Правила Кирхгофа

После пособия вы сможете

- записывать закон сохранения заряда для узлов и «проходку» по контуру — оба правила Кирхгофа — с верными знаками;
- расставлять потенциалы: ноль у минуса батарейки, через батарейку от минуса к плюсу — плюс $\mathcal{E}$;
- решать цепи с несколькими источниками методом узловых потенциалов;
- находить токи через батарейки, в том числе через реальные, с внутренним сопротивлением;
- проверять ответ балансом мощностей.

Теория кратко

Закон Ома для резистора, последовательное и параллельное соединение — в пособиях «Закон Ома, сопротивление» и «Вычисление сопротивлений». Здесь цепи, которые к ним не сводятся: несколько источников, мосты, батарейки в середине схемы.

Определение 1

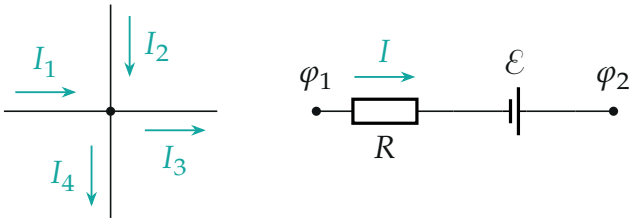
Узел — точка, где сходятся три провода и больше. Ветвь — участок цепи между двумя узлами; сколько ветвей, столько разных токов. Контур — замкнутый путь по ветвям.

Факт 1

Первое правило Кирхгофа — закон сохранения заряда: в узле заряд не копится, сколько втекает, столько и вытекает, $I_1 + I_2 = I_3 + I_4$.
Второе правило — «проходка» по контуру. Идём от точки 1 к точке 2 и складываем скачки потенциала: через резистор *по току* потенциал падает на IR, против тока — растёт на IR; через идеальный источник от минуса к плюсу (длинная черта — плюс) растёт на $\mathcal{E}$, от плюса к минусу — падает. Для участка на рисунке

$$\varphi_1 - IR + \mathcal{E} = \varphi_2.$$

Вернулись в ту же точку — сумма скачков равна нулю.



Слева — узел: $I_1 + I_2 = I_3 + I_4$. Справа — участок с резистором и источником.

Потенциал точки сам по себе смысла не имеет, смысл есть только у разности. Поэтому одну точку мы объявляем нулём — где удобно. Вдоль идеального провода потенциал один и тот же. Реальный источник с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r — это идеальный источник $\mathcal{E}$ и резистор r последовательно; напряжение на нём $U = \mathcal{E} - Ir$, если ток идёт от минуса к плюсу (по сторонней силе), и $U = \mathcal{E} + Ir$, если против.

Методы

Метод 1

Метод узловых потенциалов («алгоритм победы»). Когда применять: всегда, когда цепь не сводится к последовательному и параллельному соединению — несколько батареек, мост, «найдите токи во всех ветвях».

1. Расставляем токи во всех ветвях — наугад. Ток -2 А в одну сторону — то же, что 2 А в другую: не угадали направление — ток выйдет с минусом.
2. Расставляем потенциалы. Ноль — у минуса батарейки, а если батареек много — там, где их минусов больше всего. По проводу потенциал не меняется, через батарейку от минуса к плюсу прибавляем $\mathcal{E}$. Неизвестные потенциалы обозначаем φ_1, φ_2, …
3. Выражаем токи через резисторы законом Ома: $I = (\varphi_{\text{откуда}} - \varphi_{\text{куда}})/R$.
4. Пишем закон сохранения заряда для узлов с неизвестным по-

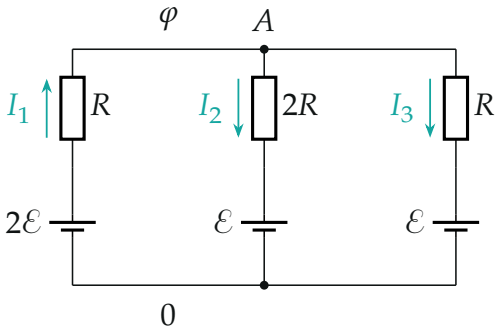
тенциалом — сколько неизвестных, столько уравнений. Сначала для узла, где неизвестная одна.

5. Решаем систему. Ток через идеальную батарейку законом Ома не выразить — его даёт закон сохранения заряда для узла, к которому она подходит.

Пример. Три ветви между нижним и верхним проводом: батарейка $2\mathcal{E}$ и R, батарейка $\mathcal{E}$ и $2R$, батарейка $\mathcal{E}$ и R. Ноль — нижний провод, там все минусы. Над батарейками потенциалы $2\mathcal{E}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}$, у верхнего провода — φ. Закон сохранения заряда для узла A:

$$\frac{2\mathcal{E}-\varphi}{R}=\frac{\varphi-\mathcal{E}}{2R}+\frac{\varphi-\mathcal{E}}{R}\quad\Rightarrow\quad\varphi=\frac{7}{5}\,\mathcal{E}.$$

Отсюда $I_1=\dfrac{3\mathcal{E}}{5R}$ вверх, $I_2=\dfrac{\mathcal{E}}{5R}$ и $I_3=\dfrac{2\mathcal{E}}{5R}$ вниз. Неизвестная была одна — и уравнение одно.



Потенциалы отсчитаны от нуля на нижнем проводе.

Метод 2

Батарейка между двумя неизвестными узлами. Когда применять: идеальный источник стоит в середине схемы, и потенциалов его выводов мы не знаем.

1. Неизвестной берём одну: у минуса φ, у плюса $\varphi+\mathcal{E}$.
2. Ток через батарейку неизвестен и законом Ома не выражается. Поэтому закон сохранения заряда пишем не для каждого узла,

а для *пары* узлов вместе с батарейкой: сколько втекает в пару через резисторы, столько и вытекает. Ток батарейки — внутренний и в уравнение не входит.

3. Нашли φ — ток через батарейку даёт закон сохранения заряда для одного из её узлов.

Метод 3

Проходка и баланс мощностей. Когда применять: контур один и ток в нём один — тогда второе правило Кирхгофа сразу даёт ответ; или нужно проверить готовые токи.

1. Обходим контур от точки до той же точки, складываем скачки потенциала со знаками из теории и приравниваем сумму нулю.
2. Проверка: мощность источников $\sum \mathcal{E}_k I_k$ (ток по сторонней силе — плюс, против — минус) равна теплу в резисторах $\sum I^2 R$.

Частые ошибки

Частая ошибка

Брать направление батарейки по памяти, а не по рисунку. Плюс — длинная тонкая черта. Перепутали одну батарейку — неверны все токи.

Частая ошибка

Путать два знака. Скачок на батарейке ($+\mathcal{E}$ от минуса к плюсу) зависит только от того, *куда мы идём* через неё, а не от тока. Скачок на резисторе ($-IR$) зависит от того, идём мы по току или против.

Частая ошибка

Писать ток через идеальную батарейку как $\mathcal{E}/R$. Её сопротивление ноль, ток через неё — только из закона сохранения заряда. А закон сохранения заряда для узла с неизвестным током батарейки даёт лишнюю неизвестную — берите пару узлов (метод 2).

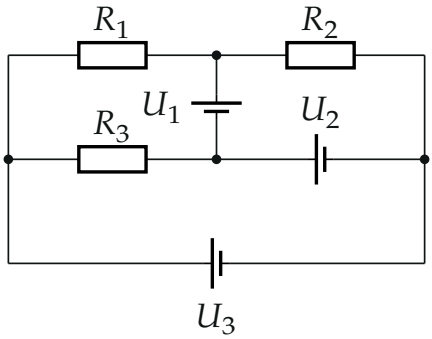
Частая ошибка

Считать, что ток через батарейку всегда идёт от минуса к плюсу. Если

рядом источник сильнее, ток идёт против сторонней силы, и тогда $U = \mathcal{E} + Ir$.

Разобранные примеры

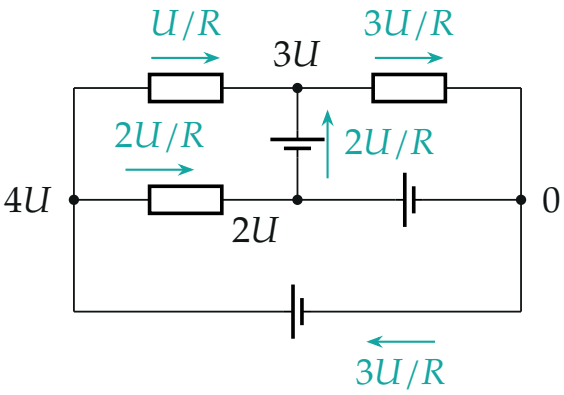
Пример 1. [Всесоюзная 1980/81, заключительный этап, 9 кл.] На схеме сопротивления всех резисторов одинаковы: $R_1 = R_2 = R_3 = R$. Напряжения на клеммах батарей равны $U_1 = U$, $U_2 = 2U$, $U_3 = 4U$. Найдите: 1) направление и величину токов через каждый резистор; 2) направление и величину токов через батареи.



▲ **Решение. Что происходит.** Даны напряжения на клеммах батарей — это разности потенциалов между их выводами. Значит, все потенциалы узлов известны сразу, и токи через резисторы — просто закон Ома; внутреннее сопротивление батарей знать не нужно. Токи через батареи — из закона сохранения заряда.

Обозначения. Левый провод — узел A, правый — B, верхний средний — C, нижний средний — D. Плюс батареи U_1 — у C, батареи U_2 — у D, батареи U_3 — у A.

1. Потенциалы. Ноль — в узле B: там минусы сразу двух батарей. Через U_3 от минуса к плюсу: $\varphi_A = 4U$. Через U_2: $\varphi_D = 2U$. Через U_1 от D к C: $\varphi_C = 2U + U = 3U$.



Потенциалы узлов и токи; через батарею U_2 тока нет.

2. Токи через резисторы. Закон Ома, ток — от большего потенциала к меньшему:

$$I_1 = \frac{\varphi_A - \varphi_C}{R} = \frac{U}{R}, \quad I_2 = \frac{\varphi_C - \varphi_B}{R} = \frac{3U}{R}, \quad I_3 = \frac{\varphi_A - \varphi_D}{R} = \frac{2U}{R}.$$

Все три текут слева направо.

3. Токи через батареи. Закон сохранения заряда для узла C: втекают I_1 и ток батареи U_1, вытекает I_2. Значит, через U_1 течёт $I_2 - I_1 = 2U/R$ снизу вверх, от минуса к плюсу. Для узла D: втекает $I_3 = 2U/R$, ровно столько уходит вверх в батарею U_1, и через U_2 ток $2U/R - 2U/R = 0$. Для узла A: вытекают $I_1 + I_3 = 3U/R$ — это ток батареи U_3; внутри неё он идёт от минуса к плюсу, по нижнему проводу справа налево.

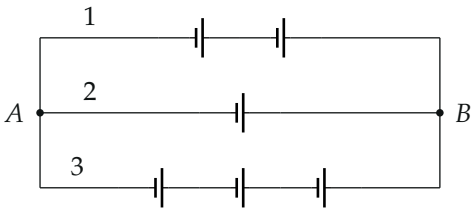
Обратите внимание: на батарее U_2 напряжение $2U$, а тока через неё нет. Узлы D и B и без неё имели бы разность потенциалов $2U$ — ей нечего добавить.

Проверка. Баланс мощностей: источники дают $U \cdot 2U/R + 2U \cdot 0 + 4U \cdot 3U/R = 14U^2/R$, резисторы выделяют $U^2/R + 9U^2/R + 4U^2/R = 14U^2/R$. Сходится; размерность В^2/Ом — ватты.

Ответ. 1) Через R_1 — U/R, через R_2 — $3U/R$, через R_3 — $2U/R$, все слева направо. 2) Через U_1 — $2U/R$ снизу вверх, через U_2 — ноль, через U_3 — $3U/R$ справа налево по нижней ветви.

Пример 2. [ИОШ 2024/25, отборочный этап, 11 кл.] Шесть одинаковых источников с

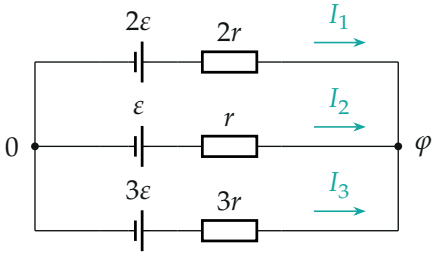
ЭДС ε и внутренним сопротивлением r соединены так, как показано на рисунке. Найдите силу тока на участках 1, 2 и 3. В каком направлении — от A к B или от B к A — текут эти токи?



Все источники одинаковые: ε, r.

▲ **Решение. Что происходит.** Узлов два, A и B, ветвей три. Неизвестный потенциал один — значит, и уравнение одно. Все источники смотрят плюсом к B, но в ветвях их разное число, поэтому где-то ток пойдёт против сторонней силы.

Обозначения. Каждый реальный источник заменим идеальным ε и резистором r последовательно. Ветвь из k источников — это идеальный источник $k\varepsilon$ и резистор kr. Ноль — в узле A, у минусов; в узле B — φ. Токи I_1, I_2, I_3 направим от A к B — знак скажет сам.



Ветвь из k источников — идеальный $k\varepsilon$ и резистор kr.

1. Закон Ома. Проходка по ветви 1 от A к B: через источники от минуса к плюсу потенциал растёт на 2ε, через резистор по току падает на $I_1 \cdot 2r$: $0 + 2\varepsilon - 2rI_1 = \varphi$. Так же для остальных:

$$I_1 = \frac{2\varepsilon - \varphi}{2r}, \qquad I_2 = \frac{\varepsilon - \varphi}{r}, \qquad I_3 = \frac{3\varepsilon - \varphi}{3r}.$$

2. Закон сохранения заряда для узла B**.** Все три тока втекают в B, вытекать нечему: $I_1 + I_2 + I_3 = 0$,

$$\frac{\varepsilon}{r} + \frac{\varepsilon}{r} + \frac{\varepsilon}{r} = \varphi\left(\frac{1}{2r} + \frac{1}{r} + \frac{1}{3r}\right) \quad \Rightarrow \quad 3\varepsilon = \frac{11}{6}\,\varphi, \qquad \varphi = \frac{18}{11}\,\varepsilon.$$

3. Токи. Подставляем:

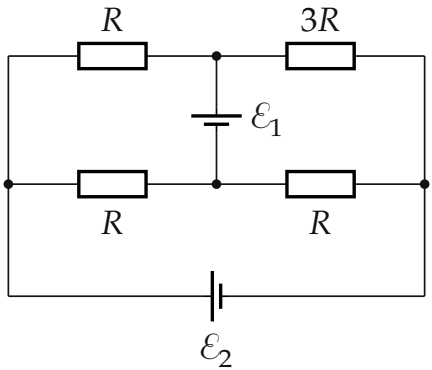
$$I_1 = \frac{2\varepsilon}{11r}, \qquad I_2 = -\frac{7\varepsilon}{11r}, \qquad I_3 = \frac{5\varepsilon}{11r}.$$

$I_2 < 0$: в ветви с одним источником ток течёт от B к A, против его сторонней силы, — этот источник заряжают две соседние ветви.

Проверка. Закон сохранения заряда: $2 - 7 + 5 = 0$. Размерность — В/Ом, ток. Знаки: $\varphi \approx 1{,}64\,\varepsilon$ больше ЭДС ветви 2 (ε) и меньше ЭДС ветвей 1 и 3 (2ε и 3ε), поэтому $I_2 < 0$, а $I_1, I_3 > 0$. Потенциал узла — «среднее» ЭДС ветвей, взвешенное по $1/R$ ветви.

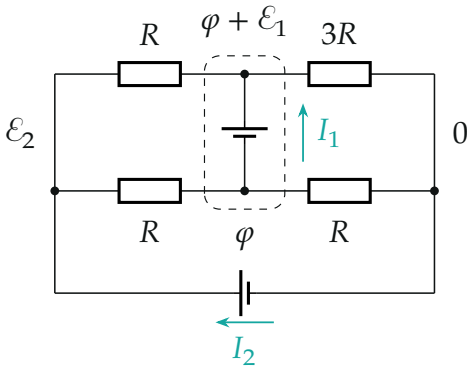
Ответ. $I_1 = \dfrac{2\varepsilon}{11r}$ и $I_3 = \dfrac{5\varepsilon}{11r}$ — от A к B; $I_2 = \dfrac{7\varepsilon}{11r}$ — от B к A.

Пример 3. [Всесоюзная 1980/81, заключительный этап, 10 кл.] Собрана схема, показанная на рисунке. ЭДС батареи $\mathcal{E}_1$ уменьшили на 1,5 В, после чего токи на разных участках цепи изменились. Как нужно изменить ЭДС батареи $\mathcal{E}_2$, чтобы 1) ток через батарею $\mathcal{E}_1$ стал прежним; 2) ток через батарею $\mathcal{E}_2$ стал прежним? Внутренним сопротивлением батарей пренебречь.



▲ **Решение. Что происходит.** Батарея $\mathcal{E}_1$ стоит в перемычке моста, между двумя узлами, потенциалов которых мы не знаем, — метод 2. Найдём токи через обе батареи при любых $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ и потребуем, чтобы нужный ток не изменился.

Обозначения. Верхний узел перемычки — A (плюс $\mathcal{E}_1$), нижний — B. Ноль — на правом проводе, у минуса $\mathcal{E}_2$; левый провод — $\mathcal{E}_2$. В узле B — φ, в узле A — $\varphi + \mathcal{E}_1$. I_1 — ток через $\mathcal{E}_1$ снизу вверх, I_2 — через $\mathcal{E}_2$ справа налево.



Пунктир — пара узлов A, B вместе с батареей $\mathcal{E}_1$.

1. Закон сохранения заряда для пары узлов A и B. Ток I_1 внутренний и в уравнение не входит. В пару втекают токи с левого провода, вытекают — на правый:

$$\frac{\mathcal{E}_2 - \varphi - \mathcal{E}_1}{R} + \frac{\mathcal{E}_2 - \varphi}{R} = \frac{\varphi + \mathcal{E}_1}{3R} + \frac{\varphi}{R}.$$

Умножим на $3R$: $10\varphi = 6\mathcal{E}_2 - 4\mathcal{E}_1$, откуда $\varphi = 0{,}6\,\mathcal{E}_2 - 0{,}4\,\mathcal{E}_1$ и $\varphi_A = \varphi + \mathcal{E}_1 = 0{,}6(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)$.

2. Ток через $\mathcal{E}_1$. Закон сохранения заряда для узла A: в него втекают I_1 и ток с левого провода через R, вытекает ток через $3R$:

$$I_1 = \frac{\varphi_A}{3R} - \frac{\mathcal{E}_2 - \varphi_A}{R} = \frac{0{,}8\,\mathcal{E}_1 - 0{,}2\,\mathcal{E}_2}{R}.$$

3. Ток через $\mathcal{E}_2$. Закон сохранения заряда для левого провода: I_2 втекает и уходит через два левых резистора:

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}_2 - \varphi_A}{R} + \frac{\mathcal{E}_2 - \varphi}{R} = \frac{0{,}8\,\mathcal{E}_2 - 0{,}2\,\mathcal{E}_1}{R}.$$

4. Что от нас хотят. Токи — линейные функции ЭДС, поэтому изменения токов выражаются через изменения ЭДС теми же формулами: $\Delta\mathcal{E}_1 = -1{,}5$ В, $\Delta\mathcal{E}_2 = x$. Ток I_1 прежний: $0{,}8\cdot(-1{,}5) - 0{,}2x = 0$, $x = -6$ В. Ток I_2 прежний: $-0{,}2\cdot(-1{,}5) + 0{,}8x = 0$, $x = -0{,}375$ В.

Проверка. Предел $\mathcal{E}_2 = 0$: батарея $\mathcal{E}_2$ становится проводом, левый и правый провод — одна точка. Тогда $\mathcal{E}_1$ нагружена на $R \parallel 3R = 0{,}75R$ сверху и $R \parallel R = 0{,}5R$ снизу, всего $1{,}25R$, и $I_1 = \mathcal{E}_1/1{,}25R = 0{,}8\,\mathcal{E}_1/R$ — совпадает. Своя батарея влияет на свой ток в четыре раза сильнее, чем чужая.

Ответ. 1) Уменьшить $\mathcal{E}_2$ на 6 В; 2) уменьшить $\mathcal{E}_2$ на 0,375 В.

Как решать листок

Сложность 2–4 («напряжения батарей известны», «найдите токи») — метод 1, часто все потенциалы известны сразу. Ветви с реальными источниками между двумя узлами — одно уравнение для узла. Батарейка в перемычке или в середине схемы — метод 2. От сложности 6 — мосты с несколькими источниками и приборами; каждый ответ проверяйте балансом мощностей (метод 3).