Напряжённость поля, принцип суперпозиции

После пособия вы сможете

- записывать закон Кулона и находить силу на заряд от нескольких зарядов как векторную сумму;
- находить напряжённость поля системы точечных зарядов, сначала убирая по симметрии всё, что гасится;
- находить точки, где поле равно нулю, и положения равновесия зарядов;
- пользоваться поворотом, сменой знака и наложением систем: «убрали заряд — добавили заряд другого знака».

Теория кратко

Факт 1

Закон Кулона. Два неподвижных точечных заряда q_1 и q_2 на расстоянии r действуют друг на друга с силой

$$F = \frac{k|q_1 q_2|}{r^2}, \qquad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{Кл}^2,$$

направленной вдоль прямой, соединяющей заряды: одноимённые отталкиваются, разноимённые притягиваются. Точечные — значит, размеры много меньше расстояния; для пластин и близких шаров так писать нельзя.

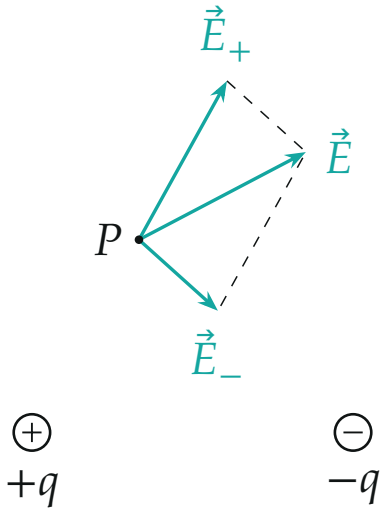
Определение 1

Напряжённость поля в точке — сила, действующая на маленький пробный заряд q, делённая на этот заряд: $\vec{E} = \vec{F}/q$, и тогда $\vec{F} = q\vec{E}$. Поле точечного заряда Q на расстоянии r равно $E = k|Q|/r^2$ и направлено от заряда при $Q > 0$ и к заряду при $Q < 0$.

Факт 2

Принцип суперпозиции: поле нескольких зарядов — *векторная* сумма полей каждого из них, $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots$ Так же складываются силы.

Сначала направления, потом модули.



Поле в точке P: от положительного заряда, к отрицательному, сумма — по правилу параллелограмма.

Идея 1

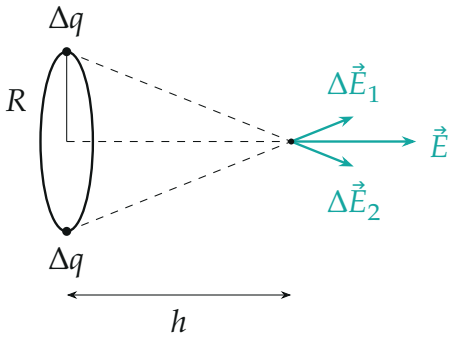
Прежде чем считать, ищите симметрию. На оси симметрии тела составляющие поля поперёк оси от симметричных кусочков гасят друг друга — остаётся только проекция на ось. Одинаковые заряды в вершинах правильного многоугольника в центре поля не дают: поворот на угол между вершинами переводит систему в себя, а ненулевой вектор при повороте изменился бы.

Так находится поле кольца радиуса R с зарядом q на его оси на расстоянии h от центра. Разобьём кольцо на маленькие кусочки Δq — каждый точечный, до точки от каждого $\sqrt{R^2+h^2}$. Поперечные составляющие от противоположных кусочков гасятся, проекция на ось у всех одинакова: $\Delta E_x = \dfrac{k\Delta q}{R^2+h^2}\cos\alpha$, $\cos\alpha = \dfrac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}$. Множитель перед Δq общий,

сумма всех Δq равна q:

$$E = \frac{kqh}{(R^2 + h^2)^{3/2}}.$$

В центре кольца поле равно нулю, далеко ($h \gg R$) — как у точечного заряда.



Поле кольца на оси: поперечные составляющие от противоположных кусочков гасятся.

Методы

Метод 1

Поле системы зарядов. Когда применять: «найдите напряжённость в точке», «силу, действующую на заряд», заряды в вершинах фигуры.

1. Нарисуйте в точке поле каждого заряда: от положительного, к отрицательному. Модули — $k|q_i|/r_i^2$.
2. Ищите симметрию: какие пары гасят друг друга, вдоль чего направлена сумма.
3. Оставшееся сложите: два вектора — правилом параллелограмма (равные по модулю под углом 120° дают вектор той же длины), больше — проекциями на оси.
4. Сила на заряд q в этой точке — $q\vec{E}$; у отрицательного заряда она против поля.

Метод 2

Ноль поля и равновесие заряда. Когда применять: «где поле равно нулю», «где поместить заряд, чтобы он был в равновесии», «какой заряд нужен для равновесия».

1. Заряд q в поле закреплённых зарядов в равновесии тогда и только тогда, когда в его точке поле остальных равно нулю — при любом q.
2. Два заряда на прямой: поля противоположны там, где стрелки смотрят навстречу. У одноимённых — между зарядами, у разноимённых — снаружи, со стороны меньшего по модулю. Равенство модулей даёт отношение расстояний $r_1/r_2 = \sqrt{|q_1/q_2|}$.
3. Заряд на спице, нити, поверхности: проецируйте силы на направление, в котором он может двигаться; реакция в эту проекцию не входит.
4. Устойчиво ли равновесие: сместите заряд на малое δ в каждом возможном направлении и посмотрите, возвращает ли его сила. Заряд того же знака посередине между двумя одинаковыми зарядами вдоль оси возвращается, поперёк — уходит.

Метод 3

Повернуть, сменить знак, наложить. Когда применять: заряды в вершинах правильного многоугольника — разные, в прогрессии; убрали один заряд или одну палочку; дырка в заряженном теле.

1. Убрать заряд — то же, что добавить на его место заряд другого знака. Многоугольник из одинаковых зарядов без одного создаёт в центре поле kq/R^2, направленное к пустой вершине.
2. Разные заряды: поверните систему на угол α между вершинами и умножьте заряды на число со знаком так, чтобы при наложении на исходную почти всё сократилось. Поле повёрнутой системы повёрнуто на α и умножено на то же число.
3. Поле наложенной системы найдите напрямую, а с исходным свяжите треугольником векторов — теорема косинусов.

Частые ошибки

Частая ошибка

Складывать модули полей. $E_1 + E_2$ верно, только если поля направлены одинаково; в общем случае — параллелограмм или проекции.

Частая ошибка

Путать направления: поле отрицательного заряда смотрит *к* нему, а сила на отрицательный заряд — против поля.

Частая ошибка

Обозначать одной буквой k постоянную Кулона и жёсткость пружины. Если в задаче есть и то и другое, сразу пишите постоянную иначе, например $\varkappa = 1/(4\pi\varepsilon_0)$.

Частая ошибка

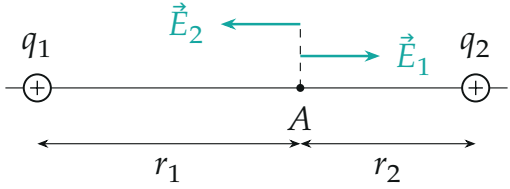
«Сумма сил равна нулю — значит, заряд там и останется». Равновесие бывает неустойчивым; проверяйте малым смещением во все стороны, куда заряд может сдвинуться.

Разобранные примеры

Пример 1. [МОШ 2010/11, отборочный этап, 11 кл.] Электрическое поле создаётся двумя положительными точечными зарядами $9 \cdot 10^{-9}$ Кл и $4 \cdot 10^{-9}$ Кл. Чему равно расстояние между этими зарядами, если известно, что точка, в которой напряжённость электрического поля равна нулю, находится на расстоянии 33 см от бóльшего заряда? Ответ приведите в сантиметрах.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Поле равно нулю там, где поля двух зарядов равны по модулю и смотрят навстречу (метод 2). Оба заряда положительны: оба поля смотрят от своих зарядов — навстречу они только между зарядами.

Обозначения. $q_1 = 9 \cdot 10^{-9}$ Кл, $q_2 = 4 \cdot 10^{-9}$ Кл, A — точка нулевого поля, $r_1 = 33$ см и r_2 — расстояния от A до зарядов, $d = r_1 + r_2$.



1. Равенство полей в точке A**.** Поле q_1 направлено от q_1, поле q_2 — от q_2, и по модулю они равны:

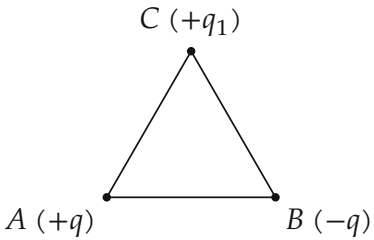
$$\frac{kq_1}{r_1^2} = \frac{kq_2}{r_2^2} \;\Rightarrow\; r_2 = r_1\sqrt{\frac{q_2}{q_1}} = 33 \cdot \frac{2}{3} = 22\,\text{см}.$$

2. Расстояние между зарядами. $d = r_1 + r_2 = 55$ см.

Проверка. Точка нулевого поля ближе к меньшему заряду, $r_2 < r_1$, — так и должно быть: меньший заряд «перетягивает» только вблизи себя. Снаружи от зарядов поля смотрят в одну сторону, второго ответа нет.

Ответ. $d = r_1\left(1 + \sqrt{q_2/q_1}\right) = 55$ см.

Пример 2. [МОШ 2012/13, заключительный этап, 10 кл.] В трёх вершинах равностороннего треугольника ABC разместили электрические заряды: в вершинах A и B — закреплённые электрические заряды $+q$ и $-q$ соответственно, в вершине C — незакреплённый электрический заряд $+q_1$. Укажите, в какой точке D плоскости ABC надо разместить ещё один электрический заряд $+q$, чтобы находящийся в точке C электрический заряд $+q_1$ находился в равновесии.



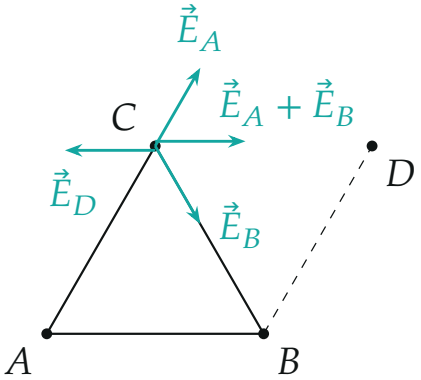
▲ **Решение. Что происходит.** На заряд в точке C действует сила $q_1\vec{E}$, где $\vec{E}$ — поле всех остальных зарядов. Равновесие — значит, в точке C

поле равно нулю (метод 2). Найдём поле зарядов A и B; новый заряд должен дать в C поле той же величины, направленное противоположно. Сторону треугольника обозначим a.

1. Поле зарядов A и B в точке C. Поле $+q$ направлено от A, вдоль луча AC; поле $-q$ — к B, вдоль CB. Модули одинаковы, kq/a^2. Векторно

$$\vec{E}_A + \vec{E}_B = \frac{kq}{a^3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = \frac{kq}{a^3}\overrightarrow{AB}:$$

сумма направлена параллельно AB, от A к B, и по модулю равна kq/a^2 (два равных вектора под углом 120°).



Поля в точке C; $ACDB$ — параллелограмм.

2. Где нужен новый заряд. Поле $+q$ из точки D в точке C направлено от D к C. Чтобы оно погасило сумму, нужно $\overrightarrow{DC} \parallel \overrightarrow{BA}$ и $kq/DC^2 = kq/a^2$, то есть $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA}$. Отсюда $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$: точка D — четвёртая вершина параллелограмма $ACDB$.

Проверка. D лежит на прямой, проходящей через C параллельно AB, на расстоянии a от C — поле kq/a^2, как и нужно; середина BC — середина AD. Ответ не зависит от q_1: заряд в C в равновесии при любом его значении. Это равновесие неустойчиво — в электростатике свободный заряд устойчиво не висит.

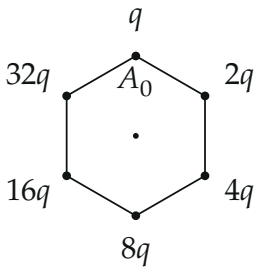
Ответ. В вершине D параллелограмма $ACDB$: $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.

Пример 3. [МОШ 2007/08, заключительный этап, 10 кл.] В вершинах правильного N-угольника расположены последовательно электрические заряды, величины которых образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2 и равны q, $2q$, …, $2^{N-1}q$. Расстояние от центра многоугольника до любой из его вершин равно R. Найдите величину E напряжённости электрического поля в центре многоугольника.

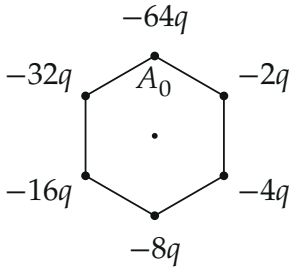
▲ **Решение. Что происходит.** Складывать N векторов в лоб тяжело. Повернём систему, изменим заряды и наложим на исходную так, чтобы почти всё сократилось (метод 3).

Обозначения. Вершины по порядку A_0, A_1, …, A_{N-1}, в вершине A_k заряд $2^k q$; $\alpha = 2\pi/N$ — угол между соседними радиусами; $\vec{E}_1$ — поле этой системы в центре, E — его модуль.

1. Вторая система. Повернём систему на α так, чтобы заряд из A_k перешёл в A_{k+1} (а из A_{N-1} — в A_0), и умножим все заряды на -2. Поле в центре повернулось на α и умножилось на -2: $\vec{E}_2 = -2\vec{E}'_1$, где $\vec{E}'_1$ — повёрнутый на α вектор $\vec{E}_1$.



система 1



система 2

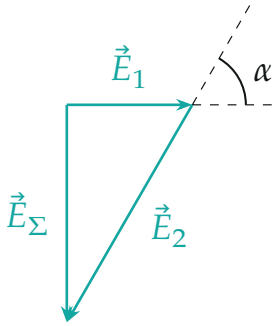
Пример при $N = 6$: в каждой вершине, кроме A_0, заряды систем 1 и 2 сокращаются.

2. Наложение. В вершине A_k при $k \geq 1$ заряд $2^k q - 2 \cdot 2^{k-1} q = 0$. В вершине A_0 остаётся $q - 2 \cdot 2^{N-1} q = -(2^N - 1)q$. Поле одного этого заряда в центре направлено к A_0:

$$E_\Sigma = \frac{k(2^N - 1)q}{R^2}.$$

3. Треугольник полей. По принципу суперпозиции $\vec{E}_\Sigma = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{E}_1 - 2\vec{E}'_1$. Векторы $\vec{E}_1$ и $2\vec{E}'_1$ образуют угол α, их длины E и $2E$. Теорема косинусов:

$$E_\Sigma^2 = E^2 + 4E^2 - 4E^2\cos\alpha \;\Rightarrow\; E = \frac{E_\Sigma}{\sqrt{5-4\cos\alpha}}.$$



$\vec{E}_2 = -2\vec{E}'_1$; пунктир — направление $\vec{E}'_1$, повёрнутого на α.

4. Ответ. Подставляем E_Σ: $E = \dfrac{k(2^N-1)q}{R^2\sqrt{5-4\cos(2\pi/N)}}$.

Проверка. Размерность — как у поля точечного заряда. При $N = 2$ заряды q и $2q$ стоят друг против друга, и поле равно $k(2q-q)/R^2 = kq/R^2$; формула даёт $\dfrac{3}{\sqrt{5+4}}\cdot\dfrac{kq}{R^2}$ — то же самое. Поворот со сменой знака свёл N зарядов к одному.

Ответ. $E = \dfrac{(2^N-1)q}{4\pi\varepsilon_0 R^2\sqrt{5-4\cos(2\pi/N)}}$.

Как решать листок

Сложность 3–4 (поле двух-трёх зарядов, точка нулевого поля) — методы 1 и 2. Равновесие заряда, бусинки на спицах, заряды на нитях (сложность 5) — метод 2 со вторым законом Ньютона. Многоугольники с разными зарядами, убранные палочки, дырки, кольца и полусферы (сложность 6–7) — симметрия и метод 3.