{2g}{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2} \approx 10,96 \text{ м/с}.$$

Пункт 3. Метод №2. Пусть ось OY шарика пересекают в момент времени t_1 на расстояниях h от точки O . Тогда имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{m}{k}(v_{10} \cos \alpha_1 + u) \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t_1} \right) - ut_1, \\ -h &= \frac{m}{k} \left(v_{10} \sin \alpha_1 + \frac{mg}{k} \right) \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t_1} \right) - \frac{mg}{k}t_1, \\ h &= \frac{m}{k} \left(v_{20} \sin \alpha_2 + \frac{mg}{k} \right) \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t_1} \right) - \frac{mg}{k}t_1. \end{aligned}$$

Исключив из этой системы t_1 и h , выразим

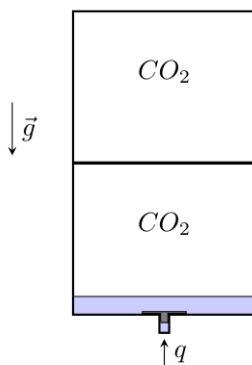
$$u = \frac{2mg}{k} \frac{v_{10} \cos \alpha_1}{v_{10} \sin \alpha_1 + v_{20} \sin \alpha_2}.$$

С учётом $v_{20} \cos \alpha_2 = v_{10} \cos \alpha_1$ отсюда получим

$$u = \frac{m}{k} \frac{2g}{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2} \approx 10,96 \text{ м/с}.$$

Задача 3 Газировка под поршнем

Вертикально расположенный цилиндрический сосуд разделён на две равные части объёмом $V_0 = 6,6$ л каждой лёгким горизонтальным газонепроницаемым поршнем, который может перемещаться без трения. Площадь поперечного сечения сосуда $S = 128 \text{ см}^2$. В обеих частях сосуда находятся одинаковые количества углекислого газа при давлении $P_0 = 164 \text{ кПа}$ и температуре $T_0 = 274 \text{ К}$.



В момент времени $t = 0$ с в нижнюю часть сосуда через клапан в его дне начинает медленно поступать холодная вода с постоянным объёмным расходом $q = 0,004$ л/с. Поступившая вода постоянно перемешивается так, что углекислый газ растворяется в ней до равновесного состояния. Температура воды и газа в обеих частях сосуда поддерживается постоянной и равной T_0 . Работа насоса, подающего воду, прекращается в момент, когда давление газа в верхней части сосуда достигает значения $P_{кр} = 410$ кПа.

Когда углекислый газ находится над поверхностью жидкости, масса CO_2 , растворённого при температуре T_0 в 1 м^3 жидкости, в равновесном состоянии равна $\mu_p = k \cdot P$, где $k = 3,17 \cdot 10^{-5}$ кг/(Па $\cdot$ м³), а P — парциальное давление углекислого газа, контактирующего с поверхностью жидкости (закон Генри).

Молярная масса углекислого газа $M = 44$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(К $\cdot$ моль). Давлением насыщенных паров воды, изменением объёма воды при растворении в ней газа и объёмом клапана пренебречь.

1. С какой скоростью и в каком направлении движется поршень в начальный момент времени?
2. Через какое время с момента включения насоса достигается минимальное давление в верхней части сосуда?
3. Определите минимальное давление в верхней части сосуда за время работы насоса.
4. Сколько времени проработал насос до своего выключения?
5. Постройте график зависимости объёма газа в верхней части сосуда от времени. Укажите на нём координаты характерных точек.

Подсказка

Поршень лёгкий, поэтому давление газа сверху и снизу одинаково, а температура постоянна. Запишите, куда девается газ из нижней части: он растворяется в поступившей воде. Подумайте, что изменится, когда весь газ под поршнем растворится.

Ответ

- 1) вниз, $v_p = \frac{q}{2S} \left(\frac{kRT_0}{M} - 1 \right) \approx 0,01$ см/с; 2) $t_1 \approx 1250$ с; 3) $P_{min} \approx 132$ кПа; 4) $t_2 = 2640$ с; 5) ломаная из двух отрезков через точки (0 с; 6,6 л), (1250 с; 8,2 л), (2640 с; 2,64 л).

Решение

Пусть V_b — объём верхней части сосуда, V_1 и V_2 — объёмы газа и, соответственно, газированной воды в нижней части сосуда. Так как вода поступает с постоянной скоростью, а суммарный объём сосуда равен $2V_0$, то

$$V_2 = qt, \quad V_1 = 2V_0 - V_b - qt.$$

Рассмотрим случай, когда вода ещё не заполнила всю нижнюю часть сосуда ($V_1 > 0$). Поршень, разделяющий сосуд, лёгкий и движется без трения, поэтому давление углекислого газа P по обе стороны от него одинаково. Масса CO_2 , растворённого в воде, согласно закону Генри равна

$$m_2 = \mu_p V_2 = k P V_2 = k P q t.$$

В начальный момент массы газа в верхней и нижней частях сосуда равны, следовательно в некоторый момент t масса газа под поршнем

$$m_1 = m_b - m_2 = m_b - k P q t, \quad (*)$$

где m_B — масса углекислого газа в верхней части сосуда. Запишем теперь уравнения Менделеева–Клапейрона для газа, находящегося по обе стороны от поршня, и, выражая оттуда массы, подставим их в уравнение (*)

$$\begin{cases} PV_B = m_B RT_0 / M, \\ PV_1 = m_1 RT_0 / M \end{cases} \Rightarrow \frac{PV_1 M}{RT_0} = \frac{PV_B M}{RT_0} - kPqt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_1 = V_B - \frac{kRT_0}{M} \cdot qt.$$

Отсюда, решая систему, найдём, что

$$V_B = V_0 + \frac{qt}{2} \left(\frac{kRT_0}{M} - 1 \right), \quad V_1 = V_0 - \frac{qt}{2} \left(\frac{kRT_0}{M} + 1 \right). \quad (**)$$

Поскольку

$$\frac{kRT_0}{M} = \frac{3,17 \cdot 10^{-5} \cdot 8,31 \cdot 274}{0,044} \approx 1,64 > 1,$$

то из первого выражения в (**) следует, что V_B увеличивается с постоянной скоростью, а поршень движется вниз. Скорость его движения равна

$$v_{\Pi} = \frac{\Delta V_B}{S \Delta t} = \frac{q}{2S} \left(\frac{kRT_0}{M} - 1 \right) = \frac{4 \text{ см}^3/\text{с}}{256 \text{ см}^2} (1,64 - 1) \approx 0,01 \text{ см/с}.$$

Из второго выражения в (**) следует, что объём газа над поверхностью воды в нижней части сосуда непрерывно уменьшается и в момент времени

$$t_1 = \frac{2V_0}{q(kRT_0/M + 1)} = \frac{2 \cdot 6,6 \text{ л}}{0,004 \text{ л/с} \cdot (1,64 + 1)} \approx 1250 \text{ с}$$

становится нулевым, весь газ оказывается растворённым в жидкости, а жидкость упирается в поршень. В дальнейшем поступающая вода будет поднимать поршень, а объём газа в верхней части сосуда станет уменьшаться. Процесс, происходящий с газом над поршнем, изотермический, поэтому минимальное давление $P_{\min}$ достигается при максимальном V_B , то есть через время $t = t_1$ после включения насоса.

Максимальный объём верхней части сосуда достигается в момент времени t_1 . Найдём этот объём, подставив выражение для t_1 в первую формулу (**):

$$V_{B \max} = 2V_0 \cdot \frac{kRT_0/M}{kRT_0/M + 1} \approx 8,2 \text{ л}.$$

Давление газа над поршнем в этот момент, согласно закону Бойля–Мариотта, равно

$$P_{\min} = \frac{P_0 V_0}{V_{B \max}} \approx 132 \text{ кПа}.$$

В момент выключения насоса давление газа над поршнем равно $P_{\text{кр}}$, а объём верхней части сосуда составляет

$$V_{B \text{ кр}} = \frac{P_0 V_0}{P_{\text{кр}}} = \frac{2V_0}{5} = 2,64 \text{ л}.$$

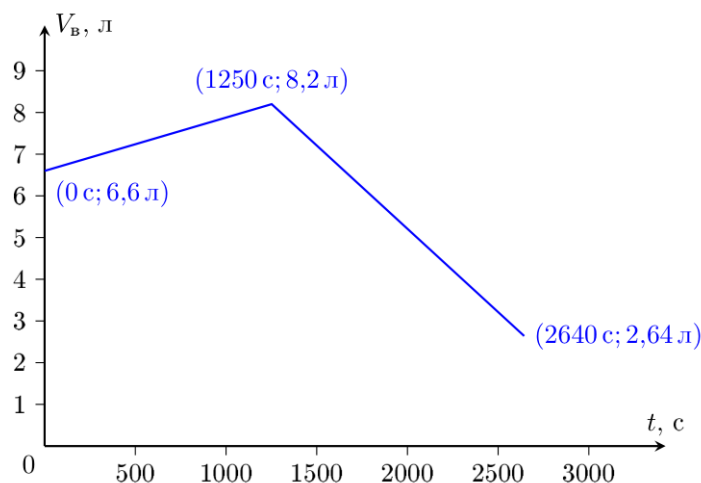
Объём остальной части сосуда, заполненной водой, равен

$$V_{2 \text{ кр}} = 2V_0 - V_{B \text{ кр}} = \frac{8V_0}{5}.$$

Отсюда получим, что время работы насоса

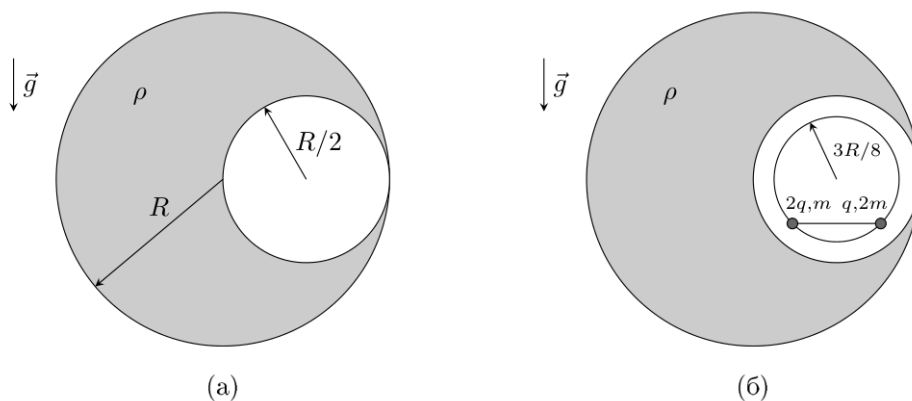
$$t_2 = \frac{V_{2 \text{ кр}}}{q} = \frac{8V_0}{5q} = 2640 \text{ с}.$$

Исходя из результатов, полученных в предыдущих пунктах, график зависимости $V_B(t)$ имеет вид ломаной, состоящей из двух прямолинейных участков. Вершина ломаной находится в точке с координатами $(t_1; V_{B \max})$, а её концы — в точках $(0; V_0)$ и $(t_2; V_{B \text{кр}})$. Построим график функции $V_B(t)$, отметив на нём характерные точки.



Задача 4 Гантель в полости

В равномерно заряженном по объёму очень длинном непроводящем цилиндре радиусом R высверлили цилиндрическую полость радиусом $R/2$. Ось полости параллельна оси цилиндра, расстояние между осями равно $R/2$. Цилиндр закреплён в поле тяжести так, что плоскость, проходящая через оси цилиндра и полости, горизонтальна (рис. а). Известно, что небольшой шарик массой m , заряженный зарядом q того же знака, что и заряд цилиндра, отпущенный из точки на оси полости без начальной скорости, столкнётся со стенкой полости через время $\tau = \sqrt{\sqrt{2}R/(2g)}$, где g — ускорение свободного падения.



1. Определите объёмную плотность заряда цилиндра ρ .

В полости цилиндра в вертикальной плоскости закрепляют гладкое непроводящее кольцо радиусом $3R/8$, так что центр кольца лежит на оси полости. На кольцо надевают две маленькие бусинки и шарнирно соединяют их лёгким стержнем длиной $3\sqrt{2}R/8$. Заряды и массы бусинок равны $2q, m$ и $q, 2m$ соответственно. Систему из бусинок и стержня удерживают так, что стержень горизонтален (рис. б). Систему отпускают, и она начинает двигаться без трения по кольцу.

2. Определите максимальную скорость бусинок в процессе их движения.

3. Определите силу, с которой стержень действует на бусинку в момент, когда скорость бусинок максимальна.

4. Определите силы, с которыми каждая из бусинок действует на кольцо в момент, когда скорость бусинок максимальна.

Кольцо находится вдали от торцов цилиндра.

Подсказка

Полость — это суперпозиция сплошного цилиндра с плотностью ρ и цилиндра с плотностью $-\rho$; поле в ней однородно. Сравните электрическую силу с силой тяжести и запишите работу всех сил как функцию угла поворота стержня.

Ответ

$$1) \rho = \frac{4\varepsilon_0 mg}{qR}; \quad 2) v_{max} = \frac{\sqrt{(2 - \sqrt{2})gR}}{2}; \quad 3) T = 2\sqrt{2}mg - \frac{16q^2}{9\pi\varepsilon_0 R^2}; \quad 4) \text{бусинка } (2q, m): N_m = mg \frac{13 - 2\sqrt{2}}{3}, \text{ бусинка } (q, 2m): N_{2m} = mg \frac{17 - 4\sqrt{2}}{3}.$$

Решение

Рассмотрим плоскость, перпендикулярную осям полости и цилиндра. Пусть O — точка пересечения оси цилиндра с этой плоскостью, а O' — точка пересечения с осью полости (рис. 1). Выберем произвольную точку A внутри полости. Если $\vec{r} = \vec{OA}$, $\vec{r}' = \vec{O'A}$, а $\vec{d} = \vec{OO'}$, тогда $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{d}$.

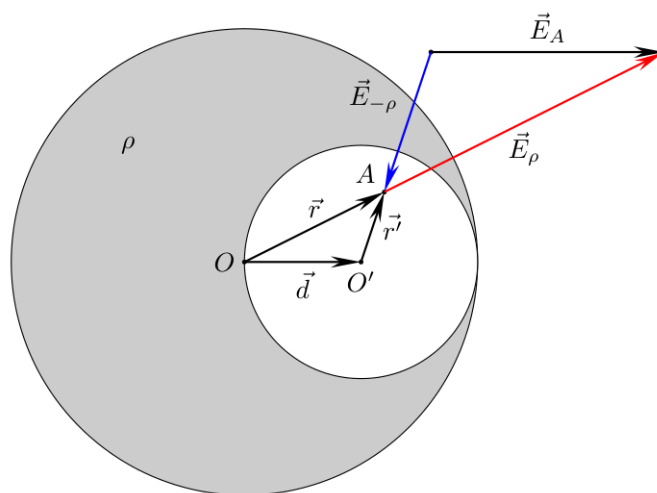


Рис. 1

Пусть ρ — объёмная плотность заряда цилиндра, тогда полость можно представить как суперпозицию цилиндров с объёмной плотностью заряда ρ и $-\rho$. Первый цилиндр дополняет цилиндр с вырезом до полного сплошного цилиндра. Поле внутри выреза представим как суперпозицию полей дополненного цилиндра и цилиндра с плотностью заряда $-\rho$.

Используя симметрию, найдём с помощью теоремы Гаусса напряжённость поля $E(r)$ внутри равномерно заряженного цилиндра:

$$\Phi_E = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}, \text{ где } \Phi_E = 2\pi r l E(r), \quad q_{in} = \pi r^2 l \rho,$$

откуда $E(r) = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$ или, в векторном виде, $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \vec{r}$. Тогда напряжённость поля в произволь-

ной точке A равна

$$\vec{E}_A = \vec{E}_\rho(\vec{r}) + \vec{E}_{-\rho}(\vec{r}') = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\vec{r} + \frac{(-\rho)}{2\varepsilon_0}\vec{r}' = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\vec{d}.$$

Таким образом, поле внутри полости однородно, вектор напряжённости направлен горизонтально, а его модуль равен $E_\Pi = \frac{\rho R}{4\varepsilon_0}$.

На заряженный шарик массой m и зарядом q , помещённый в полость, действует сила $\vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_E$, где $F_g = mg$ — сила тяжести, $F_E = \frac{q\rho R}{4\varepsilon_0}$ — сила со стороны электрического поля. Эти силы взаимно перпендикулярны и однородны, поэтому шарик будет двигаться с постоянным ускорением $a = \sqrt{g^2 + \left(\frac{q\rho R}{4m\varepsilon_0}\right)^2}$. С другой стороны, шарик долетел до стенки полости за время τ . Это значит, что $a = \frac{2(R/2)}{\tau^2} = \sqrt{2}g$, откуда $\rho = \frac{4\varepsilon_0 mg}{qR}$.

Пусть B — середина стержня, $r = 3R/8$ — радиус кольца, а $L = \sqrt{2}r$ — расстояние между бусинками. При движении стержня с бусинками вектор $\vec{O'B}$ будет поворачиваться против часовой стрелки в плоскости рисунка, а скорость обеих бусинок будет, в силу кинематической связи, одинакова. Обозначим φ угол поворота вектора $\vec{O'B}$ и найдём значение угла φ_p , соответствующее максимальной скорости бусинок.

Пункт 2. Метод №1. Согласно теореме о кинетической энергии

$$\frac{3mv^2}{2} = A_g + A_E,$$

где v — скорость бусинок, A_g и A_E — работа силы тяжести и электрической силы соответственно. Запишем выражения для обеих работ при повороте вектора $\vec{O'B}$ на угол φ :

$$\begin{aligned} A_g &= mgr(\cos(\varphi - \pi/4) - \cos(\pi/4)) + 2mgr(\cos(\pi/4 + \varphi) - \cos(\pi/4)), \\ A_E &= 2qE_\Pi r(\sin(\varphi - \pi/4) + \sin(\pi/4)) + qE_\Pi r(\sin(\pi/4 + \varphi) - \sin(\pi/4)). \end{aligned}$$

Из соотношений, найденных в первом пункте, получим, что

$$qE_\Pi = q \cdot \frac{\rho R}{4\varepsilon_0} = mg.$$

Используя это, запишем выражение для суммарной работы:

$$A_\Sigma = A_g + A_E = mgr(2\cos(\varphi - \pi/4) - \sqrt{2}).$$

Скорость бусинок будет наибольшей тогда, когда A_Σ достигнет максимума, то есть при $\varphi_p = \pi/4$. Подставляя это значение в выражение для суммарной работы, получим

$$\begin{aligned} A_{\Sigma \max} &= mgr(2 - \sqrt{2}) \Rightarrow \frac{3mv_{\max}^2}{2} = mgr(2 - \sqrt{2}) \Rightarrow \\ \Rightarrow v_{\max} &= \sqrt{\frac{2(2 - \sqrt{2})gr}{3}} = \frac{\sqrt{(2 - \sqrt{2})gR}}{2}. \end{aligned}$$

Пункт 2. Метод №2. В момент достижения бусинками максимальной скорости их тангенциальное ускорение равно нулю. Поэтому сумма моментов сил тяжести и электрических сил, рассчитанных в данный момент относительно точки O' , равна нулю. Запишем выражения для M_g и M_E (суммарного момента сил тяжести и электрических сил соответственно), принимая в качестве положительного направление против часовой стрелки:

$$M_g = -mgr \sin(\varphi - \pi/4) - 2mgr \sin(\varphi + \pi/4),$$

$$M_E = 2qE_{\Pi}r \cos(\varphi - \pi/4) + qE_{\Pi}r \cos(\varphi + \pi/4).$$

Из соотношений, найденных в первом пункте, получим, что

$$qE_{\Pi} = q \cdot \frac{\rho R}{4\epsilon_0} = mg.$$

Используя это, запишем выражение для суммарного момента

$$M_{\Sigma} = M_g + M_E = -mgr \sin(\varphi - \pi/4) - 2mgr \sin(\varphi + \pi/4) + 2mgr \cos(\varphi - \pi/4) + mgr \cos(\varphi + \pi/4) = -2mgr \sin(\varphi - \pi/4).$$

При $\varphi < \pi/4$ суммарный момент положительный, и система разгоняется, достигая максимальной скорости при $\varphi_p = \pi/4$, когда $M_{\Sigma} = 0$. Согласно закону изменения энергии

$$\frac{3mv_{max}^2}{2} + 2mgr - 3mg \cdot \left(r - \frac{r}{\sqrt{2}}\right) = 2qE_{\Pi} \cdot \frac{r}{\sqrt{2}} + qE_{\Pi} \left(r - \frac{r}{\sqrt{2}}\right),$$

откуда

$$\frac{3mv_{max}^2}{2} = mgr(2 - \sqrt{2}) \Rightarrow v_{max} = \sqrt{\frac{2(2 - \sqrt{2})gr}{3}} = \frac{\sqrt{(2 - \sqrt{2})gR}}{2}.$$

Пункты 3 и 4. Сделаем несколько утверждений:

- 1) Так как стержень невесом, сумма сил, действующих на стержень, равна нулю.
- 2) Так как стержень и бусинки соединены шарнирно, сила, с которой стержень действует на бусинки, направлена вдоль него.
- 3) В момент достижения бусинкой максимальной скорости её тангенциальное ускорение равно нулю, поэтому проекция сил, действующих на эту бусинку, на ось, перпендикулярную радиусу, равна нулю.

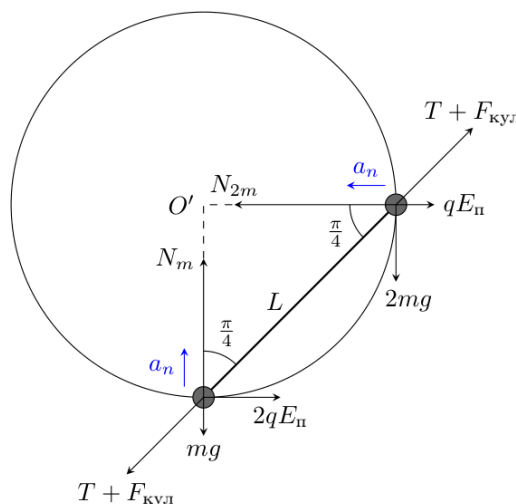


Рис. 2

Рассмотрим силы, действующие на каждую из бусинок в момент достижения ими максимальной скорости, то есть при $\varphi_p = \pi/4$ (рис. 2). Запишем второй закон Ньютона для нижней бусинки в проекции на горизонтальную ось, учитывая третье утверждение,

$$0 = 2qE_{\Pi} - (T + F_{кул}) \cos(\pi/4),$$

где T — сила реакции стержня, а $F_{\text{кул}} = q^2/(2\pi\epsilon_0 L^2)$ — сила электростатического отталкивания бусинок.

Отсюда получим, что

$$T = 2\sqrt{2} q E_{\text{п}} - F_{\text{кул}} = 2\sqrt{2} mg - \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 L^2} = 2\sqrt{2} mg - \frac{16q^2}{9\pi\epsilon_0 R^2}.$$

Нормальное ускорение в этот момент равно $a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{2(2 - \sqrt{2})}{3}g$. Запишем второй закон Ньютона для обеих бусинок в проекции на радиально направленные оси (для нижней бусинки — на вертикальную, для верхней — на горизонтальную):

$$\begin{aligned} ma_n &= -(T + F_{\text{кул}}) \sin(\pi/4) - mg + N_m, \\ 2ma_n &= -(T + F_{\text{кул}}) \sin(\pi/4) - qE_{\text{п}} + N_{2m}. \end{aligned}$$

Поскольку $T + F_{\text{кул}} = 2\sqrt{2} q E_{\text{п}}$,

$$\begin{aligned} N_m &= mg + ma_n + 2qE_{\text{п}} = 3mg + mg \cdot \frac{2(2 - \sqrt{2})}{3} = mg \cdot \frac{13 - 2\sqrt{2}}{3}, \\ N_{2m} &= 2ma_n + 3qE_{\text{п}} = 3mg + mg \cdot \frac{4(2 - \sqrt{2})}{3} = mg \cdot \frac{17 - 4\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

Задача 5 Термистор, лазер и диод

Десятиклассник Паша, познакомившись на прошедшем региональном этапе со свойствами термистора, решил собрать электрическую цепь, состоящую из источника, ЭДС которого можно регулировать, резистора сопротивлением $r = 40$ Ом, а также соединённых между собой параллельно диода и термистора (см. рис. 1). ЭДС источника можно изменять в пределах от 0 В до некоторого достаточного большого значения $\mathcal{E}_{\text{max}}$.

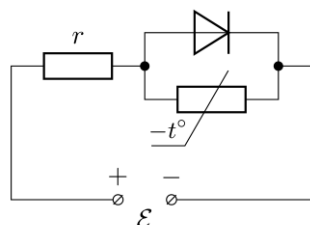


Рис. 1

Паше известно, что вольт-амперная характеристика диода имеет вид, представленный на рис. 2, а температурная зависимость сопротивления термистора задаётся формулой

$$R(t) = R_0/(1 + \alpha(t - t_0))^2,$$

где $R_0 = 60$ Ом — сопротивление термистора при комнатной температуре t_0 (значение константы α мальчик не нашёл). Включив источник и медленно увеличивая его ЭДС, Паша обнаружил, что диод открывается при ЭДС источника $\mathcal{E}_1 = 5$ В.

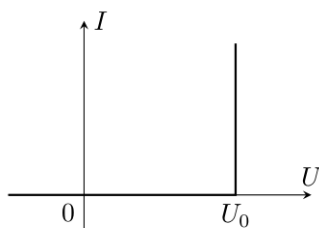


Рис. 2

1. Продолжая свои эксперименты, Паша взял мощный лазер и стал светить им прямо на термистор. Оказалось, что диод при этом закрылся и, более того, никакие изменения ЭДС источника не приводили к его открытию! Определите минимальную тепловую мощность P , передаваемую при этом от лазера термистору.
2. Выключив лазер, Паша обнаружил, что диод остался закрытым, несмотря на то, что ЭДС источника была близка к $\mathcal{E}_{max}$. Удивившись, мальчик стал плавно уменьшать ЭДС. При каком максимальном значении ЭДС источника $\mathcal{E}_2$ диод снова откроется?

Напряжение на открытом диоде равно $U_0 = 2$ В. Теплоёмкостью термистора и внутренним сопротивлением источника можно пренебречь. Мощность тепловых потерь пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. Термистор во всех экспериментах находится в воздухе, имеющем температуру t_0 , не контактируя с другими предметами.

Подсказка

Пока диод закрыт, весь ток идёт через термистор, а диод откроется, когда напряжение на термисторе дойдёт до U_0 . Запишите баланс мощностей термистора и выразите напряжение на нём через температуру: у этой зависимости есть максимум.

Ответ

$$1) P = \frac{k}{\alpha} \left(\frac{R_0 k / \alpha}{4U_0^2} - 1 \right) = 37,5 \text{ мВт (здесь } k/\alpha = 0,3 \text{ Вт); } 2) \mathcal{E}_2 = 14 \text{ В.}$$

Решение

Когда диод открывается, напряжение на нём и на термисторе равно U_0 , а сила тока через диод равна нулю. Поэтому сила тока, протекающего через резистор r и термистор, равна $I = (\mathcal{E}_1 - U_0)/r$. С другой стороны,

$$I = U_0/R_0 \cdot (1 + \alpha(t_1 - t_0))^2,$$

где t_1 — температура термистора в данном режиме. Приравнявая эти выражения, находим, что

$$\alpha(t_1 - t_0) = \sqrt{\frac{R_0}{r} \cdot \frac{(\mathcal{E}_1 - U_0)}{U_0}} - 1 = 0,5.$$

Тепловая мощность, выделяющаяся на термисторе, должна в установившемся режиме рассеиваться в окружающий воздух. Поэтому

$$\frac{U_0^2}{R_0} \cdot (1 + \alpha(t_1 - t_0))^2 = k(t_1 - t_0),$$

где k — коэффициент в законе Ньютона-Рихмана. Выразим из данного выражения величину k/α :

$$\frac{k}{\alpha} = \frac{U_0^2}{R_0} \cdot \frac{(1 + \alpha(t_1 - t_0))^2}{\alpha(t_1 - t_0)} = 0,3 \text{ Вт.}$$

Рассмотрим теперь случай, когда на термистор светят лазером. Запишем условие баланса мощностей при напряжении на термисторе, равном U :

$$\frac{U^2}{R_0} \cdot (1 + \alpha(t - t_0))^2 + P = k(t - t_0).$$

Выразим U^2 :

$$U^2 = R_0 \cdot \frac{k(t - t_0) - P}{(1 + \alpha(t - t_0))^2} \quad (*)$$

и найдём максимум этой функции. Обозначая $z = \alpha(t - t_0 - P/k)$, получим

$$U^2 = \frac{R_0 k / \alpha \cdot z}{(1 + \alpha P / k + z)^2} = \frac{R_0 k / \alpha}{\left(\frac{1 + \alpha P / k}{\sqrt{z}} + \sqrt{z}\right)^2}.$$

Далее используем неравенство о средних:

$$U^2 \leq U_{max}^2 = \frac{R_0 k / \alpha}{4(1 + \alpha P / k)}.$$

Если диод не открывается при любой ЭДС источника,

$$U_{max} \leq U_0 \Rightarrow P \geq \frac{k}{\alpha} \cdot \left(\frac{R_0 k / \alpha}{4U_0^2} - 1 \right) = 0,0375 \text{ Вт}.$$

Таким образом, минимальная тепловая мощность, которую должен передавать лазер, чтобы диод закрылся при любой $\mathcal{E}$, равна 37,5 мВт.

Для того чтобы понять, почему диод после выключения лазера не открылся, заметим, что выражение (*) при $P = 0$ тоже имеет максимум, а следовательно напряжение на термисторе может быть меньше U_0 как при малых токах (и малых ЭДС), так и при больших токах (и, соответственно, больших ЭДС). Подставив в (*) значения U_0 , R_0 , k/α и $P = 0$, получим уравнение

$$\frac{\alpha(t - t_0)}{(1 + \alpha(t - t_0))^2} = \frac{2}{9},$$

которое имеет два корня: первый нам уже известен

$$\alpha(t_1 - t_0) = 1/2,$$

а второй — новый

$$\alpha(t_2 - t_0) = 2.$$

Рассчитаем для него ЭДС источника, считая ток через диод равным нулю:

$$\mathcal{E}_2 = I_2 r + U_0 = \frac{U_0 r}{R_0} (1 + \alpha(t_2 - t_0))^2 + U_0 = \frac{9U_0 r}{R_0} + U_0 = 14 \text{ В}.$$

Таким образом, ЭДС источника надо уменьшить до 14 В, чтобы диод снова открылся.