Сила Архимеда

После пособия вы сможете

- выводить силу Архимеда из разности давлений и понимать, когда формула $\rho g V$ верна;
- находить натяжение нити, растяжение пружины и показания динамометра для тела в жидкости («вес в воде»);
- находить показания весов под сосудом, в который опускают тело, через третий закон Ньютона;
- находить силу давления жидкости на тело, которое прижато ко дну или затыкает отверстие.

Теория кратко

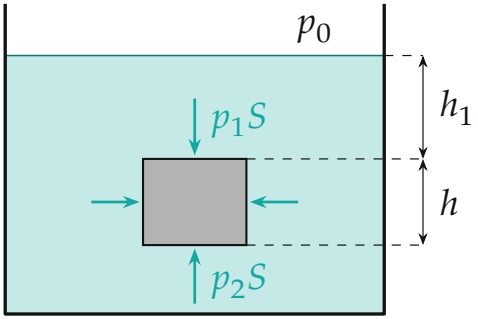
Определение 1

Сила Архимеда (выталкивающая сила) — равнодействующая всех сил давления жидкости или газа на поверхность тела.

Посчитаем её для бруска высоты h с горизонтальными гранями площади S, верхняя грань — на глубине h_1. Давления на боковые грани на каждой глубине одинаковы с обеих сторон, эти силы гасят друг друга. Остаются верх и низ:

$$F_A = p_2 S - p_1 S = (p_0 + \rho g(h_1 + h))S - (p_0 + \rho g h_1)S = \rho g h S = \rho g V.$$

Глубина h_1 и атмосферное давление сократились: снизу давят сильнее, потому что там глубже.



Снизу давление больше, чем сверху, на $\rho g h$; боковые силы гасят друг друга.

Для тела любой формы есть приём лучше. Сила давления зависит только от жидкости вокруг и от формы поверхности, но не от того, из чего тело сделано. Заменим тело той же жидкостью той же формы. Эта «жидкая копия» покоится вместе со всей жидкостью, значит, силы давления на неё уравновешивают её вес $\rho V g$.

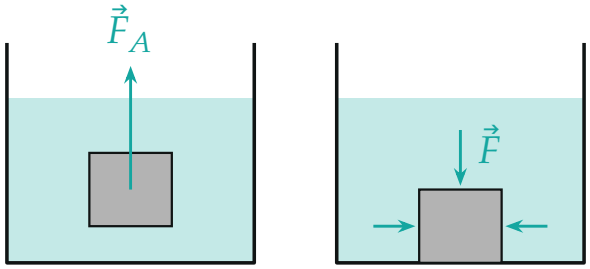
Факт 1

Закон Архимеда. На тело, которое жидкость омывает со всех сторон, действует сила

$$F_A = \rho_{\text{ж}} g V_{\text{погр}},$$

направленная вверх и приложенная в центре тяжести вытесненной жидкости. Здесь $\rho_{\text{ж}}$ — плотность *жидкости*, $V_{\text{погр}}$ — объём погружённой части тела. Если тело в нескольких жидкостях, складываем: $F_A = g(\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2)$.

Формула верна, только если жидкость подтекает под тело. Если тело плотно прижато ко дну, снизу давления жидкости нет — и вода тело не выталкивает, а прижимает.



Слева жидкость подтекает под тело — сила Архимеда вверх. Справа тело плотно прилегает ко дну — вода только давит сверху и с боков.

Методы

Метод 1

Тело на нити, пружине, динамометре. Когда применять: «тело подвешено», «динамометр показывает», «вес в воде», «растяжение пружины уменьшилось», плотность по взвешиванию.

1. Нарисуйте тело отдельно и все силы: $m\vec{g}$, $\vec{F}_A$, натяжение $\vec{T}$ (или упругую силу $k\Delta l$), реакцию дна, если тело на нём лежит.
2. Второй закон Ньютона в проекции на вертикаль, тело покоится: $T + F_A - mg = 0$. Показание динамометра — это T: «вес в воде» $P' = mg - F_A$.
3. Сравните два опыта: в воздухе и в жидкости. Разность показаний — это сила Архимеда, $F_A = P - P'$. Отсюда объём тела $V = F_A/(\rho_ж g)$, его плотность $\rho_т = \rho_ж \dfrac{P}{P - P'}$.

Пример. Кусок металла весит в воздухе 39 Н, в воде 34 Н, в другой жидкости 35 Н. Объём тот же, поэтому силы Архимеда 5 Н и 4 Н относятся как плотности жидкостей: $\rho = \frac{4}{5} \cdot 1000 = 800$ кг/м^3.

Метод 2

Сосуд на весах: третий закон Ньютона. Когда применять: сосуд стоит на весах или висит на динамометре, в воду опускают тело на нити, палец, гирю; «изменилось ли давление на дно», «что покажут весы».

1. Жидкость действует на тело силой $\vec{F}_A$ вверх — значит, тело действует на жидкость силой $-\vec{F}_A$ вниз, той же величины. Через жидкость она передаётся на дно: показания весов растут на F_A, сила давления на дно — тоже.
2. Надёжнее всего выбрать систему и записать её внешние силы: например, «сосуд + жидкость» — тяжесть, сила весов, сила F_A вниз от тела. Или «сосуд + жидкость + тело» — тогда добавляется натяжение нити вверх.
3. Не забудьте жидкость, которая вылилась, и что уровень поднялся на $V_{погр}/S_{сосуда}$.

Пример. Стальной шарик на пружине жёсткости 40 Н/м опустили в стакан с площадью дна 16 см^2, растяжение пружины уменьшилось на 2 см. Значит, $F_A = k\Delta l = 0{,}8$ Н, и столько же шарик добавил к силе давления на дно: $\Delta p = F_A/S = 500$ Па.

Метод 3

Тело прижато ко дну или затыкает отверстие. Когда применять:

пробка в дне, брусок плотно лежит на дне, «жидкость не подтекает», полушарие на дне.

1. Отметьте грани, которые смочены, и те, где жидкости нет (дно, стенки отверстия).
2. Дополните смоченную часть тела до замкнутой фигуры плоскими сечениями там, где жидкости нет. Если бы жидкость давила и на эти сечения, получилась бы обычная сила Архимеда $\rho g V_{\text{части}}$ вверх.
3. Вычтите силы давления, которых на самом деле нет: $p\,S_{\text{сеч}}$ на каждое сечение, где p — давление жидкости на его глубине.

Пример. Кубик с ребром a плотно стоит на дне, его верх на глубине h. Сила Архимеда кубика $\rho g a^3$ вверх; снизу на площадь a^2 на глубине $h + a$ жидкость не давит. Сила от воды $\rho g a^3 - \rho g (h + a) a^2 = -\rho g h a^2$ — вниз: вода прижимает кубик ко дну.

Частые ошибки

Частая ошибка

Ставить в $\rho g V$ плотность тела или объём всего тела, когда погружена только часть. Нужны плотность *жидкости* и объём *погружённой* части.

Частая ошибка

Забыть силу Архимеда для тела на дне: реакция дна $N = mg - F_A$, а не mg. И наоборот — писать F_A вверх для тела, плотно прижатого ко дну.

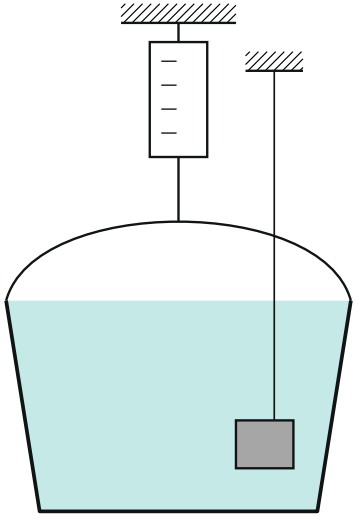
Частая ошибка

Считать, что тело на нити, опущенное в сосуд, «ничего не весит» для весов под сосудом. По третьему закону Ньютона оно давит на жидкость силой F_A, и весы это чувствуют.

Разобранные примеры

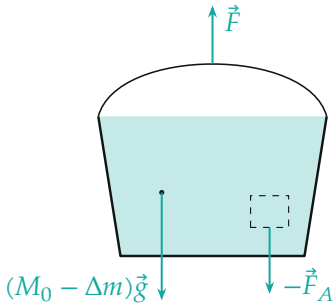
Пример 1. [Курчатов 2015/16, заключительный этап, 8 кл.] На крючке ручных пружин-

ных весов висит ведро с водой. Весы показывают 9,5 кг. В воду полностью погрузили кирпич массой 2,5 кг с размерами 5 × 10 × 20 см, удерживая его на тонкой верёвочке. Кирпич стенок и дна ведра не касается. Теперь весы показывают 10 кг. Найдите массу воды, вылившейся из ведра. Плотность воды 1000 кг/м^3.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Кирпич висит на верёвке, ведро на весах. Вода выталкивает кирпич силой F_A — а кирпич по третьему закону Ньютона давит на воду вниз той же силой, и весы это чувствуют. Часть воды вылилась, и весы её уже не чувствуют. Нужна сила Архимеда, а масса кирпича не понадобится (метод 2). Весы проградуированы в килограммах: показание 10 кг означает силу 10 кг $\cdot\, g$.

Система и силы. Возьмём систему «ведро + оставшаяся вода» без кирпича. $M_0 = 9{,}5$ кг — масса ведра с водой вначале, Δm — масса вылившейся воды. На систему действуют сила весов $\vec{F}$ вверх, сила тяжести $(M_0 - \Delta m)\vec{g}$ и сила $-\vec{F}_A$ от кирпича вниз.



Силы на систему «ведро + вода»; кирпич в неё не входит (пунктир).

1. Сила Архимеда. Кирпич погружён целиком, $V = 5 \cdot 10 \cdot 20\,\text{см}^3 = 10^{-3}\,\text{м}^3$, и $F_A = \rho g V$ — как вес 1 кг воды.

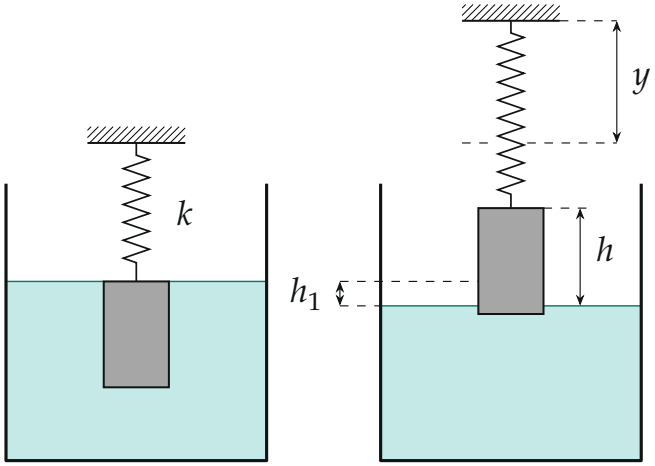
2. Равновесие системы. Вначале $F_0 = M_0 g$. В конце второй закон Ньютона в проекции на вертикаль: $F - (M_0 - \Delta m)g - F_A = 0$, откуда

$$\Delta m = M_0 + \rho V - \frac{F}{g} = 9{,}5 + 1 - 10 = 0{,}5\,\text{кг}.$$

Проверка. Второй способ — система «ведро + вода + кирпич». Внешние силы: F и натяжение $T = mg - F_A$ вверх, тяжесть $(M_0 - \Delta m + m)g$ вниз. Масса кирпича m сокращается, и выходит то же уравнение. Если бы вода не выливалась, весы показали бы 10,5 кг: вылилась половина вытесненной воды.

Ответ. $\Delta m = 0{,}5$ кг.

Пример 2. [Курчатов 2014/15, заключительный этап, 7 кл.] В цилиндрический сосуд с водой опущен металлический цилиндр, подвешенный на пружине жёсткостью $k = 10\,\text{Н/м}$. Уровень воды в сосуде совпадает с верхней поверхностью цилиндра. После того как точку подвеса пружины подняли вверх на $y = 5$ см, удлинение пружины увеличилось на $x = 2$ см, а верхняя поверхность цилиндра оказалась на $h = 4$ см выше уровня воды (нижняя поверхность цилиндра всё ещё в воде). Чему равна площадь поперечного сечения сосуда? Плотность воды $\rho = 1{,}0\,\text{г/см}^3$, $g = 10\,\text{м/с}^2$.



Слева — было, справа — стало. Пунктиром — прежние уровень воды и точка подвеса.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Цилиндр потянули вверх, часть его вышла из воды — сила Архимеда уменьшилась, и пружина растянулась сильнее. А уровень воды опустился: цилиндр больше не занимает в воде прежнего места. Сначала из сил найдём сечение цилиндра, потом из объёма воды — сечение сосуда (метод 1).

Обозначения. S — сечение сосуда, S_1 — сечение цилиндра, h_1 — насколько опустился уровень воды.

1. Насколько опустился уровень. Сам цилиндр поднялся на $y - x = 3$ см: подвес ушёл вверх на 5 см, а пружина удлинилась на 2. Его верх был на прежнем уровне воды, а стал на $h = 4$ см выше нового. Значит, $h_1 = h - (y - x) = 1$ см.

2. Силы. Второй закон Ньютона для цилиндра в проекции на вертикаль в обоих состояниях: $k\Delta l + F_A - mg = 0$. Сила тяжести та же, поэтому прибавка упругой силы равна убыли силы Архимеда. Вначале цилиндр погружён целиком, в конце над водой его часть высоты h:

$$kx = \rho g S_1 h \;\Rightarrow\; S_1 = \frac{kx}{\rho g h} = \frac{10 \cdot 0{,}02}{10^3 \cdot 10 \cdot 0{,}04}\ \text{м}^2 = 5\ \text{см}^2.$$

3. Объём воды. Вода никуда не делась: под уровнем воды стало меньше на объём вышедшей из воды части цилиндра $S_1 h$, и уровень по всему

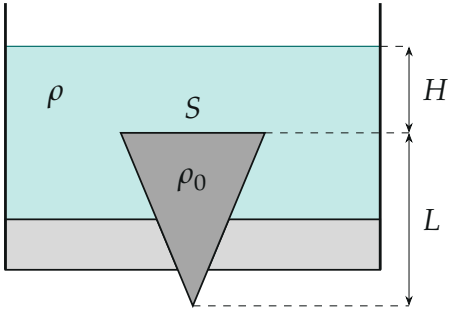
сечению опустился на h_1:

$$Sh_1 = S_1 h \;\Rightarrow\; S = S_1 \frac{h}{h_1} = 4S_1 = 20\,\text{см}^2.$$

Проверка. Размерность: Н/м · м/(кг/м^3 · м/с^2 · м) = м^2. Предел: в очень широком сосуде $h_1 \to 0$ — уровень не меняется, и $S \to \infty$, как и должно быть. Цилиндр сечением 5 см^2 в сосуде вчетверо шире: вышел на 4 см — уровень упал на 1 см.

Ответ. $S = \dfrac{kx}{\rho g\,(h - y + x)} = 20\,\text{см}^2.$

Пример 3. [ВсОШ 2003/04, окружной этап, 9 кл.] В дне сосуда имеется сужающееся книзу отверстие, плотно закрытое конической пробкой. Площадь основания пробки S, высота L. Уровень дна сосуда пересекает конус на половине его высоты. Плотности пробки и жидкости ρ_0 и ρ. Какой должна быть высота уровня жидкости $H > 0$ над основанием конуса, чтобы пробка не всплывала? Какую минимальную внешнюю силу F, направленную вверх, нужно в этом случае приложить к пробке, чтобы её вытащить? Объём конуса $V = LS/3$.



▲ **Решение. Что происходит.** Жидкость омывает только верхнюю половину пробки: основание и верхнюю часть боковой поверхности. Снизу, где пробка сидит в отверстии, жидкости нет — формула $\rho g V$ не годится, считаем методом 3. Атмосферное давление, как и в ответе авторов, не учитываем: оно давит и на жидкость сверху, и на пробку снизу. Стенки

отверстия держат пробку снизу, а вверх не тянут, поэтому пробка всплывёт, если сила давления жидкости вверх больше силы тяжести пробки.

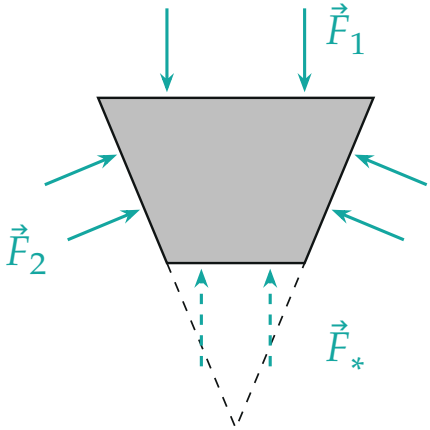
1. Сила давления жидкости. Верхняя половина пробки — усечённый конус. Нижняя половина — конус высоты $L/2$: он подобен всей пробке с коэффициентом $\frac{1}{2}$, его объём в 8 раз меньше, а сечение на уровне дна $S/4$. Поэтому

$$V_{\text{ус}} = \frac{LS}{3} - \frac{1}{8}\cdot\frac{LS}{3} = \frac{7LS}{24}.$$

Закроем усечённый конус сечением на уровне дна. Если бы жидкость давила и снизу на это сечение (на глубине $H + L/2$), на усечённый конус действовала бы сила Архимеда $\rho g V_{\text{ус}}$ вверх. На деле этой силы снизу нет, её вычитаем:

$$F_{\text{ж}} = \rho g\frac{7LS}{24} - \rho g\Big(H + \frac{L}{2}\Big)\frac{S}{4} = \rho g S\Big(\frac{L}{6} - \frac{H}{4}\Big).$$

Проекция на ось вверх; при $H > 2L/3$ она отрицательна — жидкость прижимает пробку.



Жидкость давит на основание ($\vec{F}_1$) и на боковую поверхность верхней половины ($\vec{F}_2$). Силы $\vec{F}_*$ на сечение у дна на самом деле нет.

2. Условие «не всплывает». Второй закон Ньютона для пробки в покое: реакция стенок $N \geq 0$ направлена вверх, $N + F_{\text{ж}} - mg = 0$ с

$mg = \rho_0 g SL/3$. Значит, нужно $F_ж \le mg$:

$$\rho\Big(\frac{L}{6} - \frac{H}{4}\Big) \le \rho_0 \frac{L}{3} \;\Rightarrow\; H \ge \frac{2}{3}L\Big(1 - \frac{2\rho_0}{\rho}\Big).$$

Если $\rho_0 \ge \rho/2$, правая часть не больше нуля — пробка не всплывает ни при каком уровне.

3. Сила, чтобы вытащить. Тянем вверх силой F; пробка сдвинется, когда реакция стенок обратится в ноль: $F + F_ж - mg = 0$,

$$F = \rho_0 g S\frac{L}{3} - \rho g S\Big(\frac{L}{6} - \frac{H}{4}\Big).$$

Проверка. Размерность: кг/м^3 · м/с^2 · м^2 · м = Н. Знак: на границе всплытия $F = 0$ — пробка уже готова выйти сама. При $H \to \infty$ сила растёт как $\rho g S H/4$: чем глубже, тем сильнее вода прижимает пробку. Получается, вода, которая не подтекает под тело, может не выталкивать, а держать его.

Ответ. Пробка не всплывает при $H \ge \frac{2}{3}L\Big(1 - \frac{2\rho_0}{\rho}\Big)$, если $\rho_0 < \rho/2$, и при любом H, если $\rho_0 \ge \rho/2$. Вытащить её можно силой

$$F = \rho_0 g S\frac{L}{3} - \rho g S\Big(\frac{L}{6} - \frac{H}{4}\Big).$$

Как решать листок

Сложность 1–3 («вес в воде», «найдите силу Архимеда», плотность по взвешиванию) — закон Архимеда и метод 1. Сосуды на весах, «как изменится давление на дно», вылившаяся вода — метод 2. Пробки, тела на дне, «жидкость не подтекает» — метод 3. Если меняется уровень воды, добавляйте сохранение объёма жидкости.