Работа и мощность тока, нагреватели

После пособия вы сможете

- находить работу и мощность тока на любом элементе и тепло на резисторе по закону Джоуля — Ленца;
- выбирать формулу мощности по тому, что в цепи общее: ток или напряжение;
- решать задачи про нагреватели и чайники: время нагрева при последовательном и параллельном включении;
- находить наибольшую мощность на нагрузке и все нагрузки, на которых мощность одна и та же.

Теория кратко

Через элемент цепи за время t протекает заряд $q = It$; электрические силы переносят его от потенциала φ_1 к потенциалу φ_2 и совершают работу $A = qU = UIt$, где $U = \varphi_1 - \varphi_2$.

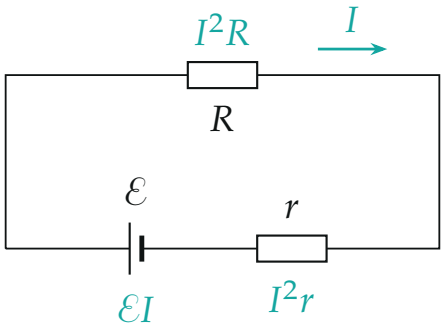
Факт 1

Мощность тока на *любом* элементе (резисторе, лампе, моторе, диоде) $P = UI$. На резисторе вся работа тока уходит в тепло — закон Джоуля — Ленца:

$$Q = I^2Rt, \qquad P = UI = I^2R = \frac{U^2}{R}.$$

Определение 1

Мощность источника — мощность сторонних сил внутри него: $P_{\text{ист}} = \mathcal{E}I$ (ток течёт внутри источника от «−» к «+»). Она идёт на тепло на внутреннем сопротивлении и на внешнюю цепь: $\mathcal{E}I = I^2r + UI$. Коэффициент полезного действия источника $\eta = \dfrac{UI}{\mathcal{E}I} = \dfrac{R}{R+r}$.



Закон сохранения энергии в цепи: $\mathcal{E}I = I^2r + I^2R$.

Факт 2

Закон сохранения энергии в цепи без конденсаторов: сумма мощностей источников равна сумме мощностей на всех остальных элементах. Номинальные данные прибора («220 В, 100 Вт») задают его сопротивление $R = U_{\text{ном}}^2/P_{\text{ном}}$; в другой цепи мощность будет другой, а сопротивление то же (если не сказано, что оно меняется).

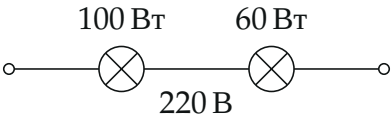
Методы

Метод 1

Что общее — то и в формулу. Когда применять: «какая лампа горит ярче», «где выделится больше тепла», «во сколько раз изменится мощность».

1. Последовательно соединённые элементы: общий ток, пишем $P = I^2R$ — больше тепла на *большем* сопротивлении.
2. Параллельно: общее напряжение, пишем $P = U^2/R$ — больше тепла на *меньшем* сопротивлении.
3. Сопротивление прибора — из номинальных данных, потом ток или напряжение — из закона Ома для этой цепи.

Пример. Лампы 100 Вт и 60 Вт (обе на 220 В) включили в сеть последовательно. Из $R = U^2/P$ сопротивление у лампы на 60 Вт больше, ток общий — значит, ярче горит она. Каждая отдаёт меньше номинала: через них течёт ток, меньший номинального.



Метод 2

Нагреватели: тепло одно и то же. Когда применять: чайник, кипятильник, плитка; «через какое время закипит», спирали включают поразному.

1. Нужное тепло Q одно и то же в каждом опыте (потерями пренебрегаем). Напряжение сети тоже одно: $Q = U^2t/R$, то есть время пропорционально сопротивлению: $t = QR/U^2$.
2. Спирали последовательно: $R = R_1 + R_2$, поэтому $t = t_1 + t_2$.
3. Параллельно: мощности складываются, $P = P_1 + P_2$, поэтому $1/t = 1/t_1 + 1/t_2$.
4. Если источник не идеальный или есть потери — пишите закон сохранения энергии честно, с ними.

Метод 3

Максимум мощности на нагрузке. Когда применять: реостат или нагрузку подбирают, «наибольшая мощность», «при каком R», два сопротивления с одинаковой мощностью.

1. Выразите мощность на нагрузке через ток: $IR = \mathcal{E} - Ir$, умножим на I:

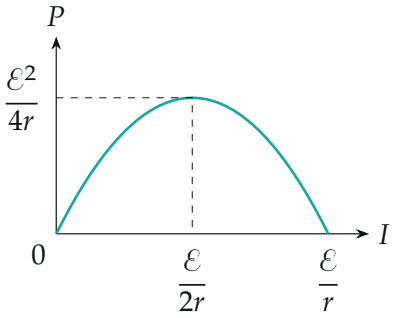
   $$P = I^2R = I(\mathcal{E} - Ir).$$

   Это закон сохранения энергии: мощность источника $\mathcal{E}I$ минус тепло I^2r.
2. Парабола ветвями вниз с корнями $I = 0$ и $I = \mathcal{E}/r$ (короткое замыкание). Вершина — посередине:

   $$I = \frac{\mathcal{E}}{2r}, \qquad P_{\max} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r},$$

   и при этом $R = r$.
3. Мощность меньше максимальной достигается при двух токах —

двух сопротивлениях R' и R'', и $R'R'' = r^2$.



Мощность на нагрузке в зависимости от тока: максимум посередине между корнями.

То же через сопротивление: $P = I^2R = \dfrac{\mathcal{E}^2 R}{(R+r)^2}$, и

$$\frac{P}{P_{\max}} = \frac{4Rr}{(R+r)^2} \le 1,$$

потому что $(R+r)^2 - 4Rr = (R-r)^2 \ge 0$.

Пример (ВсОШ 2008/09, региональный этап). На реостате, подключённом к источнику, выделяется $P_0 = 16$ Вт и при токе $I_1 = 1$ А, и при $I_2 = 4$ А. Уравнение $rI^2 - \mathcal{E}I + P_0 = 0$ имеет корни I_1 и I_2, по теореме Виета $I_1 + I_2 = \mathcal{E}/r$ и $I_1 I_2 = P_0/r$. Тогда

$$P_{\max} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r} = \frac{P_0 (I_1 + I_2)^2}{4 I_1 I_2} = \frac{16 \cdot 25}{16}\,\text{Вт} = 25\,\text{Вт}.$$

Решать квадратное уравнение не пришлось: оба корня уже даны.

Частые ошибки

Частая ошибка

Считать мощностью источника UI. Это мощность, отданная во внешнюю цепь; мощность источника — $\mathcal{E}I$, разница $I^2 r$ греет сам источник.

Частая ошибка

Переносить номинальную мощность в чужую цепь. Лампа «100 Вт» даёт 100 Вт только при 220 В. Постоянно её сопротивление, а не мощность.

Частая ошибка

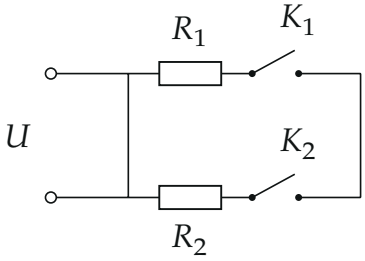
«На большем сопротивлении всегда больше тепла». Это верно только при последовательном соединении; при параллельном — наоборот.

Частая ошибка

Путать максимум мощности на нагрузке с максимумом КПД. При $R = r$ мощность наибольшая, а КПД всего 50 %; КПД растёт с R.

Разобранные примеры

Пример 1. [МОШ 2010/11, отборочный этап, 9 кл.] Электрический чайник имеет две обмотки. При включении одной из них вода закипает через 200 секунд, при включении другой — через 800 секунд. Через сколько секунд закипит чайник, если включить обе обмотки параллельно?



Обмотки R_1 и R_2 включаются в сеть ключами K_1 и K_2.

▲ **Решение. Что происходит.** Чтобы вскипятить воду, нужно одно и то же количество теплоты Q, как ни включай обмотки. Напряжение сети U тоже одно и то же. При параллельном включении на каждой обмотке по-прежнему напряжение U, и каждая выделяет ту же мощность, что и одна, — мощности складываются (метод 2). Потерями тепла пренебрегаем.

1. Одна обмотка. По закону Джоуля — Ленца мощности обмоток $P_1 = U^2/R_1$ и $P_2 = U^2/R_2$, и

$$Q = P_1 t_1 = P_2 t_2, \qquad P_1 = \frac{Q}{t_1}, \quad P_2 = \frac{Q}{t_2}.$$

2. Обе параллельно. Мощность чайника $P = P_1 + P_2$, и $Q = Pt$:

$$\frac{Q}{t} = \frac{Q}{t_1} + \frac{Q}{t_2} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} = \frac{200 \cdot 800}{1000}\,\text{с} = 160\,\text{с}.$$

Проверка. Размерность — время. Ответ меньше, чем у более быстрой обмотки ($160 < 200$): вторая обмотка только помогает. Если бы обмотки были одинаковыми, время уменьшилось бы ровно вдвое — формула даёт $t_1/2$. Последовательно обмотки дали бы $t_1 + t_2 = 1000$ с — медленнее любой одной.

Ответ. $t = \dfrac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} = 160$ с.

Пример 2. [Курчатов 2012/13, заключительный этап, 8–9 кл.] При подключении к батарейке резистора с сопротивлением R_1 выделяющаяся в этом резисторе полезная мощность оказалась в 2 раза меньше максимально возможной. При замене резистора R_1 на другой резистор с сопротивлением R_2 выделяющаяся в нём мощность оказалась в 3 раза меньше максимально возможной. Найдите, чему может быть равно отношение R_1/R_2.

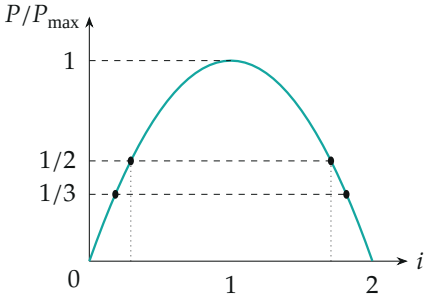
▲ **Решение. Что происходит.** У батарейки ЭДС $\mathcal{E}$ и внутреннее сопротивление r. Мощность на резисторе зависит от тока параболой (метод 3): значение меньше максимального она принимает при двух токах, то есть при двух сопротивлениях — одно больше r, другое меньше. Поэтому ответов будет несколько.

Обозначения. $I_* = \mathcal{E}/(2r)$ — ток при максимуме, $P_{\max} = \mathcal{E}^2/(4r)$. Ток удобно мерить в долях I_*: $I = iI_*$.

1. Мощность через ток. Закон Ома для полной цепи $IR = \mathcal{E} - Ir$,

умножаем на I:

$$P = I(\mathcal{E} - Ir) = \frac{i\mathcal{E}}{2r}\left(\mathcal{E} - \frac{i\mathcal{E}}{2}\right) = P_{\max}\, i\,(2 - i).$$



Каждому уровню мощности ниже максимума — два тока.

2. Два тока на каждый уровень. Решаем квадратные уравнения для $P = P_{\max}/2$ и $P = P_{\max}/3$:

$$i(2-i) = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; i = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad i(2-i) = \frac{1}{3} \;\Rightarrow\; i = 1 \pm \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

3. Сопротивления. Из закона Ома для полной цепи $\mathcal{E} = I(R + r)$, где $I = i\mathcal{E}/(2r)$, получаем $R/r = 2/i - 1 = (2 - i)/i$. Подставляем:

$$\frac{R_1}{r} = \frac{1 \mp \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2} \mp 1}{\sqrt{2} \pm 1} = 3 \mp 2\sqrt{2}, \qquad \frac{R_2}{r} = \frac{\sqrt{3} \mp \sqrt{2}}{\sqrt{3} \pm \sqrt{2}} = 5 \mp 2\sqrt{6}.$$

В каждой паре произведение равно r^2, как и обещал метод 3.

4. Отношения. R_1 и R_2 выбираются из своих пар независимо — четыре варианта:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{3 \pm 2\sqrt{2}}{5 \pm 2\sqrt{6}}: \qquad 0{,}59; \quad 1{,}70; \quad 57{,}7; \quad 0{,}017.$$

Первые два — когда оба резистора больше r или оба меньше, последние два — когда по разные стороны от r.

Проверка. Подставим $R = (3+2\sqrt{2})r \approx 5{,}83r$ в формулу метода 3 — сходится:

$$\frac{P}{P_{\max}} = \frac{4Rr}{(R+r)^2} = \frac{4\cdot 5{,}83}{6{,}83^2} = 0{,}50.$$

Отношения не зависят ни от $\mathcal{E}$, ни от r — в условии их и нет.

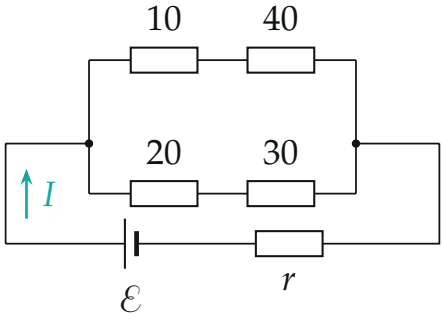
Ответ. $\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{3\pm 2\sqrt{2}}{5\pm 2\sqrt{6}}$ (знаки независимы): $\approx 0{,}59$ или $1{,}70$ (оба резистора по одну сторону от внутреннего сопротивления), $\approx 57{,}7$ или $0{,}017$ (по разные стороны).

Пример 3. [Всесоюзная 1968/69, заключительный этап, 11 кл.] Имеются четыре тонкие проволочные спирали, каждая из которых рассчитана на мощность не более 2 Вт. Сопротивления спиралей 10, 20, 30 и 40 Ом. Как из этих спиралей составить нагреватель, в котором источник с ЭДС $\mathcal{E} = 20$ В и внутренним сопротивлением $r = 25$ Ом будет развивать наибольшую мощность?

▲ **Решение. Что происходит.** Мощность в нагревателе зависит только от его сопротивления R и наибольшая при $R = r$ (метод 3). Значит, надо набрать из спиралей 25 Ом и проверить, что ни одна спираль не перегреется (метод 1).

1. Сколько можно получить. При $R = r$ мощность $P_{\max} = \mathcal{E}^2/(4r) = 4$ Вт. Четыре спирали вместе выдержат до 8 Вт — запас есть, если мощность распределится не слишком неравномерно.

2. Набираем 25 Ом. 25 Ом — это две параллельные ветви по 50 Ом, а $50 = 10 + 40 = 20 + 30$. Собираем: 10 и 40 Ом последовательно, 20 и 30 Ом последовательно, ветви — параллельно.



Нагреватель 25 Ом: две ветви по 50 Ом параллельно; сопротивления — в омах.

3. Проверяем спирали. Ток через источник $I = \mathcal{E}/(R + r) = 20/50\,\text{А} = 0{,}4\,\text{А}$; ветви одинаковые, в каждой по 0,2 А. Внутри ветви ток общий, поэтому больше всех греется самая большая спираль (метод 1): $P_{40} = 0{,}2^2 \cdot 40\,\text{Вт} = 1{,}6\,\text{Вт} < 2\,\text{Вт}$. Остальные — 1,2; 0,8 и 0,4 Вт.

Проверка. Сумма мощностей спиралей $1{,}6 + 1{,}2 + 0{,}8 + 0{,}4 = 4{,}0$ Вт $= P_{\max}$. Источник развивает $\mathcal{E}I = 8$ Вт, вторая половина греет его внутреннее сопротивление — КПД ровно 50 %, как и должно быть при $R = r$.

Ответ. Соединить последовательно спирали 10 и 40 Ом, последовательно 20 и 30 Ом и эти две ветви — параллельно. Сопротивление нагревателя 25 Ом $= r$, мощность в нём 4 Вт, на каждой спирали не больше 1,6 Вт.

Как решать листок

Сложность 2–4 («какая лампа ярче», «сколько тепла выделится», чайники) — методы 1 и 2. «Наибольшая мощность», «при каком сопротивлении», реостат с двумя одинаковыми мощностями — метод 3. От сложности 5 сочетайте их с законом сохранения энергии для всей цепи.