Формула линзы, увеличение

После пособия вы сможете

- строить изображение предмета в тонкой линзе удобными лучами и называть его тремя словами;
- записывать формулу тонкой линзы с верными знаками для любого случая;
- находить расстояния и увеличение по словам условия: «экран», «прямое», «перевёрнутое»;
- решать задачи о двух положениях предмета или линзы.

Теория кратко

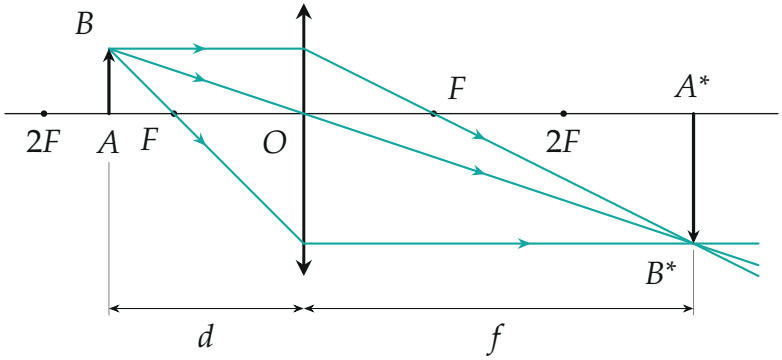
Тонкая линза — толщина много меньше диаметра. На рисунке это отрезок со стрелками: у собирающей острия наружу, у рассеивающей — внутрь. Точка O в середине — оптический центр, прямая через O перпендикулярно линзе — главная оптическая ось. Фокусы F лежат на оси симметрично по обе стороны линзы; той же буквой F обозначают фокусное расстояние.

Факт 1

Три удобных луча.

- Луч через оптический центр O идёт не преломляясь.
- Луч, параллельный оси, после собирающей линзы идёт через задний фокус; после рассеивающей — так, что через передний фокус проходит его *продолжение*.
- Луч через передний фокус собирающей линзы после неё идёт параллельно оси.

Изображение точки — там, где пересекаются все лучи, вышедшие из неё (или их продолжения). Хватит двух лучей; третий — проверка.



Собирающая линза, $F < d < 2F$: изображение действительное, перевёрнутое, увеличенное.

Определение 1

d — расстояние от предмета до линзы, f — от изображения до линзы, F — фокусное расстояние; все три — расстояния, они положительны. Увеличение $\Gamma = \dfrac{y}{x}$, где x и y — поперечные размеры предмета и изображения. Из подобия треугольников ABO и A^*B^*O

$$\Gamma = \frac{f}{d}.$$

Изображение действительное, если в нём сходятся сами лучи (его можно поймать экраном), и мнимое, если сходятся только продолжения (его видит глаз сквозь линзу).

Факт 2

Формула тонкой линзы:

$$\pm\frac{1}{F} = \pm\frac{1}{d} \pm \frac{1}{f}, \qquad d, f, F > 0.$$

Знак у $\frac{1}{F}$: «+» — собирающая, «−» — рассеивающая. У $\frac{1}{d}$: «+» — предмет действительный (от него идёт расходящийся пучок). У $\frac{1}{f}$: «+» — изображение действительное, «−» — мнимое. Всё действительное и собирающее — плюс, всё мнимое и рассеивающее — минус. Опти-

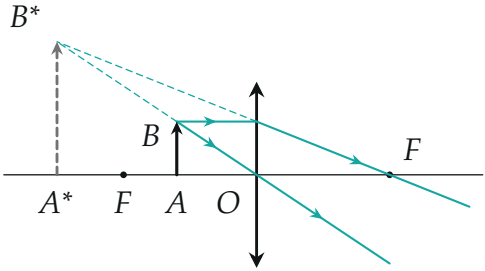
ческая сила $\mathcal{D} = \pm\frac{1}{F}$, в диоптриях (дптр $= м^{-1}$).

Откуда формула — для случая первого рисунка. Луч, параллельный оси, после линзы идёт через фокус. Треугольник «точка падения на линзе — O — фокус» с катетами x и F подобен треугольнику «фокус — A^* — B^*» с катетами $f - F$ и y. Вместе с подобием, которое дало $\Gamma = f/d$:

$$\frac{y}{x} = \frac{f-F}{F}, \quad \frac{y}{x} = \frac{f}{d} \quad \Rightarrow \quad \frac{f}{d} = \frac{f}{F} - 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}.$$

Для мнимого изображения те же треугольники дают минус у $1/f$.

Изображение называют тремя словами: действительное или мнимое, прямое или перевёрнутое, увеличенное или уменьшенное. Для одной линзы и действительного предмета «действительное» всегда идёт с «перевёрнутым», «мнимое» — с «прямым». Рассеивающая линза даёт только мнимое, прямое, уменьшенное изображение. Собирающая: при $d < F$ — мнимое, прямое, увеличенное (лупа); при $d = F$ — на бесконечности; при $F < d < 2F$ — действительное, увеличенное; при $d = 2F$ — в натуральную величину; при $d > 2F$ — уменьшенное.



Лупа, $d < F$: изображение мнимое, прямое, увеличенное; продолжения лучей — пунктир.

Методы

Метод 1

Построение и характеристика. Когда применять: в любой задаче на линзу — первым делом, даже если просят только числа.

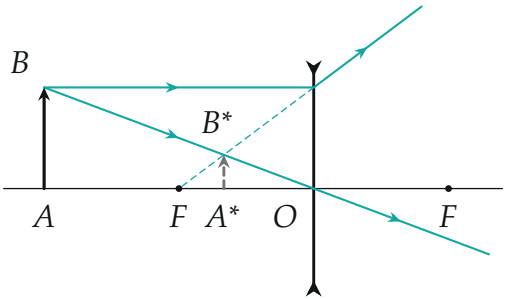
1. Нарисуйте линзу, ось, оба фокуса и предмет на своём месте ($d < F$, $F < d < 2F$, …).
2. Изображение верхней точки B — двумя удобными лучами: через O и параллельно оси. Изображение отрезка, перпендикулярного оси, — тоже перпендикулярно оси: опустите перпендикуляр.
3. Назовите изображение тремя словами. Сходятся сами лучи — действительное, продолжения — мнимое (пунктир).

Метод 2

Формула линзы со знаками. Когда применять: даны или спрашивают расстояния, увеличение, оптическую силу.

1. По словам условия определите тип линзы и изображения. «На экране» — действительное. «Прямое» — мнимое, «перевёрнутое» — действительное. Прямое и уменьшенное — рассеивающая линза. Прямое и увеличенное — собирающая, $d < F$.
2. Запишите формулу с нужными знаками; d, f, F — положительные числа.
3. Добавьте $\Gamma = f/d$ и связь из условия: $d + f = L$ (предмет и экран по разные стороны), $f - d$ или $d - f$ (мнимое изображение — по ту же сторону, что предмет).

Пример. Рассеивающая линза, $F = 20$ см, предмет на $d = 20$ см. Изображение мнимое: $-\frac{1}{F} = \frac{1}{d} - \frac{1}{f}$, откуда $\frac{1}{f} = \frac{1}{d} + \frac{1}{F} = \frac{1}{10\text{ см}}$, $f = 10$ см, $\Gamma = \frac{1}{2}$. Изображение посередине между фокусом и линзой, вдвое меньше предмета.



Рассеивающая линза: изображение всегда мнимое, прямое, уменьшенное.

Метод 3

Предмет и экран неподвижны, линзу двигают. Когда применять: «расстояние от предмета до экрана L», «линзу передвинули — снова чёткое изображение».

1. Изображение на экране — действительное: $\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$, $d + f = L$.
2. Лучи обратимы: если линза даёт чёткое изображение при (d, f), то даст и при (f, d). Второе положение — d и f поменялись местами, увеличение стало $1/\Gamma$.
3. Решение есть, только если $L \geq 4F$: при $d = f = 2F$ расстояние $d + f$ наименьшее.

Метод 4

Два положения предмета — одно увеличение. Когда применять: «предмет сдвинули, увеличение то же», «увеличение Г получается при двух положениях».

1. У рассеивающей $\Gamma = \frac{F}{d+F}$ убывает с d — одно Г бывает только при одном d. Значит, линза собирающая.
2. У собирающей $\Gamma = \frac{F}{|F-d|}$: одно положение за фокусом (действительное изображение), другое до фокуса (мнимое), на одном расстоянии от фокуса: $d_1 + d_2 = 2F$.

Частые ошибки

Частая ошибка

Ставить минус дважды: и в формулу, и в f. В этой записи d, f, F — расстояния, всегда положительные; весь знак — в «$\pm$» перед дробью. Получилось $f < 0$ или $d < 0$ — ошиблись в типе изображения.

Частая ошибка

Писать формулу, не решив, какое изображение. Без этого непонятно ни знак у $\frac{1}{f}$, ни складывать d и f или вычитать. Сначала рисунок и три слова, потом формула.

Частая ошибка

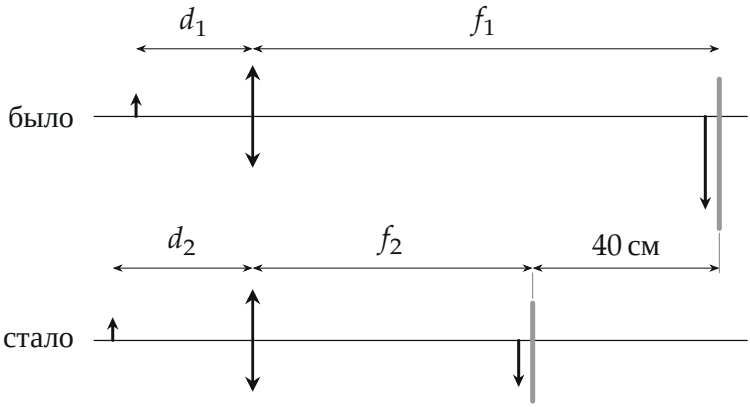
Рисовать продолжения лучей сплошными, а мнимое изображение — как настоящее. Сплошной линией — только то, где свет на самом деле идёт.

Разобранные примеры

Пример 1. [Курчатов 2016/17, заключительный этап, 11 кл.] С помощью тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием 20 см получили на экране увеличенное в 4 раза чёткое изображение предмета. Затем, не меняя положения линзы, экран придвинули на 40 см к линзе и переместили предмет так, чтобы на экране вновь получилось чёткое изображение. Найдите новое расстояние от предмета до линзы. Какое увеличение получилось во втором случае?

▲ **Решение.** **Что происходит.** Изображение на экране — значит, действительное, и в обоих случаях формула линзы со всеми плюсами (метод 2). Из первого опыта найдём, где стоял экран, а из второго — новое d.

Обозначения. $F = 20$ см, d_1, f_1 — расстояния от линзы до предмета и до экрана сначала, d_2, f_2 — потом; $f_2 = f_1 - 40$ см.



Линза на месте; экран придвинули, предмет отодвинули.

1. Первый опыт. Увеличение $\Gamma_1 = \frac{f_1}{d_1} = 4$, то есть $d_1 = \frac{f_1}{4}$. Формула тонкой линзы для действительного изображения:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} = \frac{4}{f_1} + \frac{1}{f_1} = \frac{5}{f_1} \quad \Rightarrow \quad f_1 = 5F = 100\,\text{см}, \qquad d_1 = 25\,\text{см}.$$

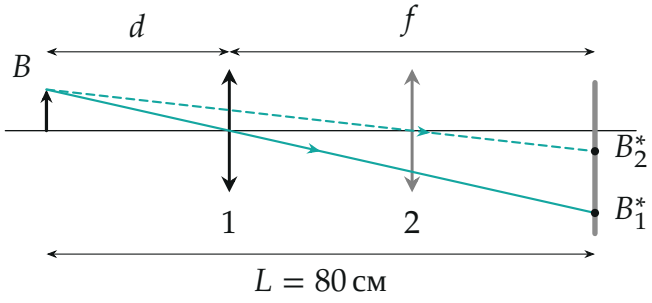
2. Второй опыт. Экран теперь на $f_2 = 100 - 40 = 60$ см. Снова формула линзы:

$$\frac{1}{d_2} = \frac{1}{F} - \frac{1}{f_2} = \frac{1}{20} - \frac{1}{60} = \frac{1}{30}\ (\text{см}^{-1}), \qquad d_2 = 30\,\text{см}, \qquad \Gamma_2 = \frac{f_2}{d_2} = 2.$$

Проверка. Оба положения предмета между F и $2F$ (25 и 30 см) — изображения действительные и увеличенные, как и сказано. Предмет отодвинули от фокуса — увеличение упало с 4 до 2: $\Gamma = \frac{F}{d-F}$ даёт $\frac{20}{5} = 4$ и $\frac{20}{10} = 2$. Экран ближе к линзе — предмет дальше: d и f меняются в разные стороны.

Ответ. $d_2 = 30$ см, увеличение 2.

Пример 2. [МОШ 2013/14, отборочный этап, 7–11 кл.] Экран расположен на расстоянии 80 см от предмета. С помощью линзы школьник хочет получить чёткое изображение предмета на экране; предмет и экран перпендикулярны главной оптической оси. A) Линзу с какой наименьшей оптической силой можно взять? B) Школьник получил изображение с увеличением 2. Чему равна оптическая сила его линзы? C) Передвинув линзу, он снова получил чёткое изображение. Найдите отношение размера изображения к размеру предмета. D) На какое расстояние передвинули линзу?



Два положения линзы; лучи через оптический центр.

▲ **Решение. Что происходит.** Предмет и экран неподвижны, расстояние между ними L — метод 3. Изображение на экране действительное, линза собирающая: $\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$, $d + f = L$.

A. Наименьшая оптическая сила. Выразим $f = L - d$ и подставим: $\frac{1}{F} = \frac{L}{d(L-d)}$. Чёткое изображение есть, если для данного F найдётся такое d. Произведение $d(L-d)$ не больше $L^2/4$ (наибольшее — при $d = L/2$), поэтому $\frac{1}{F} \geq \frac{4}{L}$:

$$\mathcal{D}_{\min} = \frac{4}{L} = \frac{4}{0{,}8\,\text{м}} = 5\,\text{дптр}.$$

B. Увеличение 2. $\Gamma = \frac{f}{d} = 2$ и $d + f = L$: $d = \frac{L}{3}$, $f = \frac{2L}{3}$. Формула тонкой линзы:

$$\mathcal{D} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{3}{L} + \frac{3}{2L} = \frac{9}{2L} = \frac{9}{1{,}6\,\text{м}} \approx 5{,}6\,\text{дптр}.$$

C. Второе положение. Формула симметрична по d и f: второе положение — $d' = \frac{2L}{3}$, $f' = \frac{L}{3}$. Увеличение $\Gamma' = \frac{f'}{d'} = \frac{1}{2} = 0{,}5$.

D. Сдвиг линзы. $d' - d = \frac{2L}{3} - \frac{L}{3} = \frac{L}{3} \approx 27$ см.

Проверка. $\mathcal{D} = 5{,}6$ дптр больше 5 дптр — такая линза подходит. Произведение увеличений двух положений $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$, как и должно быть при перемене d и f. Размерность $\frac{1}{L}$ — м^{-1}, диоптрии.

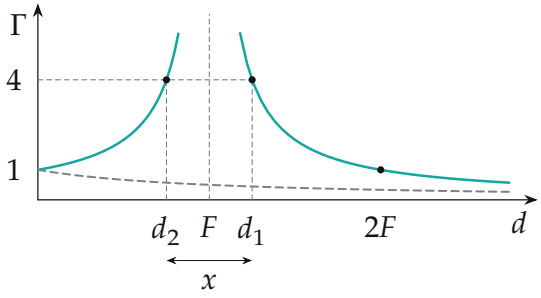
Ответ. A) 5 дптр; B) $\frac{9}{2L} \approx 5{,}6$ дптр; C) 0,5; D) $\frac{L}{3} \approx 27$ см.

Пример 3. [Физтех 2015/16, заключительный этап, 11 кл.] Тонкая линза создаёт изображение предмета, расположенного перпендикулярно главной оптической оси, с увеличением $\Gamma = 4$. Предмет перемещают (не трогая линзу) вдоль главной оптической оси и получают изображение с тем же увеличением; предмет остаётся по одну сторону линзы. Линза собирающая или рассеивающая? Найдите отношение перемещения предмета к фокусному расстоянию линзы.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Одно увеличение при двух положениях предмета — метод 4. Какое изображение в каждом положении, не сказано, поэтому сначала разберёмся с этим.

1. Какая линза. У рассеивающей линзы изображение всегда уменьшенное, $\Gamma = \frac{F}{d+F} < 1$, — увеличения 4 она не даст вовсе. Линза собирающая.

2. Где предмет. У собирающей линзы $\Gamma > 1$ бывает в двух местах: до фокуса (мнимое изображение) и между F и $2F$ (действительное). Одно и то же Γ на одной ветви графика получается только один раз — значит, предмет был по разные стороны фокуса: $d_2 < F < d_1$.



Увеличение $\Gamma(d)$: бирюзовое — собирающая линза, серое — рассеивающая.

3. Формула линзы для каждого положения. Положение 1, изображение действительное: $\frac{1}{F} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1}, f_1 = \Gamma d_1$, откуда $\frac{1}{F} = \frac{\Gamma+1}{\Gamma d_1}$ и

$$d_1 = F\,\frac{\Gamma+1}{\Gamma} = F + \frac{F}{\Gamma}.$$

Положение 2, изображение мнимое: $\frac{1}{F} = \frac{1}{d_2} - \frac{1}{f_2}$, $f_2 = \Gamma d_2$, откуда

$$d_2 = F\,\frac{\Gamma - 1}{\Gamma} = F - \frac{F}{\Gamma}.$$

Оба положения на расстоянии F/Γ от фокуса, по разные его стороны.

4. Что от нас хотят. Перемещение

$$x = d_1 - d_2 = \frac{2F}{\Gamma}, \qquad \frac{x}{F} = \frac{2}{\Gamma} = \frac{1}{2}.$$

Проверка. Безразмерно. Предел $\Gamma \to \infty$: предмет у самого фокуса, $x \to 0$ — оба положения сливаются в $d = F$, где изображение уходит на бесконечность. При $\Gamma = 1$: $d_2 = 0$ и $d_1 = 2F$ — второе положение вырождается, как и видно по графику. При $\Gamma = 4$: $d_1 = 1{,}25F$, $d_2 = 0{,}75F$ — оба по одну сторону линзы.

Ответ. Собирающая; $\dfrac{x}{F} = \dfrac{2}{\Gamma} = \dfrac{1}{2}$.

Как решать листок

Сложность 2–3 («найдите f», «какое изображение», оптическая сила) — методы 1 и 2: рисунок, три слова, формула со знаками. «Экран» и «линзу передвинули» — метод 3. «То же увеличение», «два положения» — метод 4 и график $\Gamma(d)$. От сложности 6 — продольное увеличение и движение изображения: малый сдвиг предмета и та же формула линзы.