

ВсОШ, 2025/26, заключительный этап, 11 класс, теоретический тур

Условия, ответы и решения

1 Выбоина

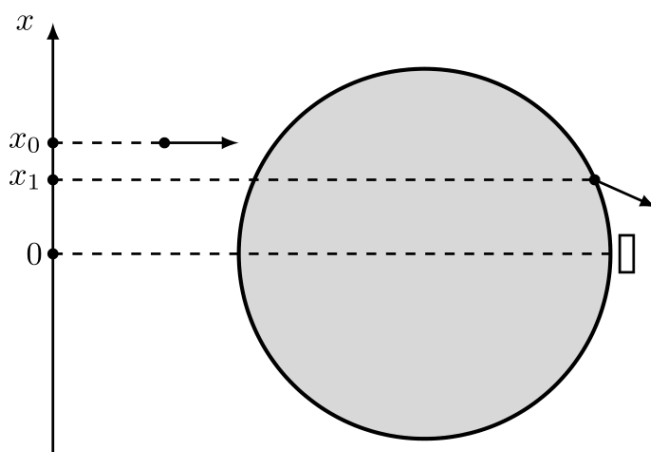
Экспериментатор Глюк решил научиться играть в настольную игру — аэрохоккей. Для этого он купил всё необходимое оборудование и начал тренироваться. Однако, к своему удивлению, обнаружил, что нередко после запуска шайбы траектория отличается от прямолинейной.

Глюк решил проверить, в чём дело, и обнаружил деформацию горизонтальной поверхности игрового поля: на одном из её участков было круглое осесимметричное углубление (выбоина) радиусом R с гладкими краями и горизонтальным дном (см. рис.).

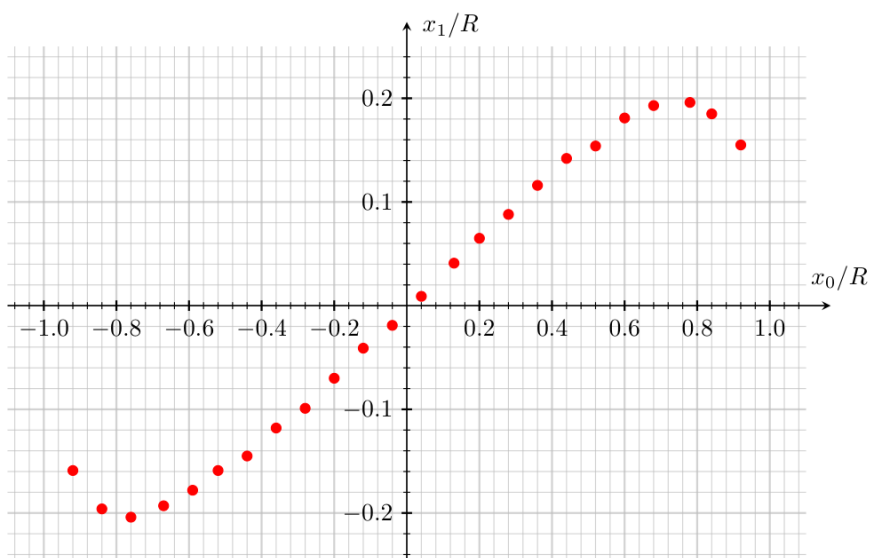


Экспериментатор решил проанализировать, как смещается шайба при прохождении через выбоину. Для этого он запускал шайбу перпендикулярно оси OX (см. рис.) из разных начальных положений с координатой x_0 и измерял координату x_1 выхода шайбы из выбоины.

из разных начальных положений с координатой x_0 и из
ыхода шайбы из выбоины.



В результате он получил вот такие экспериментальные точки:



Начальная скорость всех запущенных шайб v_1 , ускорение свободного падения g . Трение отсутствует.

1. Определите глубину выбоины.
2. Определите, при какой глубине выбоины Глюк всегда попадал бы в ворота, запуская шайбу из точек с начальными координатами $|x_0| \ll R$.

Считайте, что проекции наклонных участков выбоины (её «стенок») на горизонтальную плоскость много меньше радиуса выбоины, а шайба никогда не отрывается от поверхности и является точечной. Место установки ворот изображено на рисунке; считайте, что их размеры малы.

Подсказка

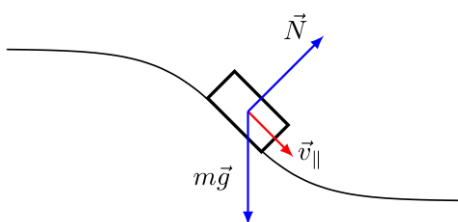
На стенке выбоины сила реакции лежит в вертикальной плоскости, проходящей через центр выбоины. Какая составляющая скорости шайбы при переходе через край не меняется? На что это похоже в оптике?

Ответ

$$1) h \approx 0,61 \frac{v_1^2}{g}; \quad 2) h = 1,5 \frac{v_1^2}{g}.$$

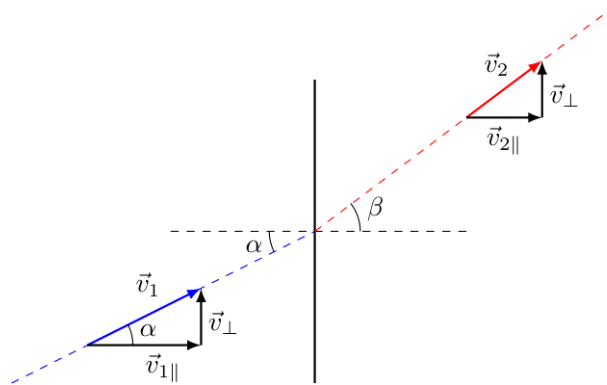
Решение

Рассмотрим скатывание шайбы по границе. В малой окрестности области скатывания участок деформации выбоины можно считать наклонным профилем. Тогда сила реакции на шайбу действует только в вертикальной плоскости, проходящей через центры шайбы и выбоины, а значит, из закона сохранения импульса следует, что перпендикулярная этому сечению компонента скорости шайбы сохраняется.

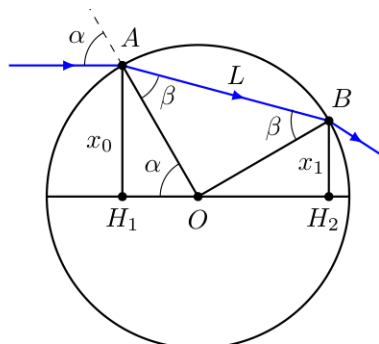


На поверхности вне выбоины скорость шайбы v_1 , и она направлена под углом α к перпендикуляру к границе раздела. На дне выбоины скорость шайбы v_2 , и она направлена под углом β . При переходе шайбы с одной горизонтальной плоскости на другую получается формула, похожая на закон преломления света:

$$v_{\perp} = v_1 \sin \alpha = v_2 \sin \beta.$$



Отсюда $\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n}$, где $n = \frac{v_2}{v_1}$. Проанализируем геометрию траектории. Построим вспомогательные высоты AH_1 и BH_2 , длины которых по условию равны x_0 и x_1 . Так как $AO = OB = R$, то $\angle OAB = \angle OBA = \beta$. Тогда из $\triangle AOB$: $AB = L = 2R \cos \beta$. Из геометрии трапеции AH_1H_2B видно, что $x_0 - x_1 = L \sin(\alpha - \beta)$.



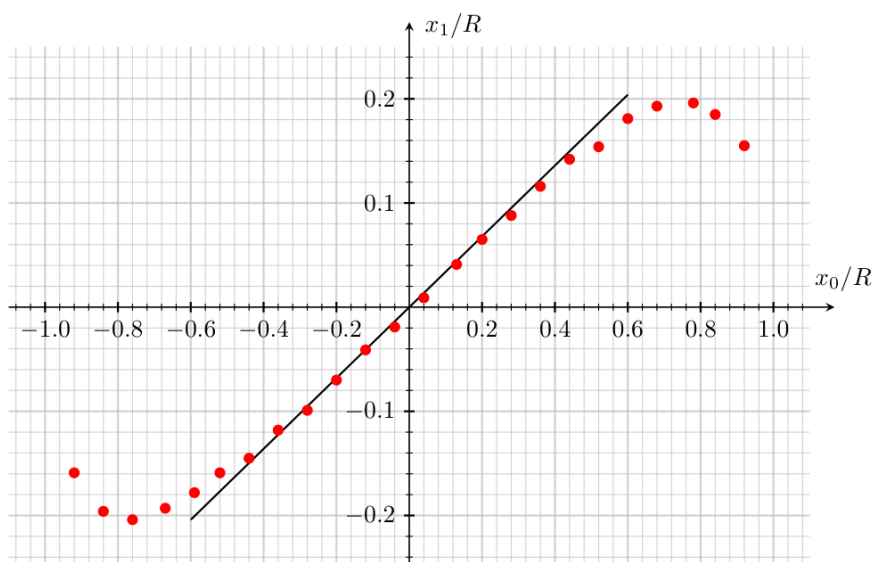
Тогда $x_1 = x_0 - 2R \cos \beta (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta)$, а из $\triangle AOH_1$ имеем $\sin \alpha = x_0/R$. Получаем зависимость

$$\frac{x_1}{R} = \frac{x_0}{R} \left(\frac{2}{n^2} \left(\frac{x_0}{R} \right)^2 + \frac{2}{n} \sqrt{1 - \frac{n^2 + 1}{n^2} \left(\frac{x_0}{R} \right)^2 + \frac{1}{n^2} \left(\frac{x_0}{R} \right)^4} - 1 \right).$$

Она сложна для анализа, поэтому обратим внимание на центральную часть графика: там зависимость близка к линейной и $x_0/R \ll 1$. Для центрального участка

$$\frac{x_1}{R} = \frac{x_0}{R} \left(\frac{2}{n} - 1 \right).$$

Это выражение можно было получить сразу, воспользовавшись малостью углов α и β . При малых x_0 зависимость $x_1(x_0)$ линейная, её угловой коэффициент $k = \frac{2}{n} - 1$. Строим аппроксимирующую прямую в центральной части графика.



Из графика $k \approx 0,34$. Тогда $n = \frac{v_2}{v_1} = \frac{2}{1+k} \approx 1,49$, откуда $v_2 = 1,49 v_1$. Из закона сохранения энергии $\frac{mv_2^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + mgh$ находим глубину выбоины: $h = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} \approx 0,61 \frac{v_1^2}{g}$.

Теперь выясним, при каких условиях x_1 не зависит от x_0 . При $n = 2$ на центральном участке $k = 0$: все траектории фокусируются в одной точке — там, где стоят ворота. Тогда $v_2 = 2v_1$ и $h = 1,5 \frac{v_1^2}{g}$.

2 Молекулярка

Идеальный двухатомный газ совершает циклический процесс, состоящий из четырёх последовательных участков: 1–2, 2–3, 3–4 и 4–1. Пусть p , V и n — давление, объём и концентрация газа, а p_0 , V_0 и n_0 — некоторые постоянные величины, причём $n_0 V_0 = N_0$, где N_0 — неизменное число молекул газа.

Если изобразить этот цикл на диаграмме состояний в координатах p/p_0 (ордината) и V/V_0 (абсцисса), то участки 1–2 и 3–4 представляют собой отрезки, лежащие на прямых, проходящих через начало координат. Точка 2 имеет наибольшую ординату в цикле, а участок 4–1 содержит точку с координатами (1,1). Углы наклона участков 1–2 и 3–4 к оси абсцисс отличаются на α . Масштаб осей на графике — одинаковый.

Если изобразить этот же цикл на диаграмме состояний в координатах p/p_0 (ордината) и n/n_0 (абсцисса), то теперь уже участки 2–3 и 4–1 представляют собой отрезки, лежащие на прямых, проходящих через начало координат. Масштаб осей на этом графике — также одинаковый.

Известно, что КПД цикла идеальной тепловой машины, построенного между максимальной и минимальной температурами, достигаемыми в ходе данного цикла, равно $\eta_K = 0,5$.

1. Найдите углы наклона прямых, содержащих отрезки 2–3 и 4–1 на диаграмме состояний в координатах $p/p_0 - n/n_0$.
2. Постройте (качественно) рассматриваемый цикл на диаграмме состояний в координатах n/n_0 (ордината) и T/T_0 (абсцисса), где T — абсолютная температура, а $p_0 = n_0 k T_0$. Отметьте на полученном графике известные точки/точку и значения.
3. Какие значения может принимать КПД данного цикла?
4. Найдите диапазон возможных КПД для значения угла $\alpha = \pi/3$.

5. Найдите диапазон возможных КПД для значения угла $\alpha = \pi/6$.

Подсказка

Если $p/n = kT$ постоянно, то участок — изотерма; а там, где $p \propto V$, температура монотонна, так что экстремальные температуры достигаются в вершинах. Найдите теплоёмкость газа в процессе $p \propto V$ и выразите КПД через отношение объёмов на изотермах.

Ответ

1) $\beta_{4-1} = 45^\circ$, $\beta_{2-3} = \arctan 2 \approx 63,4^\circ$; 2) см. график в решении; 3) $\eta = \frac{1}{2 \left(1 + \frac{3}{\ln(\tan(\delta+\alpha)/\tan \delta)} \right)}$, где δ — угол наклона 3 — 4; $\eta \geq \frac{1}{2 \left(1 + \frac{3}{\ln \frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha}} \right)}$, сверху: при $\alpha \geq \pi/4$ $\eta < 1/2$, при $\alpha < \pi/4$ $\eta \leq \frac{1}{2 \left(1 + \frac{3}{\ln \tan(\pi/4+\alpha)} \right)}$; 4) $0,234 \leq \eta < 0,5$; 5) $0,134 \leq \eta \leq 0,153$.

Решение

На участках 1 — 2 и 3 — 4 давление и объём прямо пропорциональны друг другу, поэтому вдоль этих участков они одновременно увеличиваются или уменьшаются. Следовательно, температура монотонно изменяется и достигает минимального и максимального значения на концах этих участков. Участки цикла (2 — 3 и 4 — 1) являются изотермами, так как $p = nkT$, поэтому $p/n = \text{const}$ только при $T = \text{const}$. Так как точка 2 имеет наибольшую ординату, то участок 2 — 3 является изотермой с наибольшей температурой, а 4 — 1 — с наименьшей. Обозначим эти температуры $T_{\max}$ и $T_{\min}$ соответственно. По условию мы знаем КПД цикла Карно, построенного между этими температурами:

$$\eta_K = 0,5 = \frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\max}}.$$

Получим соотношение между максимальной и минимальной температурами: $T_{\max} = 2T_{\min}$. Точка (1,1) лежит на участке 4 — 1, поэтому

$$p_0 = \frac{N_0}{V_0} kT_{\min}.$$

Выражая температуру, получаем:

$$T_{\min} = \frac{p_0 V_0}{N_0 k} = \frac{p_0}{n_0 k}; \quad T_{\max} = \frac{2p_0}{n_0 k}.$$

Найдём коэффициент наклона графика зависимости p/p_0 от n/n_0 для изотермы с температурой T :

$$p = nkT, \quad \frac{p}{p_0} = \frac{n_0 kT}{p_0} \cdot \frac{n}{n_0}.$$

Коэффициент наклона является тангенсом соответствующего угла:

$$\tan \beta = \frac{n_0 kT}{p_0}.$$

Подставим найденные ранее температуры и получим ответ. Для 4 — 1: $\tan \beta_{4-1} = 1$, или $\beta_{4-1} = 45^\circ$. Для 2 — 3: $\tan \beta_{2-3} = 2$, или $\beta_{2-3} = \arctan 2 = 63,4^\circ$.

Заметим, что на 4 — 1 из найденного ранее значения температуры получаем $T/T_0 = 1$, аналогично на 2 — 3 имеем $T/T_0 = 2$. Соответственно точка (1,1) принадлежит участку 4 — 1 и в такой

системе координат. Теперь проанализируем вид участков 1 – 2 и 3 – 4. На них давление и объём пропорциональны:

$$\frac{p}{p_0} \propto \frac{V}{V_0} = \frac{n_0}{n},$$

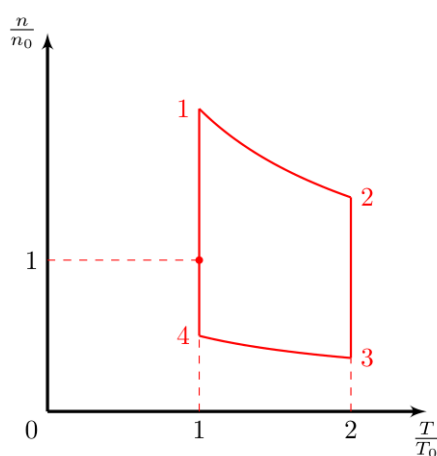
так как $nV = n_0V_0 = N_0$. Тогда

$$n = \frac{p}{kT} \propto \frac{V}{T} \propto \frac{1}{nT}, \quad n^2 \propto \frac{1}{T}.$$

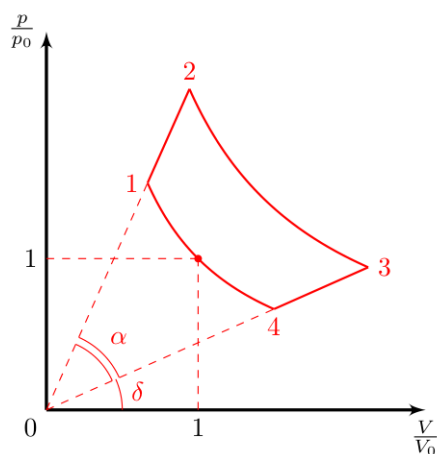
Таким образом, на этих участках имеем

$$\frac{n}{n_0} \propto \sqrt{\frac{T_0}{T}}.$$

Построим качественно график.



Для удобства нарисует наш цикл в координатах $p/p_0 - V/V_0$.



Заметим, что 1 – 2 и 3 – 4 удовлетворяют уравнению $pV^{-1} = \text{const}$, то есть это политропы. Найдём теплоёмкость в таком процессе.

$$\delta Q = dU + \delta A = \nu C_V dT + p dV,$$

$$p \propto V \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dV}{V},$$

$$pV = \nu RT \Rightarrow \frac{dT}{T} = \frac{dp}{p} + \frac{dV}{V} = 2 \frac{dV}{V} \Rightarrow \frac{dV}{V} = \frac{dT}{2T},$$

$$p dV = \frac{pV dT}{2T} = \frac{\nu RT dT}{2T} = \frac{\nu R}{2} dT,$$

$$\delta Q = \nu C_V dT + \frac{\nu R}{2} dT = \nu \left(C_V + \frac{R}{2} \right) dT.$$

Учитывая, что газ двухатомный, получаем, что в этих процессах его теплоёмкость $C = 3\nu R$. Таким образом, можем найти теплоту в процессах 1 – 2 и 3 – 4:

$$Q_{1-2} = -Q_{3-4} = C(2T_0 - T_0) = 3\nu RT_0.$$

Обозначим угол между 3 – 4 и осью абсцисс δ . Найдём значения объёма газа в вершинах цикла. Точка 4:

$$\frac{p_4}{p_0} \cdot \frac{V_4}{V_0} = \left(\frac{V_4}{V_0} \right)^2 \tan \delta = \frac{T_4}{T_0} = 1, \quad \frac{V_4}{V_0} = \sqrt{\frac{1}{\tan \delta}}.$$

Аналогично получим остальные значения:

$$\frac{V_3}{V_0} = \sqrt{\frac{2}{\tan \delta}}, \quad \frac{V_1}{V_0} = \sqrt{\frac{1}{\tan(\delta + \alpha)}}, \quad \frac{V_2}{V_0} = \sqrt{\frac{2}{\tan(\delta + \alpha)}}.$$

Найдём теплоты на участках 4 – 1 и 2 – 3. Так как это изотермы, то они равны соответствующим работам:

$$Q_{2-3} = \int_{V_2}^{V_3} p dV = 2\nu RT_0 \int_{V_2}^{V_3} \frac{dV}{V} = 2\nu RT_0 \ln \frac{V_3}{V_2},$$

$$Q_{2-3} = 2\nu RT_0 \ln \left(\sqrt{\frac{\tan(\delta + \alpha)}{\tan \delta}} \right) = \nu RT_0 \ln \left(\frac{\tan(\delta + \alpha)}{\tan \delta} \right).$$

Аналогично для участка 4 – 1:

$$Q_{4-1} = -\frac{\nu RT_0}{2} \ln \left(\frac{\tan(\delta + \alpha)}{\tan \delta} \right).$$

Заметим, что работа в цикле $A = Q_{1-2} + Q_{2-3} + Q_{3-4} + Q_{4-1}$. При этом тепло подводится только на участках 1 – 2 и 2 – 3, поэтому $Q_+ = Q_{1-2} + Q_{2-3}$. Таким образом, КПД цикла:

$$\eta = \frac{\frac{\nu RT_0}{2} \ln \left(\frac{\tan(\delta + \alpha)}{\tan \delta} \right)}{\nu RT_0 \ln \left(\frac{\tan(\delta + \alpha)}{\tan \delta} \right) + 3\nu RT_0} = \frac{1}{2 \left(1 + \frac{3}{\ln \left(\frac{\tan(\delta + \alpha)}{\tan \delta} \right)} \right)}.$$

Найдём, как $\frac{\tan(\delta + \alpha)}{\tan \delta}$ зависит от δ .

$$\frac{d}{d\delta} \left(\frac{\tan(\delta + \alpha)}{\tan \delta} \right) = \frac{\frac{\tan \delta}{\cos^2(\delta + \alpha)} - \frac{\tan(\delta + \alpha)}{\cos^2 \delta}}{\tan^2 \delta} = \frac{\sin \delta \cos \delta - \sin(\delta + \alpha) \cos(\delta + \alpha)}{\sin^2 \delta \cos^2(\delta + \alpha)}.$$

Заметим, что производная обращается в 0 при

$$\sin \delta \cos \delta - \sin(\delta + \alpha) \cos(\delta + \alpha) = 0,$$

$$\sin 2\delta = \sin 2(\delta + \alpha), \quad 2\delta = \pi - 2(\delta + \alpha), \quad \delta = \frac{\pi}{2} - (\delta + \alpha), \quad \delta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}.$$

Заметим, что это соответствует ситуации, когда 1 – 2 и 3 – 4 симметричны относительно прямой $p/p_0 = V/V_0$. Таким образом, исследуемая функция уменьшается от бесконечности при $\delta = 0$ до минимального значения в этот момент, а потом возрастает к бесконечности при $\alpha + \delta =$

$\pi/2$. С точки зрения КПД это означает, что в симметричном случае $\delta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$ он минимален, а максимален или при максимальном значении, или при минимальном значении δ . Найдём ограничения на δ . Из физических соображений понятно, что $\delta > 0$ и $\alpha + \delta < \pi/2$. Также из условия следует, что точка (1,1) лежит между прямыми, содержащими 1 – 2 и 3 – 4, поэтому $\alpha + \delta > \pi/4$ и $\delta < \pi/4$. Суммарно получаем:

$$\max\left(0, \frac{\pi}{4} - \alpha\right) \leq \delta \leq \min\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

Заметим, что в любом случае симметричный случай реализуется, поэтому минимум КПД при $\delta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$:

$$\eta \geq \frac{1}{2 \left(1 + \frac{3}{\ln\left(\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}\right)}\right)}.$$

Максимум КПД зависит от граничных значений δ . Если $\alpha \geq \pi/4$, то отношение тангенсов может быть сколь угодно большим и соответственно ограничение на КПД: $\eta < 1/2$.

В ином случае граничные значения δ , равные $\pi/4 - \alpha$ и $\pi/4$, дают одинаковый КПД, так как $\tan(\alpha + \pi/4) = 1/\tan(\pi/4 - \alpha)$, и ограничение на КПД:

$$\eta \leq \frac{1}{2 \left(1 + \frac{3}{\ln\left(\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}\right)}\right)}.$$

При $\alpha \geq \pi/4$:

$$\frac{1}{2 \left(1 + \frac{3}{\ln\left(\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}\right)}\right)} \leq \eta < \frac{1}{2}.$$

При $\alpha < \pi/4$:

$$\frac{1}{2 \left(1 + \frac{3}{\ln\left(\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}\right)}\right)} \leq \eta \leq \frac{1}{2 \left(1 + \frac{3}{\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\right)}\right)}.$$

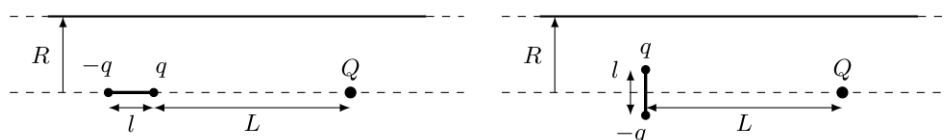
В пункте 4 $\alpha > \pi/4$. Подставим значение угла в соответствующие формулы:

$$0,234 \leq \eta < 0,5.$$

В пункте 5 $\alpha < \pi/4$. Подставим значение угла в соответствующие формулы:

$$0,134 \leq \eta \leq 0,153.$$

3 Электростатический этюд



На оси бесконечной цилиндрической полости радиусом R с проводящими стенками находится электрический диполь с зарядами q и $-q$ и плечом l . На расстоянии L от него также на оси расположен электрический заряд Q . При этом $l \ll R, L$. На заряд Q действует сила F_Q . Электрический диполь в этой системе разворачивают на 90° , так что ось полости становится средним перпендикуляром к плечу диполя, а расстояние до заряда не меняется. В этом случае на диполь действует сила F_D .

1. Найдите отношение $\frac{F_Q}{F_D}$.

Подсказка

Поле индуцированных зарядов на оси считать не нужно: оно одинаково входит в обе силы. Свяжите радиальную составляющую поля вблизи оси с производной осевой составляющей через теорему Гаусса для тонкого цилиндра.

Ответ

$$\frac{F_Q}{F_D} = 2.$$

Решение

Рассмотрим один заряд q , расположенный на оси симметрии цилиндра. Поскольку поверхность цилиндра проводящая, на ней возникнут индуцированные заряды, величина которых пропорциональна q . Их электрическое поле на оси цилиндра на расстоянии z до заряда можно записать в виде

$$E_z^{(\text{ind})}(z) = qf^{(\text{ind})}(z),$$

где $f^{(\text{ind})}(z)$ — некоторая неизвестная функция, зависящая от распределения индуцированных зарядов.

Вклад в осевую напряжённость вносят не только индуцированные заряды на поверхности проводника, но и заряды, находящиеся на оси. Напряжённость от такого заряда модулем $\tilde{q}$ мы обозначим за $\tilde{q}f^{(\text{p})}$ (здесь «р» от английского point). Разумеется, её можно вычислить напрямую:

$$qf^{(\text{p})}(z) = k\frac{q}{z^2}.$$

Тогда, согласно принципу суперпозиции, поле в точке, где находится заряд Q :

$$E_1 = q(f(L) - f(L+l)),$$

где

$$f(z) = f^{(\text{ind})}(z) + f^{(\text{p})}(z).$$

Тогда с учётом условия $l \ll L$ получим для силы, действующей на заряд,

$$F_Q = QE_1 = -qQl f'(L),$$

или

$$F_Q = -qQl(f^{(\text{ind})})'(L) + 2qQl\frac{k}{L^3}.$$

Теперь рассмотрим случай повернутого диполя. Заряд Q и индуцированные им заряды создают на оси цилиндра поле

$$Qf^{(\text{p})}(z) + Qf^{(\text{ind})}(z) = Qf(z).$$

При смещении от оси на малое расстояние $r \ll R$ у электрического поля появляется радиальная составляющая E_r . Чтобы определить её, рассмотрим цилиндр высоты dz с радиусом основания r , ось симметрии которого совпадает с осью внешнего цилиндра. Поскольку внутри этого цилиндра нет зарядов, согласно теореме Гаусса, поток электрического поля через его поверхность равен нулю:

$$\pi r^2 Q(f(z+dz) - f(z)) + 2\pi r dz E_r = 0,$$

откуда

$$E_r(z) = -\frac{1}{2}Qr f'(z),$$

или же

$$E_r(z) = -\frac{1}{2}Qr(f^{(\text{ind})})'(z) + \frac{1}{4}Qr\frac{k}{z^3}.$$

Из симметрии задачи относительно оси цилиндра следует, что от системы, состоящей из заряда Q и индуцированных им зарядов, в точках, где расположены заряды диполя, составляющие электрического поля вдоль оси z равны, а значит, проекция суммарной силы на ось z равна 0.

Более того, из-за зеркальной симметрии системы индуцированных диполем зарядов осевая проекция силы на диполь от них равна нулю. Силы же, создаваемые радиальными составляющими поля от индуцированных диполем зарядов, уничтожают друг друга.

Суммарная сила, действующая на диполь,

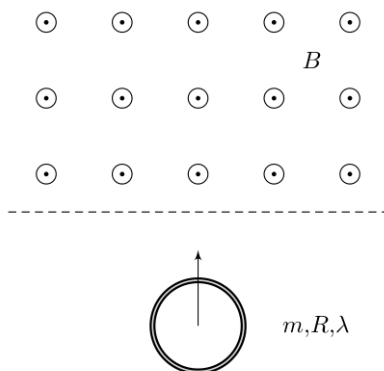
$$F_D = 2qE_r\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{1}{2}qQlf'(L).$$

Отсюда искомое отношение

$$\frac{F_Q}{F_D} = 2.$$

4 Кольцо на границе

В полупространстве создано вертикальное однородное магнитное поле с индукцией B . На гладкой горизонтальной плоскости, касаясь границы области, с магнитным полем, лежит жёсткое непроводящее тонкое кольцо массой m и радиусом R . Кольцо равномерно заряжено с линейной плотностью заряда λ . Кольцу сообщают некоторую начальную скорость, вектор которой горизонтален и перпендикулярен границе области с магнитным полем, при этом до пересечения области с магнитным полем кольцо движется поступательно.



1. Пусть начальная скорость кольца такова, что оно полностью оказалось в магнитном поле. Определите угловую скорость вращения кольца сразу после этого.
2. Определите минимальное значение начальной скорости $v_{\min}$, при которой кольцо целиком окажется в области магнитного поля.
3. Сообщим кольцу скорость $v_0 > v_{\min}$. Определите угол θ , который будет составлять вектор скорости центра кольца с границей области магнитного поля сразу после того, как кольцо полностью пересечёт границу.
4. Определите максимальное расстояние $y_{\max}$ от границы, на которое удалится центр кольца.

Примечание. При решении задачи вам может потребоваться вычислить следующий интеграл:

$$\int \arccos z \, dz = z \arccos z - \sqrt{1 - z^2} + \text{const.}$$

Подсказка

Тангенциальная сила Лоренца на участке кольца пропорциональна проекции этого участка на границу: просуммируйте её и свяжите приращение угловой скорости с приращением магнитного потока через кольцо. Сила Лоренца работы не совершает.

Ответ

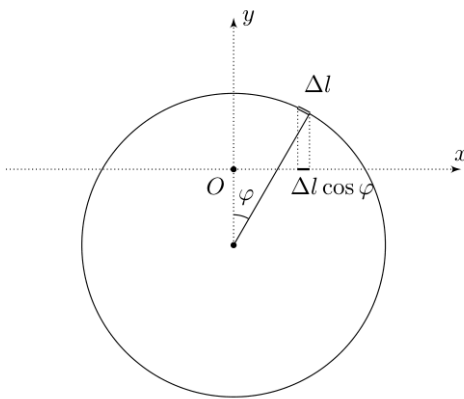
$$1) \omega = \frac{\pi \lambda B R}{m}; \quad 2) v_{\min} = \frac{\sqrt{5} \pi \lambda B R^2}{m}; \quad 3) \theta = \arctan \sqrt{\left(\frac{mv_0}{2\pi \lambda B R^2}\right)^2 - \frac{5}{4}}; \quad 4) y_{\max} = \sqrt{\left(\frac{mv_0}{2\pi \lambda B R}\right)^2 - \frac{R^2}{4}}.$$

Решение

На участки кольца, находящиеся в магнитном поле, действует сила Лоренца, перпендикулярная вектору $\vec{B}$ и вектору скорости участка кольца. Можно рассматривать движение кольца как наложение поступательного движения в направлении вдоль границы со скоростью v_x , поступательного движения перпендикулярно границе со скоростью v_y и вращения с угловой скоростью ω .

Из-за поступательного движения в направлении y возникает момент силы Лоренца, раскручивающий кольцо. Этот момент сил исчезает только после того, как кольцо полностью окажется в области поля. Сумма сил Лоренца, действующих на участки в области поля, связанная с движением вдоль y , направлена вдоль границы и изменяет значение v_x .

Силы Лоренца, связанные с поступательным движением вдоль оси x , изменяют скорость v_y , но не создают момента сил, раскручивающих кольцо. Силы Лоренца, возникающие из-за вращательного движения кольца, как легко убедиться, действуют только вдоль y и не влияют на движение вдоль x .



Рассмотрим тангенциальную составляющую силы Лоренца, действующую на участок кольца длины Δl , связанную с v_y . Она равна $\lambda \Delta l B v_y \cos \varphi$, где φ — угол между этим участком и осью x . Величина $\Delta l \cos \varphi$ представляет собой проекцию этого участка на x , а сумма тангенциальных составляющих для всех участков, находящихся в области магнитного поля, будет равна $\lambda l_x B v_y$, где l_x — длина хорды, стягивающей концы участка кольца, находящегося в области поля. Тогда

$$mR \frac{d\omega}{dt} = \lambda B v_y l_x.$$

После домножения обеих частей уравнения на dt , с учётом того, что $v_y dt = dy$, а $l_x dy = dS$, где dS — дополнительная площадь кольца, которая оказывается в области поля за время dt , получаем

$$mR d\omega = \lambda \cdot d\Phi,$$

где $d\Phi$ — прирост потока магнитного поля через плоскость кольца.

Если кольцо полностью окажется в области магнитного поля, его угловая скорость вращения будет равна

$$\omega = \frac{\pi \lambda B R}{m}.$$

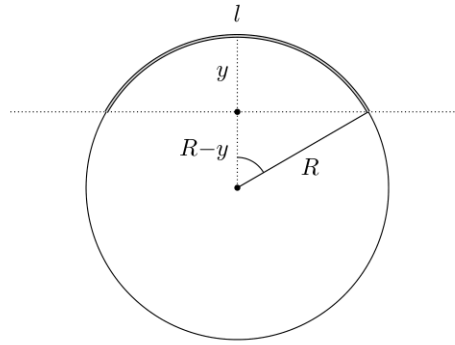
Итак, ответ на первый вопрос задачи: $\omega = \frac{\pi \lambda B R}{m}$.

Как отмечалось выше, вращение не влияет на проекцию скорости v_x , её изменение целиком определяется y -проекцией скорости центра и зарядом той части кольца (дуги длины l), которая находится в поле.

$$m \frac{dv_x}{dt} = \lambda l B v_y.$$

Пусть y — координата точки кольца, наиболее удалённой от границы. Другими словами, это расстояние, на которое сместилось кольцо в направлении y от начала движения. Тогда $l = 2R \arccos\left(\frac{R-y}{R}\right)$. Далее

$$m \frac{dv_x}{dt} = 2\lambda B R v_y \arccos\left(\frac{R-y}{R}\right).$$



Домножив на dt , переходим к интегралу

$$v_x = \frac{2\lambda B R}{m} \int_0^{2R} \arccos\left(\frac{R-y}{R}\right) dy = \frac{2\pi \lambda B R^2}{m}.$$

Теперь воспользуемся законом сохранения энергии, учитывая тот факт, что сила Лоренца работы не совершает и кинетическая энергия кольца в любой момент времени равна начальной.

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_x^2}{2} + \frac{mv_y^2}{2} + \frac{mR^2\omega^2}{2}.$$

Для ответа на второй вопрос задачи положим в этом выражении $v_y = 0$ и воспользуемся результатом ответа на первый пункт для угловой скорости. Тогда

$$v_{\min}^2 = v_x^2 + R^2\omega^2 = 5 \left(\frac{\pi \lambda B R^2}{m} \right)^2, \quad v_{\min} = \frac{\sqrt{5} \pi \lambda B R^2}{m}.$$

Поскольку v_x уже найдено, то для ответа на третий вопрос достаточно определить проекцию v_y в момент, когда кольцо целиком окажется в поле.

Из закона сохранения энергии находим: $v_y = \sqrt{v_0^2 - v_x^2 - \omega^2 R^2} = \sqrt{v_0^2 - v_{\min}^2}$. Для тангенса искомого угла: $\tan \theta = v_y / v_x$. Следовательно,

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{v_0^2 - v_{\min}^2}}{v_x} = \sqrt{\left(\frac{mv_0}{2\pi \lambda B R^2} \right)^2 - \frac{5}{4}}, \quad \theta = \arctan \sqrt{\left(\frac{mv_0}{2\pi \lambda B R^2} \right)^2 - \frac{5}{4}}.$$

С момента, когда кольцо целиком оказывается в области поля, его угловая скорость перестаёт меняться и центр кольца движется как точечный заряд $q = 2\pi R\lambda$ со скоростью, проекции которой равны значениям v_x и v_y в момент пересечения границы области последней точкой кольца. С этого момента

$$m \frac{dv_x}{dt} = 2\pi\lambda RB v_y.$$

После уже традиционного домножения на dt и интегрирования получаем

$$\Delta y = \frac{m\Delta v_x}{2\pi\lambda RB}.$$

Здесь Δy — изменение y -координаты центра от момента полного вхождения в поле до момента максимального удаления центра от границы, Δv_x — соответствующее этим моментам времени изменение проекции скорости.

v_x в момент максимального удаления можно найти из закона сохранения энергии:

$$v_x = \sqrt{v_0^2 - \left(\frac{\pi\lambda BR^2}{m}\right)^2}.$$

Тогда

$$\Delta v_x = \sqrt{v_0^2 - \left(\frac{\pi\lambda BR^2}{m}\right)^2} - \frac{2\pi\lambda BR^2}{m}.$$

Искомое максимальное удаление:

$$y_{\max} = R + \frac{m\Delta v_x}{2\pi\lambda RB} = \sqrt{\left(\frac{mv_0}{2\pi\lambda RB}\right)^2 - \frac{R^2}{4}}.$$

5 RLC-метр

RLC -метр это прибор, позволяющий непосредственно измерять сопротивления, индуктивности и емкости. В него встроены генератор синусоидального напряжения, а также вольтметры, позволяющие измерять напряжения на выводах прибора и на резисторе, подключенном к одному из выводов. Таким образом, прибор определяет соотношение амплитуд протекающего через него тока и напряжения на выходах. По этим измеренным значениям и известной частоте рассчитывается значение измеряемой величины (индуктивности, емкости или сопротивления в зависимости от режима).

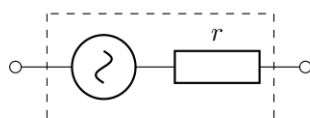


Схема RLC -метра

Экспериментатор Глюк взял катушку с индуктивностью L и конденсатор с емкостью C . В первом эксперименте он соединил их последовательно, подключил к RLC -метру и снял показания в двух режимах работы. В режиме измерения индуктивности показания были равны $L_1 = 6,20$ мГн, а в режиме измерения емкости — $C_1 = 2,84$ мкФ. Во втором эксперименте те же самые элементы были соединены параллельно и подключены к тому же прибору. В режиме измерения индуктивности прибор показал $L_2 = 21,3$ мГн. Частота при всех этих измерениях поддерживалась одинаковой.

1. Какое значение C_2 покажет RLC -метр в режиме измерения емкости во втором эксперименте? Получите формулу и численное значение.
2. Чему равны индуктивность L и емкость C используемых Глюком катушки и конденсатора? Получите формулы и численные значения.
3. Пусть теперь измерения производятся для неидеальной катушки, индуктивность которой $L = 10,0$ мГн, а сопротивление $R = 5,0$ Ом. При каких значениях частоты f , на которой производятся измерения, связанная с сопротивлением погрешность определения индуктивности меньше 0,1 %? Считайте, что реальную катушку можно представить как последовательно соединенные идеальную катушку и резистор.
4. К катушке из предыдущего пункта Глюк последовательно присоединил конденсатор с емкостью $C = 1,00$ мкФ. Экспериментатор провел измерения индуктивности полученной цепи RLC -метром в максимально широком диапазоне частот. Постройте качественный график зависимости измеренных значений индуктивности от частоты. Укажите характерные точки и асимптотики зависимости индуктивности от частоты в пределе малых и больших частот.

Подсказка

Прибор меряет только модуль импеданса $|Z|$ и пересчитывает его в «индуктивность» $|Z|/\omega$ или «емкость» $1/(\omega|Z|)$ — значит, произведение показаний в двух режимах от измеряемой цепи не зависит. Модуль раскрывайте аккуратно: подходят оба знака.

Ответ

1) $C_2 = C_1 L_1 / L_2 \approx 0,83$ мкФ; 2) $L = \frac{\sqrt{L_1^2 + 4L_1 L_2} \pm L_1}{2}$, $C = \frac{C_1}{2L_2} (\sqrt{L_1^2 + 4L_1 L_2} \pm L_1)$: $L = 15,0$ мГн, $C = 2,00$ мкФ или $L = 8,80$ мГн, $C = 1,17$ мкФ; 3) $f > \frac{R}{2\pi L \sqrt{2\delta}} = 1780$ Гц; 4) при малых частотах $L_{\text{exp}} \approx 1/((2\pi f)^2 C)$, при больших $L_{\text{exp}} \rightarrow L$, минимум $L_0 = R\sqrt{CL - R^2 C^2}/4 = 0,50$ мГн при $f_0 = 1590$ Гц.

Решение

Отношение измеренных амплитуд напряжения и тока равно модулю импеданса $|Z|$ устройства, подключенного к выводам RLC -метра. Используя известные формулы для импедансов индуктивности $Z_L = i\omega L$ и емкости $Z_C = -i/\omega C$ (где ω — циклическая частота, на которой проводятся измерения), можно определить измеренные прибором значения индуктивности и емкости. Из формул для последовательного соединения импедансов получим в первом случае

$$\left| \omega L - \frac{1}{\omega C} \right| = \omega L_1 = \frac{1}{\omega C_1}. \quad (1)$$

Во втором случае используем формулу для импеданса параллельного соединения

$$\frac{L/C}{\left| \omega L - \frac{1}{\omega C} \right|} = \omega L_2 = \frac{1}{\omega C_2}. \quad (2)$$

Какое бы устройство не подключалось к выводам, показания прибора в режимах измерения индуктивности и емкости связаны соотношением $|Z| = \omega L_1 = 1/\omega C_1$, то есть $L_1 C_1 = 1/\omega^2$. Таким образом, $L_1 C_1 = L_2 C_2$, откуда

$$C_2 = \frac{L_1 C_1}{L_2}, \quad C_2 = C_1 \frac{L_1}{L_2} \approx 0,83 \text{ мкФ}.$$

Знаменатель в уравнении (2) для параллельного соединения совпадает с импедансом для последовательного соединения, поэтому

$$\frac{L}{C \cdot \omega L_1} = \omega L_2.$$

Подставляя в это соотношение значение $\omega^2 = 1/L_1 C_1$, найдём

$$\frac{L}{C} = \frac{L_2}{C_1}.$$

Выражая отсюда C_1 и подставляя в уравнение (1), получим

$$\left| L - \frac{1}{\omega^2 C} \right| = \left| L - \frac{L_1 L_2}{L} \right| = L_1.$$

Отсюда

$$|L^2 - L_1 L_2| = L_1 L,$$

значит, L удовлетворяет одному из двух квадратных уравнений

$$L^2 - L_1 L_2 = \pm L_1 L,$$

откуда

$$L^2 \mp L_1 L - L_1 L_2 = 0.$$

Корни этих двух уравнений имеют вид

$$L = \frac{\pm L_1 \pm \sqrt{L_1^2 + 4L_1 L_2}}{2},$$

где первый знак определяется знаком $\pm$ в уравнении, а второй — выбранным корнем квадратного уравнения. При этом индуктивность должна быть положительной, поэтому перед квадратным корнем всегда нужно выбирать знак $+$. Итого получаем, что возможны два значения индуктивности

$$L = \frac{\sqrt{L_1^2 + 4L_1 L_2} \pm L_1}{2},$$

отвечающие двум разным способам раскрыть модуль. Отвечающие им значения емкости можно найти как

$$C = L \frac{C_1}{L_2} = \frac{C_1}{2L_2} \left(\sqrt{L_1^2 + 4L_1 L_2} \pm L_1 \right) = \frac{2C_1 L_1}{\sqrt{L_1^2 + 4L_1 L_2} \mp L_1}.$$

$$L = \frac{\sqrt{L_1^2 + 4L_1 L_2} + L_1}{2} = 15,0 \text{ мГн}; \quad C = \frac{C_1}{2L_2} \left(\sqrt{L_1^2 + 4L_1 L_2} + L_1 \right) = 2,00 \text{ мкФ},$$

$$L = \frac{\sqrt{L_1^2 + 4L_1 L_2} - L_1}{2} = 8,80 \text{ мГн}; \quad C = \frac{C_1}{2L_2} \left(\sqrt{L_1^2 + 4L_1 L_2} - L_1 \right) = 1,17 \text{ мкФ}.$$

Комплексный импеданс неидеальной катушки равен

$$Z'_L = R + i\omega L,$$

тогда измеренное значение индуктивности определяется из соотношения

$$\omega L_{\text{exp}} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}, \quad L_{\text{exp}} = \sqrt{L^2 + \frac{R^2}{\omega^2}}.$$

Видим, что это значение всегда больше значения индуктивности катушки, и в пределе больших частот стремится к ней. Тогда частота должна быть больше некоторой критической частоты, которую можно найти из условия, что $L_{\text{exp}} = L(1 + \delta)$, где δ — максимально допустимая погрешность:

$$\sqrt{L^2 + \frac{R^2}{\omega^2}} < L(1 + \delta),$$

откуда с учётом малости δ

$$\frac{R^2}{\omega_c^2} = L^2((1 + \delta)^2 - 1) \approx 2\delta L^2.$$

Получаем критическое значение циклической частоты

$$\omega_c = \frac{R}{L\sqrt{2\delta}},$$

и критическое значение частоты

$$f_c = \frac{R}{2\pi L\sqrt{2\delta}}, \quad f > f_c = \frac{R}{2\pi L\sqrt{2\delta}} = 1780 \text{ Гц.}$$

Импеданс цепи равен

$$Z = R + i\omega L - \frac{i}{\omega C}.$$

Приравнявая его модуль к ωL_1 , найдём измеренную индуктивность L_1 :

$$\omega L_{\text{exp}} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

отсюда

$$L_{\text{exp}} = \sqrt{\frac{R^2}{(2\pi f)^2} + \left(L - \frac{1}{(2\pi f)^2 C}\right)^2}.$$

Проанализируем полученное выражение. При больших частотах слагаемые с частотой в знаменателе стремятся к 0, поэтому измеренное значение индуктивности стремится к постоянной $L_{\text{exp}} \approx L$. При малых частотах наибольшее значение у слагаемого с наибольшей степенью частоты в знаменателе, поэтому

$$L_{\text{exp}} \approx \frac{1}{(2\pi f)^2 C}.$$

Покажем, что у подкоренного выражения есть минимум при промежуточном значении частоты. Для удобства введём вспомогательную переменную $x = 1/(2\pi f)^2$ и рассмотрим функцию

$$f(x) = xR^2 + \left(L - \frac{x}{C}\right)^2.$$

Её производная обращается в 0 при

$$R^2 + \frac{2}{C} \left(\frac{x}{C} - L\right) = 0,$$

откуда

$$x = LC - \frac{R^2 C^2}{2} = LC \left(1 - \frac{R^2 C}{2L}\right).$$

Этому значению x отвечает значение частоты

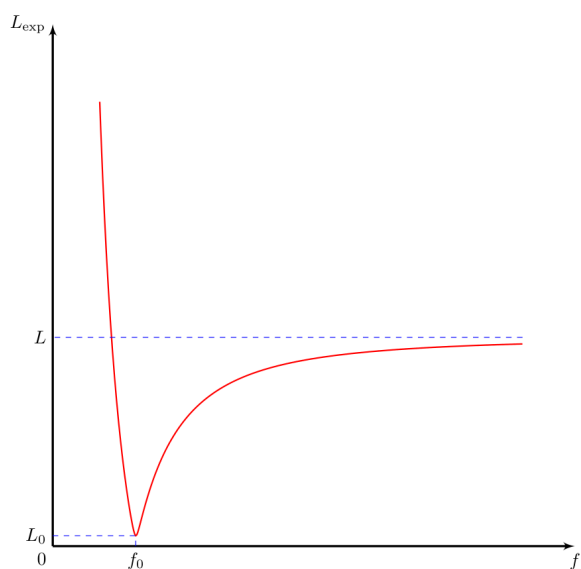
$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}\sqrt{1 - R^2 C/2L}},$$

которое существует при $R^2 C/2L < 1$. Это значение отвечает минимуму рассматриваемой функции, поскольку она представляет собой квадратичную зависимость с положительным коэффициентом перед x^2 . Соответствующее значение индуктивности в минимуме

$$L_0 = R\sqrt{CL - \frac{R^2 C^2}{4}}.$$

Для чисел, приведённых в условии,

$$f_0 = 1590 \text{ Гц}, \quad L_0 = 0,50 \text{ мГн.}$$



Источник: Всероссийская олимпиада школьников по физике, 2025/26, заключительный этап, 11 класс, теоретический тур – условия, решения. Задачи перенабраны на botay.pro, решения – по официальным.