

ВсОШ, 2025/26, заключительный этап, 9 класс, теоретический тур

Всероссийская олимпиада школьников по физике [Условия, ответы и решения](#)

Задача 1 Фотография

На горизонтальной поверхности вплотную друг к другу расположены два небольших шарика 1 и 2. Им одновременно сообщили скорости во взаимно перпендикулярных направлениях, в результате чего шарики начали двигаться в одной вертикальной плоскости, не сталкиваясь. В момент, близкий к падению шарика 1, была сделана фотография, зафиксировавшая положения обоих шариков (см. рисунок). При этом ни один из них ещё не касался горизонтальной поверхности. Соппротивлением воздуха пренебречь, ускорение свободного падения $g = 9,8 \text{ м/с}^2$.



Фотография с положениями шариков приведена в заданном масштабе на отдельном листе. Все необходимые построения выполняйте прямо на ней.

1. Найдите время t полёта шарика 1, если известно, что оно является максимально возможным.
2. Какие скорости v_1 и v_2 сообщили шарикам 1 и 2 соответственно?

Подсказка

В системе отсчёта, свободно падающей с ускорением $\vec{g}$, оба шарика летят равномерно и прямолинейно, а их перемещения $\vec{v}_1 t$ и $\vec{v}_2 t$ перпендикулярны. На какой линии тогда лежит общая точка, из которой они «вылетели»?

Ответ

1) $t \approx 0,71 \text{ с}$; 2) $v_1 \approx 6,0 \text{ м/с}$, $v_2 \approx 10,0 \text{ м/с}$.

Решение

Обозначим через O общее начальное положение шариков, через A и B — положения шариков 1 и 2 в момент времени t , соответствующий съёмке. Пусть $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ — векторы скоростей, сообщённых шарикам 1 и 2 соответственно. Тогда векторы их перемещений к моменту времени t выражаются как:

$$\vec{s}_1 = \vec{v}_1 t + \frac{\vec{g} t^2}{2}, \quad \vec{s}_2 = \vec{v}_2 t + \frac{\vec{g} t^2}{2}.$$

Поскольку шарики начали движение из одной точки, вектор их относительного перемещения равен:

$$\vec{r}_{\text{отн}} = \vec{s}_1 - \vec{s}_2 = (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)t.$$

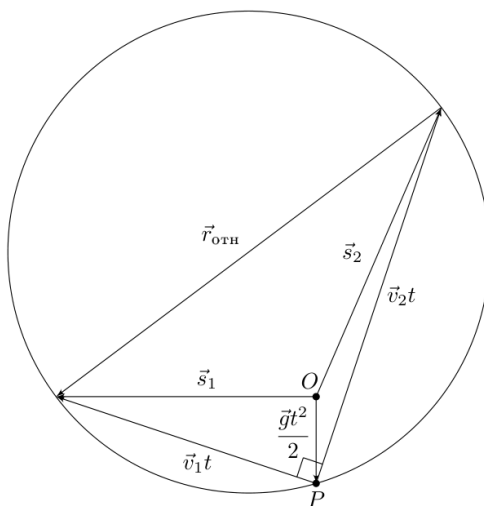


Рис. 1

Отложим от точки O вектор $\vec{gt}^2/2$ и получим точку P . Векторы $\vec{v}_1t = \vec{PA}$ и $\vec{v}_2t = \vec{PB}$ перпендикулярны, поэтому точка P лежит на окружности с диаметром AB (рис. 1). Опустим из центра окружности перпендикуляр к горизонтальной поверхности и получим максимальное значение $OP_{\max}$ (см. рисунок 2):

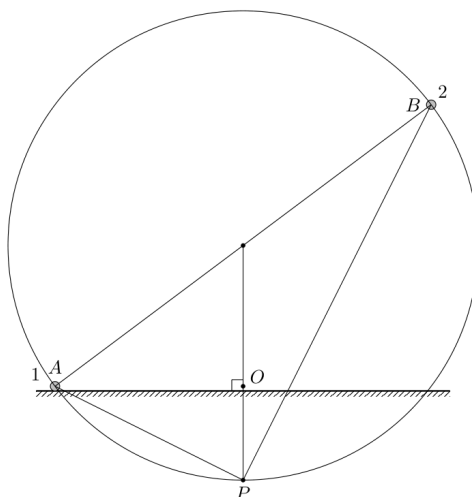


Рис. 2

Из заданного масштаба следует, что:

$$OP_{\max} \approx 2,5 \text{ м.}$$

Тогда время полёта шарика 1:

$$t = \sqrt{\frac{2OP_{\max}}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2,5}{9,8}} \approx 0,71 \text{ с.}$$

Найдём AP и BP :

$$AP \approx 4,3 \text{ м, } BP \approx 7,1 \text{ м.}$$

Учитывая, что $v_1 = AP/t$, а $v_2 = BP/t$, находим:

$$v_1 \approx 6,0 \text{ м/с, } v_2 \approx 10,0 \text{ м/с.}$$

Задача 2 Спича

Проволока закреплена в вертикальной плоскости и состоит из прямого отрезка и полуокружности радиусом R , которые касаются друг друга в верхней точке (см. рисунок 1). На прямом участке расположен груз массой m , на полуокружности — груз массой $2m$. Грузы соединены невесомой нерастяжимой нитью, трение отсутствует. На дополнительном бланке изображены положения грузов при равновесии системы, показано направление ускорения свободного падения и начерчена масштабная сетка.

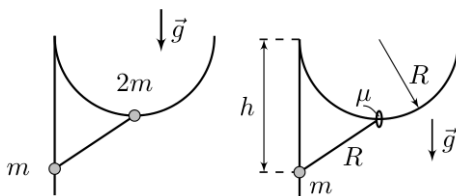


Рис. 1

Рис. 2

1. Восстановите расположение проволоки по изображённой системе грузов и определите, чему равен радиус R полуокружности.
2. Не изменяя форму проволоки, груз массой $2m$ заменили на невесомое колечко, соединённое с телом m нитью длиной R (см. рисунок 2). Коэффициент трения между проволокой и колечком равен μ . При каких расстояниях h между изломом проволоки и грузом m система может находиться в равновесии?

Подсказка

На систему «два груза и нить» действуют только три силы, и их линии действия пересекаются в одной точке; реакция полуокружности направлена к её центру. Во втором пункте полная сила реакции на колечко направлена вдоль нити и может отклоняться от нормали не больше чем на угол трения.

Ответ

- 1) $R \approx 8,1$ см (центр полуокружности — на горизонтали через точку излома, на расстоянии R от прямого участка); 2) $R\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{1 + \mu^2}}} \leq h \leq R\sqrt{3}$.

Решение

Метод 1. Рассмотрим систему, состоящую из двух грузов и нити. На неё действуют три силы: сила тяжести $3m\vec{g}$, реакция опоры $\vec{N}_1$ со стороны вертикального участка и сила реакции $\vec{N}_2$ со стороны полуокружности. Линии действия сил $\vec{N}_1$ и $3m\vec{g}$ пересекаются в точке O . Следовательно, по теореме о трёх непараллельных силах, линия действия силы $\vec{N}_2$ также проходит через точку O (см. рисунок 1).

Сила $\vec{N}_2$ перпендикулярна касательной к окружности, поэтому направлена к её центру. Таким образом, центр полуокружности лежит на прямой, проходящей через точку приложения силы $\vec{N}_2$ и точку O .

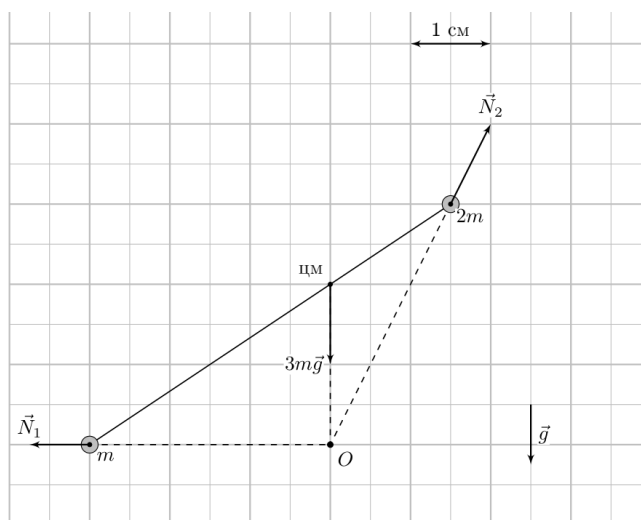


Рис. 1

Проведём через точку, соответствующую положению груза массой $2m$, касательную к окружности (перпендикуляр к $\vec{N}_2$). Обозначим через B точку пересечения этой касательной с вертикальным участком проволоки (см. рисунок 2).

Полученная точка B равноудалена от $2m$ и от точки излома проволоки A . С помощью циркуля или линейки отложим отрезок AB вверх, восстановив точку A . Затем пересечём перпендикуляр к касательной, проведённой через точку $2m$, а также горизонтальную линию, проходящую через точку A (точку соединения участков проволоки), и получим центр полуокружности. Это позволяет восстановить положение всей полуокружности.

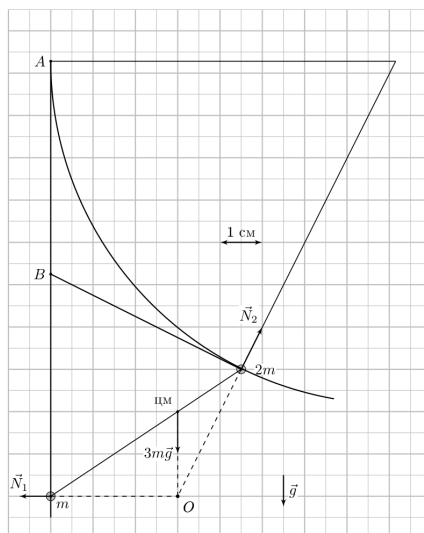


Рис. 2

Метод 2. После теоремы о трёх силах можно не строить центр окружности геометрически, а записать подобие:

$$\frac{R - x}{R + y} = \frac{z}{y}.$$

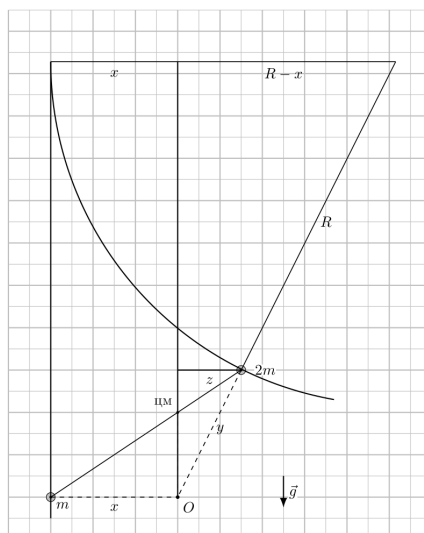


Рис. 3

Численные значения длин отрезков x , y и z находятся из рисунка: $x = 3$ см, $y = 3\sqrt{5}/2$ см, $z = 1,5$ см. Откуда:

$$R = \frac{y(x+z)}{y-z}.$$

Метод 3. Расставим силы и введём систему координат, как показано на рисунке 4. В ней координаты грузов m и $2m$, определяемые по масштабу, соответственно равны $(0; -y_1) = (0; -3 \text{ см})$ и $(x_2; 0) = (4,5 \text{ см}; 0)$. Обозначим через α угол между нитью и вертикалью, а через φ — угол между силой $\vec{N}_2$ и вертикалью.

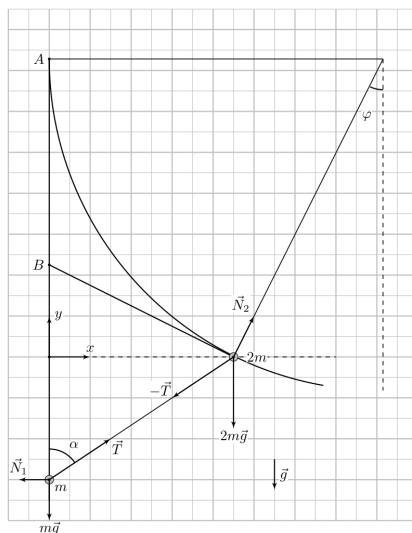


Рис. 4

Запишем условия равновесия для груза массы m :

$$\vec{N}_1 + \vec{T} + m\vec{g} = 0, \quad (1)$$

и для всей системы:

$$\vec{N}_1 + \vec{N}_2 + 3m\vec{g} = 0. \quad (2)$$

Из соответствующих треугольников сил (см. рисунок 5) получаем:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{3}.$$

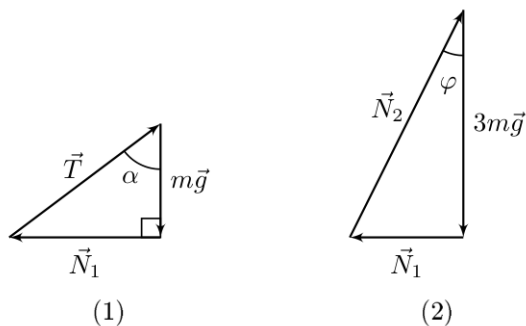


Рис. 5

С другой стороны,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x_2}{y_1} \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \frac{x_2}{3y_1} = \frac{4,5}{9} = 0,5.$$

Следовательно,

$$\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Из геометрии окружности:

$$x_2 = R(1 - \sin \varphi),$$

откуда:

$$R = \frac{4,5}{1 - \frac{1}{\sqrt{5}}} \approx 8,1 \text{ см},$$

а координаты центра окружности:

$$(R; R \cos \varphi) \approx (8,1 \text{ см}; 7,3 \text{ см}).$$

Пункт 2. Сила полной реакции опоры $\vec{Q}$, действующая на кольцо, полностью компенсирует силу натяжения $\vec{T}$. При этом $\vec{Q}$ составляет угол β с силой нормальной реакции опоры $\vec{N}$, направленной в центр окружности (см. рисунок 6). Тогда условие равновесия с учётом трения имеет вид:

$$\beta \leq \beta_{cr}, \quad \beta_{cr} = \operatorname{tg} \mu.$$

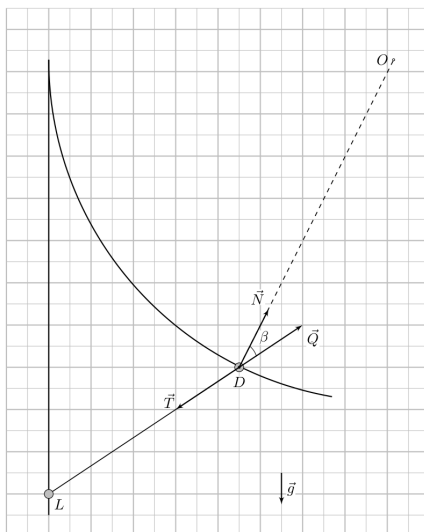


Рис. 6

Обозначим положение груза m точкой L , кольца — D . По теореме косинусов для треугольника $\triangle ODL$:

$$OL^2 = R^2 + R^2 + 2R^2 \cos \beta.$$

С учётом ограничения на угол β получаем:

$$2R^2 + 2R^2 \cos \beta_{cr} \leq OL^2 \leq 4R^2.$$

По теореме Пифагора:

$$OL^2 = R^2 + h^2 \Rightarrow R^2 + 2R^2 \cos \beta_{cr} \leq h^2 \leq 3R^2.$$

Так как

$$\cos \beta_{cr} = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}},$$

получаем:

$$R\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{1 + \mu^2}}} \leq h \leq R\sqrt{3}.$$

Задача 3 Наезд

Из гладкой проволоки, закреплённой в вертикальной плоскости, изготовлена горка высотой H , состоящая из двух четвертей окружности, соединяющих горизонтальные участки (см. рисунок 1). В начальной точке горки покоится маленькая бусинка массой m , надетая на проволоку. К ней приложена постоянная по модулю и направлению сила $\vec{F}$.

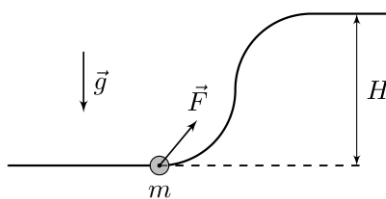


Рис. 1

1. Найдите минимальное значение модуля силы $F_{\min 1}$, при котором бусинка может преодолеть горку, если сила направлена горизонтально.
2. Найдите минимальный модуль силы $F_{\min 2}$, при котором бусинка может преодолеть горку. Под каким углом α_{opt} к горизонтали должна быть направлена сила в этом случае?
3. Пусть теперь модуль силы постоянен, а её направление может изменяться в процессе движения. Бусинка находится на расстоянии s от начала горки (см. рисунок 2). При $F = |\vec{F}| = mg/2$ найдите минимальное значение s , при котором бусинка может преодолеть горку. Опишите как должно меняться направление силы $\vec{F}$, чтобы это стало возможным.

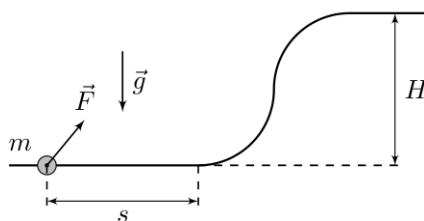


Рис. 2

Подсказка

Сложите силу тяжести и постоянную силу $\vec{F}$ в одно «эффективное» поле тяжести: горку можно преодолеть, если ни одна её точка не оказывается в этом поле выше стартовой. В третьем пункте работу силы F выгоднее всего набирать, направляя её вдоль траектории.

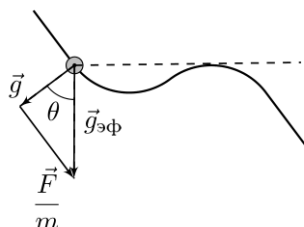
Ответ

1) $F_{\min 1} = \frac{4}{3}mg$; 2) $F_{\min 2} = \frac{4}{5}mg$, $\alpha_{opt} = \arcsin \frac{4}{5} = \arctg \frac{4}{3}$ (сила направлена по касательной к горке); 3) $s_{\min} = \frac{H}{2} \left(2 + \sqrt{3} - \frac{5\pi}{6} \right) \approx 0,56 H$, сила всё время направлена вдоль траектории.

Решение

Пункт 1. Метод 1. Бусинка движется под действием суммы внешних сил $\vec{F} + m\vec{g}$. Рассмотрим движение в поле эффективного ускорения свободного падения:

$$\vec{g}_{eff} = \vec{g} + \frac{\vec{F}}{m}.$$



Для преодоления горки необходимо, чтобы в любой точке траектории потенциальная энергия была меньше, чем в точке старта.

В критическом случае перпендикуляр к эффективному ускорению свободного падения касается второй четверть-окружности. Тогда из геометрии $\theta = 2 \arctg(1/2)$.

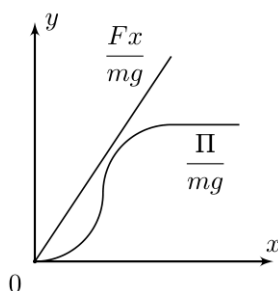
$$F_{\min 1} = mg \operatorname{tg} \theta = \frac{4mg}{3}.$$

Метод 2. Если бусинка преодолела горку, это значит, что в любой момент времени работа внешних сил:

$$A_F \geq \Pi,$$

где Π — потенциальная энергия. Поделим обе части неравенства на mg и подставим $A_F = F \cdot x$:

$$\frac{F \cdot x}{mg} \geq h.$$



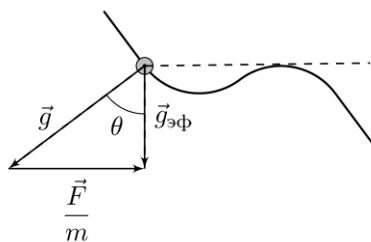
Рассмотрим график зависимости обеих величин от x . В критическом случае графики касаются. Тогда тангенс угла наклона прямой равен:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{4}{3} = \frac{F}{mg}.$$

Получаем:

$$F_{\min 1} = mg \operatorname{tg} \theta = \frac{4mg}{3}.$$

Пункт 2. Метод 1. Минимум силы достигается, когда вектор $\vec{F}/m$ перпендикулярен вектору $\vec{g}_{\text{эф}}$. Направление силы F — по касательной к горке под углом θ к горизонту.



$$F_{\min 2} = mg \sin \theta = \frac{4}{5}mg; \quad \theta = 2 \arctg(1/2) = \arcsin(4/5).$$

Метод 2. Снова запишем неравенство

$$A_F \geq \Pi.$$

Подставим $A_F = F_x \cdot x + F_y \cdot h$:

$$F_x \cdot x + F_y \cdot h \geq mgh; \quad F_x \cdot x \geq h(mg - F_y); \quad \frac{F_x}{mg - F_y} \cdot x \geq h.$$

Аналогично предыдущему пункту получаем, что:

$$\frac{F_x}{mg - F_y} = \operatorname{tg} \theta = \frac{4}{3}; \quad F_x = \frac{4}{3}mg - \frac{4}{3}F_y.$$

С учётом того, что $F^2 = F_x^2 + F_y^2$, получаем:

$$F^2 = \frac{16}{9}F_y^2 - \frac{32}{9}F_ymg + \frac{16}{9}m^2g^2 + F_y^2 = \frac{25}{9}F_y^2 - \frac{32}{9}F_ymg + \frac{16}{9}m^2g^2.$$

Минимум этой квадратичной зависимости достигается при:

$$F_y = \frac{16}{25}mg.$$

Тогда

$$F_{\min 2}^2 = \frac{16}{9}m^2g^2 - \frac{16^2}{25 \cdot 9}m^2g^2 = \frac{16}{25}m^2g^2.$$

Получаем ответ:

$$F_{\min 2} = \frac{4}{5}mg.$$

Угол с горизонтом:

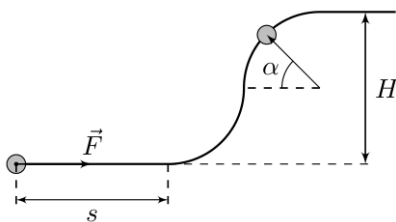
$$\theta = \arctg \frac{F_y}{F_x} = \arctg \frac{4}{3}.$$

Пункт 3. Если бусинка преодолела горку, это значит, что в любой момент времени сумма работ внешних сил:

$$A_F + A_{mg} \geq 0.$$

Для максимизации работы силы F последняя должна быть всегда направлена вдоль траектории. Рассмотрим критический случай, когда бусинка достигает предельной точки, остановившись на второй четверть-окружности. Параметризуем эту точку углом α . В критическом случае эта точка является положением равновесия:

$$F = mg \cos \alpha.$$



Работа сил равна нулю:

$$F \cdot \left(s + \frac{H}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) \right) = mg \frac{H}{2} \cdot (1 + \sin \alpha);$$

$$s = \frac{mg}{F} \frac{H}{2} \cdot (1 + \sin \alpha) - \frac{H}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right); \quad s = \frac{H}{2} \left(\frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\pi}{2} - \alpha \right).$$

С учётом $F = mg \cos \alpha$:

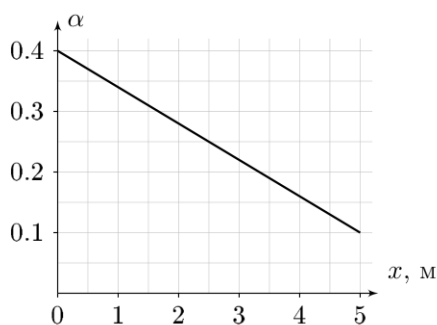
$$s = \frac{H}{2} \left(\frac{1 + \sqrt{1 - F^2/m^2g^2}}{F/mg} - \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{F}{mg} \right).$$

Для $F = mg/2$:

$$s = \frac{H}{2} \left(2 + \sqrt{3} - \frac{5\pi}{6} \right).$$

Задача 4 Теплообменник

Теплообменник состоит из двух коаксиальных труб длиной $L = 5$ м. По внутренней трубе в положительном направлении оси x течёт смесь воды и льда с массовым расходом $\mu_x = 0,70$ кг/с. По внешней трубе встречным потоком течёт горячая вода с $\mu_T = 0,50$ кг/с, температура T_T которой при $x = L$ составляет 60°C . Устройство теплообменника таково, что зависимость массовой доли $\alpha(x)$ льда от координаты x имеет вид, показанный на графике. Площадь поперечного сечения внутренней трубы постоянна и равна $S = 100$ см².



Удельная теплота плавления льда $\lambda = 3,35 \cdot 10^5$ Дж/кг, удельная теплоёмкость воды $c = 4,2 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К), плотности воды и льда равны $\rho_v = 1000$ кг/м³ и $\rho_l = 900$ кг/м³ соответственно. Теплотериями в окружающую среду и теплоёмкостью стенок пренебречь.

1. Найдите температуру горячей воды T_r в сечении с координатой $x = 0$.
2. Постройте график зависимости температуры $T_r(x)$ горячей воды от координаты.
3. Получите зависимость скорости $v(x)$ смеси воды и льда от координаты. Считайте, что скорость течения смеси одинакова по всему поперечному сечению.

Подсказка

Пока в смеси есть лёд, её температура не меняется, и всё тепло горячей воды идёт на плавление: запишите баланс для малого участка трубы. Массовый расход смеси одинаков во всех сечениях, а плотность смеси зависит от доли льда.

Ответ

1) $T_r(0) = 26,5^\circ\text{C}$; 2) прямая $T_r(x) = 26,5^\circ\text{C} + 6,7 \frac{^\circ\text{C}}{\text{м}} \cdot x$; 3) $v(x) = \frac{\mu_x}{S\rho_v\rho_l}(0,6\rho_l + 0,4\rho_v - 0,06x(\rho_v - \rho_l))$ (x в метрах).

Решение

Пока в смеси есть лёд, её температура 0°C . Всё тепло от горячей воды идёт на плавление льда. Далее будем рассматривать изменение всех величин вдоль оси x . Выделим элементарный участок трубы длиной Δx , настолько малый, что можно считать скорость движения смеси постоянной. За время Δt внутри выделенного объёма масса льда изменится на:

$$\Delta m_l = \mu_x \Delta t \Delta \alpha.$$

Изменение внутренней энергии горячей воды:

$$\delta Q_2 = -c\mu_r \Delta t \Delta T_r.$$

Так как теплотериями в окружающую среду и теплоёмкостью стенок можно пренебречь и режим течения является установившимся, то изменение внутренней энергии выделенного элемента равно 0:

$$\Delta U = 0; \quad -\lambda\mu_x \Delta \alpha - c\mu_r \Delta T_r = 0. \quad (1)$$

Из выражения (1) следует, что

$$\frac{\Delta T_r}{\Delta \alpha} = -\frac{\lambda\mu_x}{c\mu_r} = \text{const}. \quad (2)$$

Отсюда следует, что

$$T_r(L) - T_r(0) = \frac{\mu_x \lambda}{\mu_r c} (\alpha(0) - \alpha(L)),$$

где $\alpha(0) = 0,4$, $\alpha(L) = 0,1$. Отсюда

$$T_r(0) = T_r(L) - \frac{\mu_x \lambda}{\mu_r c} (\alpha(0) - \alpha(L)),$$

или:

$$T_r(0) = 26,5^\circ\text{C}.$$

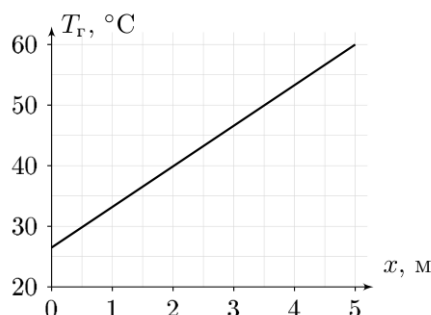
Разделим числитель и знаменатель левой части выражения (2) на Δx и получим:

$$\frac{\Delta T_r}{\Delta x} = -\frac{\lambda\mu_x}{c\mu_r} \frac{\Delta \alpha}{\Delta x} = 6,7^\circ\text{C/м}.$$

Тогда:

$$T(x) = 26,5^\circ\text{C} + 6,7x.$$

График зависимости температуры $T_r(x)$ горячей воды от координаты приведён на рисунке.



Рассмотрим элементарный участок трубы длиной Δx . Объём смеси равен

$$\Delta V = \Delta V_{\text{л}} + \Delta V_{\text{в}},$$

где $\Delta V_{\text{л}}$ и $\Delta V_{\text{в}}$ — объёмы твёрдой и жидкой фаз. Тогда

$$\Delta V = \frac{\alpha(x) \Delta m}{\rho_{\text{л}}} + \frac{(1 - \alpha(x)) \Delta m}{\rho_{\text{в}}}.$$

Плотность смеси:

$$\rho(x) = \frac{\Delta m}{\Delta V} = \left(\frac{\alpha(x)}{\rho_{\text{л}}} + \frac{1 - \alpha(x)}{\rho_{\text{в}}} \right)^{-1}.$$

Массовый расход постоянен:

$$\mu = S \rho(x) v(x),$$

откуда

$$v(x) = \frac{\mu_x}{S \rho(x)} = \frac{\mu_x}{S} \left(\frac{\alpha(x)}{\rho_{\text{л}}} + \frac{1 - \alpha(x)}{\rho_{\text{в}}} \right).$$

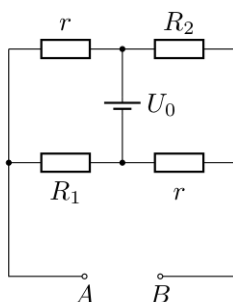
С учётом того, что

$$\alpha(x) = 0,4 - 0,06x,$$

$$v(x) = \frac{\mu_x}{S \rho_{\text{в}} \rho_{\text{л}}} (0,6 \rho_{\text{л}} + 0,4 \rho_{\text{в}} - 0,06x(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}})).$$

Задача 5 Мосты

Электрическая цепь, схема которой изображена на рисунке, состоит из резисторов сопротивлениями R_1 , R_2 , r ($R_1 \neq R_2$) и идеального источника постоянного напряжения U_0 . К выводам A и B подключают второй идеальный источник постоянного напряжения. При одной его полярности на резисторах R_1 и R_2 мощность не выделяется, а при другой полярности на них выделяются одинаковые ненулевые мощности.



Считая заданными сопротивления R_1 , R_2 и напряжение U_0 , определите:

1. напряжение источника, подключаемого к A и B ;
2. сопротивление r ;
3. показание R омметра, подключенного к выводам A и B , если ЭДС и внутреннее сопротивление омметра равны $\mathcal{E}_0$ и r_0 .

Омметр показывает отношение напряжения на его выводах к силе тока, протекающего через него.

Подсказка

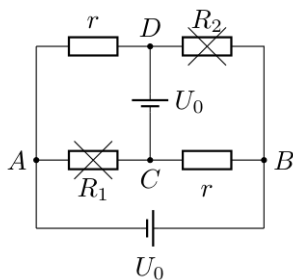
Если ток через R_1 и R_2 не течёт, потенциалы их концов равны — найдите потенциалы всех узлов. Схему с обратной полярностью удобно представить как наложение первой схемы и схемы с одним источником. Для омметра замените цепь между A и B эквивалентным источником.

Ответ

1) U_0 (при нужной полярности $\varphi_B - \varphi_A = U_0$); 2) $r = \sqrt{R_1 R_2}$; 3) $R = \sqrt{R_1 R_2}$ при любой полярности подключения омметра.

Решение

Пункт 1. Воспользуемся методом узловых потенциалов. Рассмотрим случай, когда на резисторах R_1 и R_2 мощность не выделяется. Тогда напряжения на этих резисторах равны нулю.



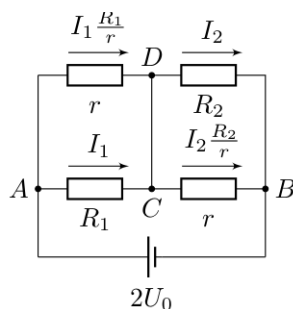
Пусть $\varphi_C = 0$, тогда $\varphi_D = U_0$ (см. рисунок 1). Так как токи через R_1 и R_2 равны нулю, получаем:

$$\varphi_A = \varphi_C = 0 \quad \text{и} \quad \varphi_B = \varphi_D = U_0.$$

Следовательно, напряжение источника, подключенного к точкам A и B , равно:

$$\varphi_B - \varphi_A = U_0.$$

Пункт 2. Метод 1. Воспользуемся методом наложения. Рассмотрим схему с противоположной полярностью источника (подключенного к A и B) как суперпозицию ранее рассмотренной схемы и схемы с источником таким, что $\varphi_B - \varphi_A = -2U_0$. Ранее рассмотренная схема даёт нулевые токи через R_1 и R_2 . Значит, осталось лишь определить силы токов I_1 и I_2 , текущих через резисторы R_1 и R_2 во второй схеме. Расставим токи во второй схеме с учётом закона Ома (см. рисунок 2).



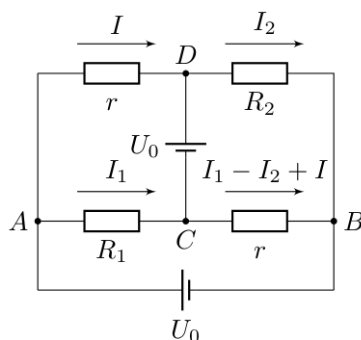
Из закона сохранения заряда:

$$I_1 + \frac{I_1 R_1}{r} = I_2 + \frac{I_2 R_2}{r}; \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2 + r}{R_1 + r}.$$

Мощности на этих резисторах $P_1 = I_1^2 R_1$ и $P_2 = I_2^2 R_2$ равны, следовательно:

$$1 = \frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{I_1}{I_2} \right)^2 \frac{R_1}{R_2} = \left(\frac{R_2 + r}{R_1 + r} \right)^2 \frac{R_1}{R_2}.$$

Метод 2. Введём силы токов через резисторы с учётом закона сохранения заряда (см. рисунок 3). Распишем разность потенциалов двумя способами:



$$\varphi_A - \varphi_B = Ir + I_2 R_2;$$

$$\varphi_A - \varphi_B = I_1 R_1 + (I_1 - I_2 + I)r; \quad I_2 R_2 - I_1 R_1 = (I_1 - I_2)r.$$

Откуда

$$r = \frac{\frac{I_2}{I_1} R_2 - R_1}{1 - \frac{I_2}{I_1}}.$$

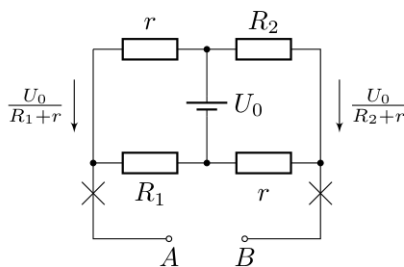
Условие равенства мощностей $I_1^2 R_1 = I_2^2 R_2$, следовательно:

$$\frac{I_2}{I_1} = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{\frac{R_1}{R_2}} R_2 - R_1}{1 - \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}}.$$

Из полученных формул выразим r :

$$r = \sqrt{R_1 R_2}.$$

Пункт 3. Метод 1. Воспользуемся методом эквивалентного источника. Заменяем всю схему на источник напряжением U^* и сопротивлением r^* . Эквивалентное напряжение найдём как разность потенциалов между узлами A и B в отсутствие внешних токов (см. рисунок 4):



$$U^* = \varphi_A - \varphi_B = -\frac{U_0}{R_1 + r} r + \frac{U_0}{R_2 + r} R_2 = 0.$$

Эквивалентное сопротивление найдём, заменив ветвь с источником на перемычку:

$$r^* = \frac{R_1 r}{R_1 + r} + \frac{R_2 r}{R_2 + r} = \sqrt{R_1 R_2}.$$

Таким образом, двухполюсник AB эквивалентен просто резистору сопротивлением $\sqrt{R_1 R_2}$. Следовательно, омметр при подключении к такому двухполюснику покажет $R = \sqrt{R_1 R_2}$ вне зависимости от его полярности.

Метод 2. Заметим, что условие $r^2 = R_1 R_2$ эквивалентно условию сбалансированности моста $r/R_1 = R_2/r$. Рассмотрим схему, в которой источник $\mathcal{E}_0$ внутри омметра заменён на перемычку. Через внутреннее сопротивление r_0 омметра ток не течёт, поскольку он расположен на диагонали сбалансированного моста. Тогда:

$$(\varphi_A - \varphi_B)^{(1)} = 0; \quad I_{AB}^{(1)} = 0.$$

Рассмотрим схему, в которой источник U_0 заменён на перемычку. Через эту перемычку ток также не течёт в силу сбалансированности моста, тогда:

$$(\varphi_A - \varphi_B)^{(2)} = \pm \mathcal{E}; \quad I_{AB}^{(2)} = \frac{\varphi_A - \varphi_B}{r^*}; \quad r^* = \frac{R_1 r}{R_1 + r} + \frac{R_2 r}{R_2 + r}.$$

Наложим две рассматриваемые схемы. Итоговая разность потенциалов на выводах омметра:

$$\varphi_A - \varphi_B = (\varphi_A - \varphi_B)^{(1)} + (\varphi_A - \varphi_B)^{(2)} = \pm \mathcal{E},$$

а сила тока

$$I_{AB} = I_{AB}^{(1)} + I_{AB}^{(2)} = \frac{\varphi_A - \varphi_B}{r^*}.$$

Тогда показание омметра:

$$R = \frac{\varphi_A - \varphi_B}{I_{AB}} = r^* = \frac{R_1 r}{R_1 + r} + \frac{R_2 r}{R_2 + r} = \sqrt{R_1 R_2}.$$

Получили, что через омметр не течёт ток от источника U_0 . Следовательно, омметр показывает эквивалентное сопротивление r^* вне зависимости от полярности подключения.

$$R = \sqrt{R_1 R_2}.$$