Вычисление сопротивлений, симметрия, бесконечные цепочки

После пособия вы сможете

- находить эквивалентное сопротивление любой цепи из резисторов методом расстановки токов;
- видеть точки одного потенциала, соединять и разрезать их, перерисовывать запутанную схему;
- пользоваться хорошей и плохой симметрией: ставить равные токи и выбрасывать резисторы без тока;
- находить сопротивление бесконечной цепочки, отрезав звено.

Теория кратко

Определение 1

Эквивалентное сопротивление цепи с двумя выводами — сопротивление одного резистора, которым можно заменить всю цепь так, что при той же разности потенциалов выводов втекает тот же ток I_0:

$$R_{\text{экв}} = \frac{\varphi_+ - \varphi_-}{I_0},$$

где φ_+ — потенциал вывода, в который ток втекает, φ_- — из которого вытекает.

Факт 1

Два закона, на которых держится всё остальное.

- *Закон сохранения заряда*: сколько тока втекает в узел, столько и вытекает.
- *Проходка*: $\varphi_A - \varphi_B$ — сумма $\pm I_k R_k$ по любому пути от A к B: по току $+IR$, против тока $-IR$, на проводе ноль. От пути не зависит — идём там, где токи известны.

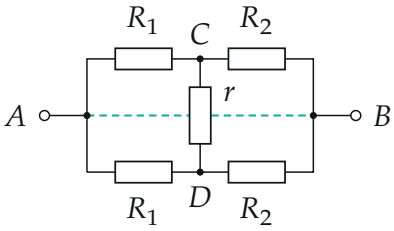
Ток через резистор определяется только разностью потенциалов на его концах. Отсюда главное свойство, ради которого перерисовывают

схемы.

Факт 2

Точки с одинаковым потенциалом можно соединить проводом, слить в одну или, наоборот, разрезать узел — токи в резисторах и $R_{экв}$ не изменятся. Резистор, оба конца которого под одним потенциалом, тока не несёт — его можно выбросить.

Такие точки дают провода без сопротивления (все точки провода — один потенциал) и симметрия.



Ось хорошей симметрии (пунктир) проходит через выводы: $\varphi_C = \varphi_D$, через r тока нет при любом r.

Факт 3

Хорошая симметрия — ось через оба вывода, при повороте вокруг неё схема не меняется: симметричные точки под одним потенциалом, токи на симметричных резисторах равны. *Плохая симметрия* — резисторы симметричны, а выводы лежат по разные стороны оси: все точки оси под одним потенциалом, токи на симметричных резисторах равны по модулю и направлены «от плюса к минусу» одинаково.

Методы

Метод 1

Перерисовка. Когда применять: провода пересекаются, перемычки соединяют далёкие точки, «запутанная схема», идеальные амперметры.

1. Обозначьте буквами все узлы. Точки, соединённые проводом без сопротивления (или идеальным амперметром), — одна буква.

2. Нарисуйте узлы в ряд от «+» к «−» и каждый резистор — между его двумя буквами.
3. Резистор, у которого обе буквы одинаковые, выбросьте. Дальше — последовательное и параллельное соединение.

Пример. Квадрат $ABCD$, на сторонах резисторы R, по диагонали AC — провод, выводы A и B. Точки A и C — одна буква. Тогда AB и CB стоят между A и B параллельно, а AD и DC образуют путь из A обратно в A — тока в них нет. Получаем $R_{AB} = R/2$.

Метод 2

Расстановка токов. Когда применять: схема не сворачивается последовательно-параллельно (мост, сетка, объёмный каркас).

1. Поставьте на выводах «+» и «−», направления токов — наугад, от плюса к минусу. Ошибётесь — ток выйдет с минусом.
2. Введите ток I в одном резисторе и выразите через него остальные: сначала закон сохранения заряда для узла, не вышло — две проходки между одними и теми же точками (через неизвестный ток и по известным).
3. Найдите I_0 через I, проходкой — $\varphi_+ - \varphi_-$, и разделите.

Найденный ток пишите в скобках рядом с обозначением, дроби убирайте заменой $I = 2I_1$. Неизвестных токов — как можно меньше.

Метод 3

Симметрия. Когда применять: сетка, каркас, звезда — геометрически красивая фигура из одинаковых резисторов.

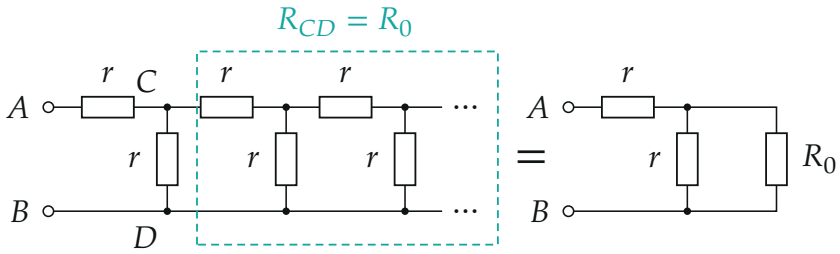
1. Найдите оси (в объёмной фигуре — плоскости). Через оба вывода — хорошая, выводы по разные стороны — плохая.
2. Хорошая: симметричные точки соединяем («складываем книжкой»), перемычку между симметричными точками выбрасываем.
3. Плохая: точки оси — один потенциал; их можно соединить или разрезать узел на оси, разбив цепь на две одинаковые последовательные половины.

4. На симметричных резисторах сразу ставим одинаковые токи — неизвестных становится вдвое меньше.

Метод 4

Бесконечная цепь: отрезать звено. Когда применять: «бесконечная», «очень длинная» цепочка, звенья повторяются или растут в одно и то же число раз.

1. Обозначьте $R_{AB} = R_0$.
2. Найдите два узла C и D, за которыми цепь та же, что исходная: бесконечность без одного звена — та же бесконечность. Тогда $R_{CD} = R_0$. Если все сопротивления дальше в k раз больше, то $R_{CD} = kR_0$.
3. Замените остаток одним резистором и запишите R_0 через последовательное и параллельное соединение — получится квадратное уравнение. Корень берите положительный.



Правее узлов C и D — та же бесконечная цепь, её заменяем одним R_0.

Пример (IPhO 1967). Для лестницы на рисунке

$$R_0 = r + \frac{rR_0}{r + R_0} \;\Rightarrow\; R_0^2 - rR_0 - r^2 = 0, \qquad R_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\, r \approx 1{,}62r.$$

Проверка: $R_0 > r$ — на входе стоит r последовательно с чем-то ещё.

Частые ошибки

Частая ошибка

При плохой симметрии отражать ток так же, как при хорошей. Стрел-

ку надо отразить относительно оси и развернуть ещё раз: на симметричных резисторах токи текут «от плюса к минусу», а не навстречу друг другу.

Частая ошибка

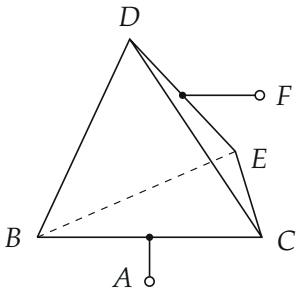
Видеть симметрию в одной геометрии. Нужно, чтобы симметричными были и сопротивления, и выводы: квадрат, у которого одна сторона $2R$, или выводы не на оси — уже другая задача.

Частая ошибка

Писать рекурсию не для той пары выводов. Повторяется часть цепи между *своими* узлами C и D — иногда это не R_{AB}, а сопротивление другой пары точек (пример 3). Сверяйте, где у отрезанной части выводы.

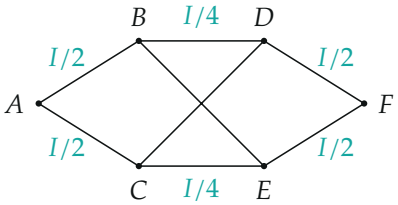
Разобранные примеры

Пример 1. [Росатом 2019/20, отборочный этап, 9 кл.] Из проволоки сделали правильную треугольную пирамиду, все рёбра которой имеют одинаковую длину и одинаковое сопротивление R. К серединам двух противоположных рёбер подключают источник напряжения. Чему равно сопротивление пирамиды?



▲ **Решение. Что происходит.** Пирамида с равными рёбрами — правильный тетраэдр, у него много симметрии. Выводы A и F — середины противоположных рёбер BC и DE. Найдём точки одного потенциала, сольём их, и каркас свернётся в последовательную цепочку (метод 3).

1. Симметрия. Отражение относительно плоскости, проходящей через ребро DE и точку A, меняет местами B и C, а выводы A и F оставляет на месте. Это хорошая симметрия: $\varphi_B = \varphi_C$. Так же плоскость через ребро BC и точку F меняет местами D и E: $\varphi_D = \varphi_E$.



Каркас, развёрнутый на плоскость; диагонали — рёбра BE и CD, пересекаются без контакта.

2. Сливаем точки. Соединим B с C и D с E. Половинки ребра BC (по $R/2$) теперь стоят между A и узлом BC параллельно: $R/4$. Четыре ребра BD, BE, CD, CE соединяют узел BC с узлом DE — четыре R параллельно, тоже $R/4$. Половинки ребра DE — снова $R/4$. Всё это последовательно:

$$R_{AF} = \frac{R}{4} + \frac{R}{4} + \frac{R}{4} = \frac{3}{4}R.$$

Проверка. Второй способ — токами (рисунок выше). Втекает I; из симметрии по половинкам AB и AC течёт по $I/2$, по каждому из четырёх рёбер — $I/4$, у F — снова по $I/2$. Проходка $A \to B \to D \to F$:

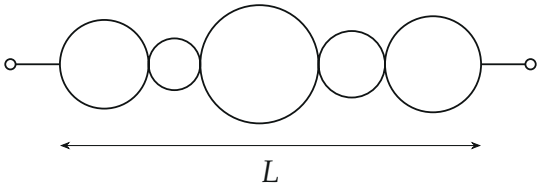
$$\varphi_A - \varphi_F = \frac{I}{2}\cdot\frac{R}{2} + \frac{I}{4}\cdot R + \frac{I}{2}\cdot\frac{R}{2} = \frac{3}{4}IR.$$

Это меньше $2R$ — сопротивления одного пути $A \to B \to D \to F$: ток идёт сразу по многим путям.

Ответ. $R_{AF} = \dfrac{3}{4}R.$

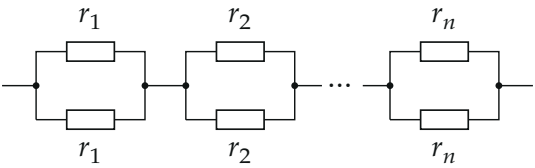
Пример 2. [ВсОШ 2011/12, региональный этап, 9 кл.] Из серебряной проволоки массой $m = 3{,}91$ г изготовили кольца разного диаметра, которые соединили

в цепочку. Электрическое сопротивление между концами такой цепочки $R = 1{,}00 \cdot 10^{-2}$ Ом. Вычислите длину цепочки, если плотность серебра $d = 10{,}5$ г/см^3, а удельное сопротивление $\rho = 1{,}49 \cdot 10^{-6}$ Ом · см. Диаметр сечения проволоки много меньше диаметра самого маленького колечка. Цепочка натянута. Сопротивлением колец в месте контакта можно пренебречь.



▲ **Решение. Что происходит.** Цепочка натянута, поэтому каждое кольцо касается соседей в двух диаметрально противоположных точках, а длина цепочки — сумма диаметров. Ток проходит кольцо по двум полукольцам сразу, кольца друг за другом — перерисуем цепочку (метод 1). Диаметры не даны — наверное, ответ от них не зависит.

Обозначения. D_i — диаметр i-го кольца, S — сечение проволоки, $L = \sum D_i$.



Каждое кольцо — два полукольца r_i параллельно, кольца — последовательно.

1. Одно кольцо. Полукольцо — провод длины $\pi D_i/2$, два полукольца соединены параллельно:

$$r_i = \frac{\rho \pi D_i}{2S}, \qquad R_i = \frac{r_i}{2} = \frac{\rho \pi D_i}{4S}.$$

2. Цепочка. Кольца соединены последовательно:

$$R = \sum \frac{\rho \pi D_i}{4S} = \frac{\pi\rho}{4S} \sum D_i = \frac{\pi \rho L}{4S}.$$

Диаметры по отдельности действительно не нужны — только их сумма L.

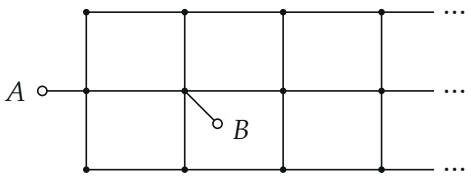
3. Сечение — из массы. Вся проволока имеет длину $\sum \pi D_i = \pi L$, её масса $m = d \cdot \pi L \cdot S$, откуда $S = \dfrac{m}{\pi d L}$. Подставим:

$$R = \frac{\pi^2 \rho d\, L^2}{4m} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{mR}{\rho d}} = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{3{,}91 \cdot 1{,}00 \cdot 10^{-2}}{1{,}49 \cdot 10^{-6} \cdot 10{,}5}}\ \text{см} \approx 31{,}8\ \text{см}.$$

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{г} \cdot \text{Ом}}{\text{Ом} \cdot \text{см} \cdot \text{г/см}^3} = \text{см}^2$, под корнем — квадрат длины. При той же массе более длинная цепочка сделана из более тонкой проволоки, поэтому $R \propto L^2$, а не L.

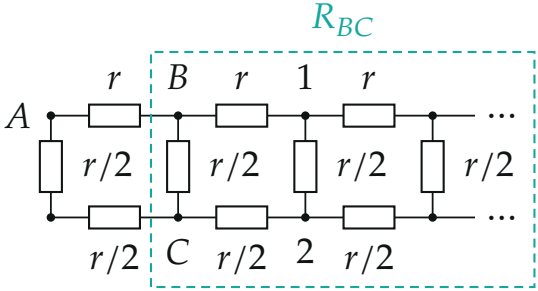
Ответ. $L = \dfrac{2}{\pi}\sqrt{\dfrac{mR}{\rho d}} \approx 31{,}8$ см.

Пример 3. [«Туймаада» 2003/04, заключительный этап, 11 кл.] Определите сопротивление полубесконечной сетки между точками A и B, если сопротивление каждого звена равно R.



▲ **Решение. Что происходит.** Средняя линия сетки проходит через оба вывода — это ось хорошей симметрии. Сложим сетку «книжкой», а потом отрежем звено — но отрезанная часть окажется подобна не всей сетке, а другой цепи. Чтобы не путать с ответом, звено обозначим r.

1. Складываем книжкой. Симметричные узлы верхней и нижней линий под одним потенциалом — соединим их и наложим верхнюю половину на нижнюю. Средняя линия остаётся звеньями r. Два звена каждой вертикали (вверх и вниз от оси) легли друг на друга — параллельно, $r/2$; звенья внешних линий тоже легли парами — $r/2$.



Сложенная сетка. В рамке — цепь между B и C; правее узлов 1 и 2 — она же.

2. Что от нас хотят. Всё правее A (вертикаль под B и остальная сетка) подключено к B и к узлу C под ним — заменим это одним R_{BC}. Между A и B стоит r, параллельно ему путь $r/2$ (вертикаль под A), $r/2$ (внешнее звено), R_{BC}:

$$R_{AB} = \frac{r\,(r + R_{BC})}{2r + R_{BC}}.$$

3. Рекурсия для R_{BC}. Обратите внимание: повторяется не R_{AB}, а R_{BC}. Правее узлов 1 и 2 стоит то же, что правее B и C, поэтому $R_{12} = R_{BC}$. Между B и C — вертикаль $r/2$, параллельно ей r, R_{BC} и $r/2$:

$$R_{BC} = \frac{\frac{r}{2}\left(\frac{3}{2}r + R_{BC}\right)}{2r + R_{BC}}.$$

Перемножим накрест и возьмём положительный корень:

$$4R_{BC}^2 + 6rR_{BC} - 3r^2 = 0, \qquad R_{BC} = \frac{\sqrt{21} - 3}{4}\,r.$$

4. Ответ. Подставим R_{BC} в формулу пункта 2:

$$R_{AB} = \frac{1+\sqrt{21}}{5+\sqrt{21}}\,r = \left(\sqrt{21}-4\right)r \approx 0{,}58r.$$

Проверка. Размерность верна. $R_{AB} < r$: звено между A и B шунтировано всей остальной сеткой. И $R_{BC} \approx 0{,}40r < r/2$ — вертикаль под B тоже шунтирована.

Ответ. $R_{AB} = \dfrac{\sqrt{21}+1}{\sqrt{21}+5}\,R = (\sqrt{21}-4)R \approx 0{,}58R.$

Как решать листок

Сложность 2–4 (схемы с перемычками, «найдите сопротивление цепи») — методы 1 и 2. Каркасы, сетки, звёзды — метод 3, сразу ищите оси. Бесконечные цепочки — метод 4; от сложности 5 он сочетается с симметрией, как в примере 3.