

ВсОШ, 2025/26, заключительный этап, 11 класс, теоретический тур

Условия и ответы

1 Выбоина

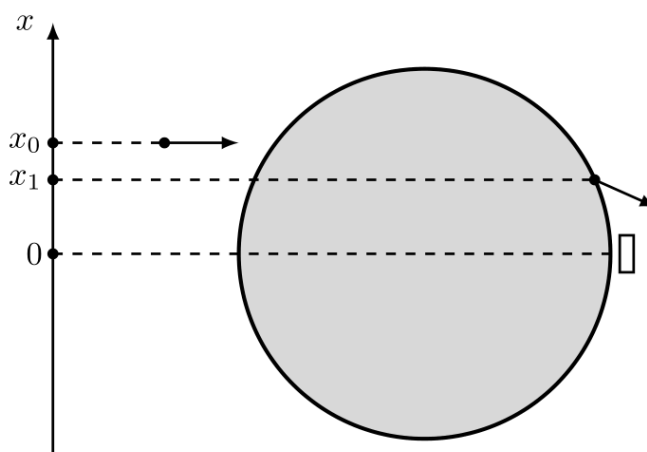
Экспериментатор Глюк решил научиться играть в настольную игру — аэрохоккей. Для этого он купил всё необходимое оборудование и начал тренироваться. Однако, к своему удивлению, обнаружил, что нередко после запуска шайбы траектория отличается от прямолинейной.

Глюк решил проверить, в чём дело, и обнаружил деформацию горизонтальной поверхности игрового поля: на одном из её участков было круглое осесимметричное углубление (выбоина) радиусом R с гладкими краями и горизонтальным дном (см. рис.).

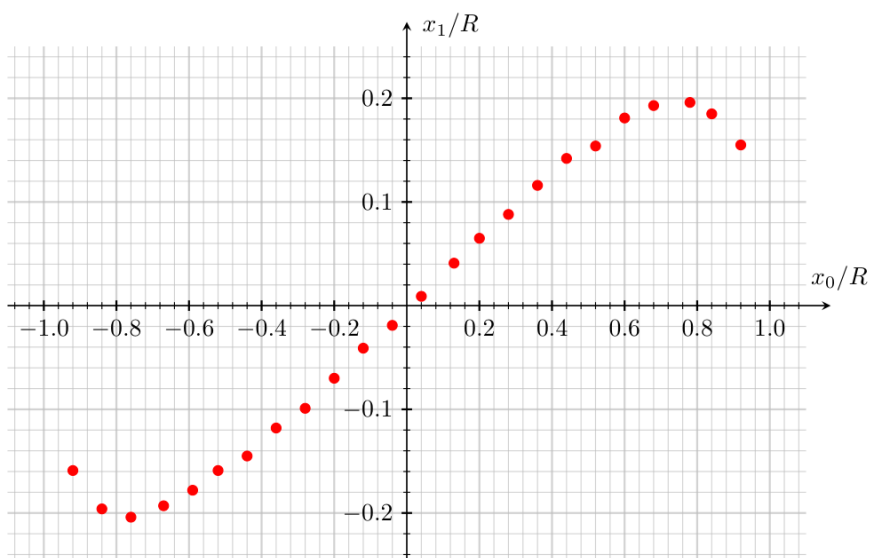


Экспериментатор решил проанализировать, как смещается шайба при прохождении через выбоину. Для этого он запускал шайбу перпендикулярно оси OX (см. рис.) из разных начальных положений с координатой x_0 и измерял координату x_1 выхода шайбы из выбоины.

из разных начальных положений с координатой x_0 и из
ыхода шайбы из выбоины.



В результате он получил вот такие экспериментальные точки:



Начальная скорость всех запущенных шайб v_1 , ускорение свободного падения g . Трение отсутствует.

1. Определите глубину выбоины.
2. Определите, при какой глубине выбоины Глюк всегда попадал бы в ворота, запуская шайбу из точек с начальными координатами $|x_0| \ll R$.

Считайте, что проекции наклонных участков выбоины (её «стенок») на горизонтальную плоскость много меньше радиуса выбоины, а шайба никогда не отрывается от поверхности и является точечной. Место установки ворот изображено на рисунке; считайте, что их размеры малы.

Ответ

$$1) h \approx 0,61 \frac{v_1^2}{g}; \quad 2) h = 1,5 \frac{v_1^2}{g}.$$

2 Молекулярка

Идеальный двухатомный газ совершает циклический процесс, состоящий из четырёх последовательных участков: 1–2, 2–3, 3–4 и 4–1. Пусть p , V и n — давление, объём и концентрация газа, а p_0 , V_0 и n_0 — некоторые постоянные величины, причём $n_0 V_0 = N_0$, где N_0 — неизменное число молекул газа.

Если изобразить этот цикл на диаграмме состояний в координатах p/p_0 (ордината) и V/V_0 (абсцисса), то участки 1–2 и 3–4 представляют собой отрезки, лежащие на прямых, проходящих через начало координат. Точка 2 имеет наибольшую ординату в цикле, а участок 4–1 содержит точку с координатами (1,1). Углы наклона участков 1–2 и 3–4 к оси абсцисс отличаются на α . Масштаб осей на графике — одинаковый.

Если изобразить этот же цикл на диаграмме состояний в координатах p/p_0 (ордината) и n/n_0 (абсцисса), то теперь уже участки 2–3 и 4–1 представляют собой отрезки, лежащие на прямых, проходящих через начало координат. Масштаб осей на этом графике — также одинаковый.

Известно, что КПД цикла идеальной тепловой машины, построенного между максимальной и минимальной температурами, достигаемыми в ходе данного цикла, равно $\eta_K = 0,5$.

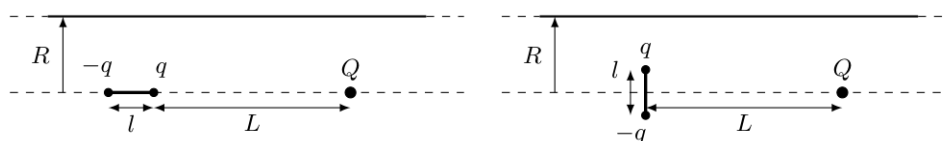
1. Найдите углы наклона прямых, содержащих отрезки 2–3 и 4–1 на диаграмме состояний в координатах $p/p_0 - n/n_0$.

- Постройте (качественно) рассматриваемый цикл на диаграмме состояний в координатах n/n_0 (ордината) и T/T_0 (абсцисса), где T — абсолютная температура, а $p_0 = n_0 k T_0$. Отметьте на полученном графике известные точки/точку и значения.
- Какие значения может принимать КПД данного цикла?
- Найдите диапазон возможных КПД для значения угла $\alpha = \pi/3$.
- Найдите диапазон возможных КПД для значения угла $\alpha = \pi/6$.

Ответ

1) $\beta_{4-1} = 45^\circ, \beta_{2-3} = \arctan 2 \approx 63,4^\circ$; 2) см. график в решении; 3) $\eta = \frac{1}{2 \left(1 + \frac{3}{\ln(\tan(\delta+\alpha)/\tan \delta)} \right)}$, где δ — угол наклона 3 — 4; $\eta \geq \frac{1}{2 \left(1 + \frac{3}{\ln \frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha}} \right)}$, сверху: при $\alpha \geq \pi/4$ $\eta < 1/2$, при $\alpha < \pi/4$ $\eta \leq \frac{1}{2 \left(1 + \frac{3}{\ln \tan(\pi/4+\alpha)} \right)}$; 4) $0,234 \leq \eta < 0,5$; 5) $0,134 \leq \eta \leq 0,153$.

3 Электростатический этюд



На оси бесконечной цилиндрической полости радиусом R с проводящими стенками находится электрический диполь с зарядами q и $-q$ и плечом l . На расстоянии L от него также на оси расположен электрический заряд Q . При этом $l \ll R, L$. На заряд Q действует сила F_Q . Электрический диполь в этой системе разворачивают на 90° , так что ось полости становится средним перпендикуляром к плечу диполя, а расстояние до заряда не меняется. В этом случае на диполь действует сила F_D .

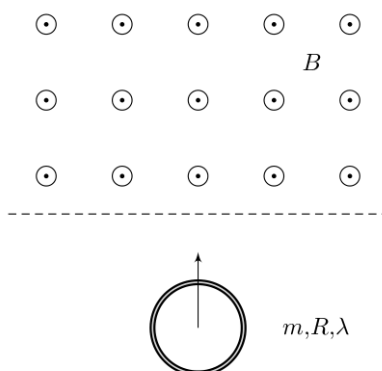
- Найдите отношение $\frac{F_Q}{F_D}$.

Ответ

$$\frac{F_Q}{F_D} = 2.$$

4 Кольцо на границе

В полупространстве создано вертикальное однородное магнитное поле с индукцией B . На гладкой горизонтальной плоскости, касаясь границы области, с магнитным полем, лежит жёсткое непроводящее тонкое кольцо массой m и радиусом R . Кольцо равномерно заряжено с линейной плотностью заряда λ . Кольцу сообщают некоторую начальную скорость, вектор которой горизонтален и перпендикулярен границе области с магнитным полем, при этом до пересечения области с магнитным полем кольцо движется поступательно.



1. Пусть начальная скорость кольца такова, что оно полностью оказалось в магнитном поле. Определите угловую скорость вращения кольца сразу после этого.
2. Определите минимальное значение начальной скорости $v_{\min}$, при которой кольцо целиком окажется в области магнитного поля.
3. Сообщим кольцу скорость $v_0 > v_{\min}$. Определите угол θ , который будет составлять вектор скорости центра кольца с границей области магнитного поля сразу после того, как кольцо полностью пересечёт границу.
4. Определите максимальное расстояние $y_{\max}$ от границы, на которое удалится центр кольца.

Примечание. При решении задачи вам может потребоваться вычислить следующий интеграл:

$$\int \arccos z \, dz = z \arccos z - \sqrt{1 - z^2} + \text{const.}$$

Ответ

$$1) \omega = \frac{\pi \lambda B R}{m}; \quad 2) v_{\min} = \frac{\sqrt{5} \pi \lambda B R^2}{m}; \quad 3) \theta = \arctan \sqrt{\left(\frac{m v_0}{2 \pi \lambda B R^2} \right)^2 - \frac{5}{4}}; \quad 4) y_{\max} = \sqrt{\left(\frac{m v_0}{2 \pi \lambda B R} \right)^2 - \frac{R^2}{4}}.$$

5 RLC-метр

RLC -метр это прибор, позволяющий непосредственно измерять сопротивления, индуктивности и емкости. В него встроены генератор синусоидального напряжения, а также вольтметры, позволяющие измерять напряжения на выводах прибора и на резисторе, подключенном к одному из выводов. Таким образом, прибор определяет соотношение амплитуд протекающего через него тока и напряжения на выходах. По этим измеренным значениям и известной частоте рассчитывается значение измеряемой величины (индуктивности, емкости или сопротивления в зависимости от режима).

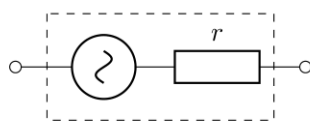


Схема RLC -метра

Экспериментатор Глюк взял катушку с индуктивностью L и конденсатор с емкостью C . В первом эксперименте он соединил их последовательно, подключил к RLC -метру и снял показания в двух режимах работы. В режиме измерения индуктивности показания были равны

$L_1 = 6,20$ мГн, а в режиме измерения емкости — $C_1 = 2,84$ мкФ. Во втором эксперименте те же самые элементы были соединены параллельно и подключены к тому же прибору. В режиме измерения индуктивности прибор показал $L_2 = 21,3$ мГн. Частота при всех этих измерениях поддерживалась одинаковой.

1. Какое значение C_2 покажет RLC -метр в режиме измерения емкости во втором эксперименте? Получите формулу и численное значение.
2. Чему равны индуктивность L и емкость C используемых Глюком катушки и конденсатора? Получите формулы и численные значения.
3. Пусть теперь измерения производятся для неидеальной катушки, индуктивность которой $L = 10,0$ мГн, а сопротивление $R = 5,0$ Ом. При каких значениях частоты f , на которой производятся измерения, связанная с сопротивлением погрешность определения индуктивности меньше 0,1 %? Считайте, что реальную катушку можно представить как последовательно соединенные идеальную катушку и резистор.
4. К катушке из предыдущего пункта Глюк последовательно присоединил конденсатор с емкостью $C = 1,00$ мкФ. Экспериментатор провел измерения индуктивности полученной цепи RLC -метром в максимально широком диапазоне частот. Постройте качественный график зависимости измеренных значений индуктивности от частоты. Укажите характерные точки и асимптотики зависимости индуктивности от частоты в пределе малых и больших частот.

Ответ

1) $C_2 = C_1 L_1 / L_2 \approx 0,83$ мкФ; 2) $L = \frac{\sqrt{L_1^2 + 4L_1 L_2} \pm L_1}{2}$, $C = \frac{C_1}{2L_2} \left(\sqrt{L_1^2 + 4L_1 L_2} \pm L_1 \right)$: $L = 15,0$ мГн, $C = 2,00$ мкФ или $L = 8,80$ мГн, $C = 1,17$ мкФ; 3) $f > \frac{R}{2\pi L \sqrt{2\delta}} = 1780$ Гц; 4) при малых частотах $L_{\text{exp}} \approx 1/((2\pi f)^2 C)$, при больших $L_{\text{exp}} \rightarrow L$, минимум $L_0 = R\sqrt{CL - R^2 C^2 / 4} = 0,50$ мГн при $f_0 = 1590$ Гц.