Давление жидкости

После пособия вы сможете

- находить давление в любой точке покоящейся жидкости, спускаясь и поднимаясь от точки, где давление известно;
- сравнивать давления на одном уровне в сообщающихся сосудах и U-трубке, в том числе с несколькими жидкостями;
- находить силу давления жидкости на дно и на вертикальную стенку сосуда;
- находить силу давления на пробку, крышку, перевёрнутый сосуд и понимать, когда атмосферное давление сокращается.

Теория кратко

Определение 1

Давление — отношение силы, равномерно распределённой по площадке и перпендикулярной ей, к площади площадки: $p = F/S$. Если сила наклонена, берут её составляющую по нормали. Давление — скаляр; единица — паскаль, $1\,\text{Па} = 1\,\text{Н/м}^2$. Атмосферное давление $p_0 \approx 10^5\,\text{Па}$.

Твёрдое тело передаёт давление только туда, куда на него давят. Жидкость и газ передают его во все стороны (закон Паскаля): молекулы бьют по стенке с любой стороны.

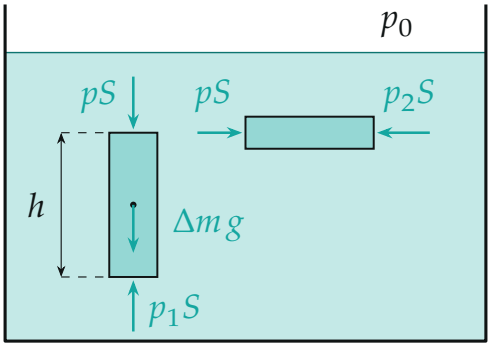
Факт 1

В малом объёме жидкости давление одно и то же. Поэтому на площадку площади S в жидкости, как её ни поверни, действует сила pS, перпендикулярная площадке.

Как меняется давление с глубиной, выведем «столбиками». Пусть в точке на какой-то глубине давление p. Выделим вертикальный столбик сечения S и высоты h под ней. На него действуют pS сверху, $p_1 S$ снизу, сила тяжести $\Delta m\, g$; боковые силы горизонтальны и друг друга гасят. Жидкость покоится, второй закон Ньютона в проекции на вертикаль:

$$p_1 S - pS - \Delta m\, g = 0, \qquad \Delta m = \rho h S \;\Rightarrow\; p_1 = p + \rho g h.$$

Для горизонтального столбика по горизонтали действуют только pS и p_2S, поэтому $p_2 = p$.



Вертикальный столбик даёт $p_1 = p + \rho gh$, горизонтальный — $p_2 = p$.

Факт 2

В покоящейся жидкости идём вниз на h — прибавляем ρgh, вверх — вычитаем. На одной горизонтали в одной и той же жидкости, соединённой без перегородок, давление одинаково. У открытой поверхности давление равно p_0, поэтому на глубине h

$$p = p_0 + \rho gh.$$

Атмосферное давление — то же самое для столба воздуха: на верхней границе атмосферы давления нет, а весь столб высотой в десятки километров даёт у Земли $p_0 \approx 10^5$ Па.

Методы

Метод 1

Давление на уровне. Когда применять: сообщающиеся сосуды, U-трубка, «какие уровни установятся», несколько несмешивающихся жидкостей, сифон.

1. Найдите точки, где давление известно: открытая поверхность — p_0.
2. Выберите горизонтальный уровень, ниже которого во всех коленах одна и та же жидкость. Обычно это граница двух жидкостей

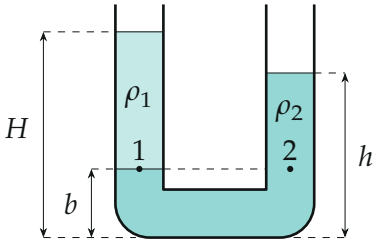
в одном из колен.

3. Распишите давление на этом уровне в каждом колене, спускаясь от поверхности слой за слоем: $p_0 + \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 + \ldots$
4. Приравняйте. Не хватает уравнения — добавьте сохранение объёма: сколько жидкости ушло из одного колена, столько пришло в другое.

Пример. В U-трубке вода ρ_2 и неизвестная жидкость ρ_1. От основания: граница жидкостей слева $b = 10$ см, верх жидкости слева $H = 30$ см, верх воды справа $h = 24$ см. Уровень — граница слева, точки 1 и 2: ниже неё всюду вода.

$$p_0 + \rho_1 g(H - b) = p_0 + \rho_2 g(h - b) \;\Rightarrow\; \rho_1 = \rho_2 \frac{h - b}{H - b} = 700\,\text{кг/м}^3.$$

Атмосферное давление и g сократились.



Точки 1 и 2 — на одном уровне в одной жидкости (вода), поэтому $p_1 = p_2$.

Метод 2

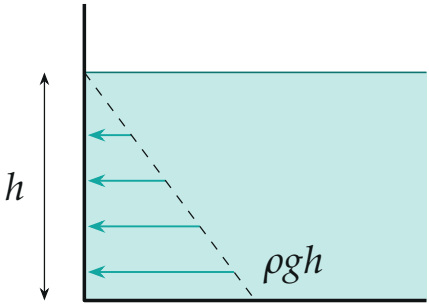
Сила давления на дно и на стенку. Когда применять: «сила давления на дно», «на боковую стенку», аквариум, плотина, бак.

1. Дно горизонтально — давление на нём всюду одно: $F = pS$. Сила давления воды на дно $F = \rho g h S$ не зависит от формы сосуда, только от глубины и площади дна.
2. На вертикальной стенке давление растёт с глубиной от 0 (избыточное, у поверхности) до $\rho g h$ (у дна) линейно. Разобьём стенку на узкие горизонтальные полоски: полоски на глубинах y и $h - y$ вместе дают столько же, сколько две полоски с давлением $\rho g h/2$. Значит, сила равна *среднему* давлению, умноженному на

смоченную площадь:

$$F_{\text{ст}} = \frac{\rho g h}{2} \cdot bh.$$

3. Атмосфера давит и изнутри, и снаружи — на стенку и дно она силы не добавляет. Если в задаче нужна сила только со стороны жидкости, её не учитывают.



Силы давления на полоски стенки растут с глубиной линейно; в среднем давление $\rho g h/2$.

Метод 3

Силы давления на тело, которое закрывает отверстие. Когда применять: пробка, крышка, поршень, перевёрнутый сосуд, тело плотно прижато ко дну — «при каком уровне вода начнёт вытекать», «какую силу надо приложить».

1. Нарисуйте тело отдельно и все силы на него: тяжесть, силы давления на каждую грань, реакцию опоры.
2. Давление на грань: со стороны жидкости $p_0 + \rho g h$, со стороны воздуха p_0. Считайте только ту площадь, которая на самом деле смочена: где вместо жидкости опора или дырка — давления жидкости нет.
3. Атмосферное давление сокращается, только если оно давит на тело со всех сторон. Проверьте это, а не отбрасывайте по привычке.
4. Граница «вот-вот сдвинется, оторвётся, потечёт» — реакция

опоры обращается в ноль: $N = 0$.

Частые ошибки

Частая ошибка

Приравнивать давления в точках одного уровня, между которыми другая жидкость или перегородка. В U-трубке с маслом и водой на одном уровне в разных коленах давления равны, только если ниже этого уровня везде одна и та же жидкость.

Частая ошибка

Считать силу на боковую стенку как $\rho g h \cdot S$ по давлению у дна. Давление на стенке меняется от поверхности до дна, нужно среднее $\rho g h/2$ — сила вдвое меньше.

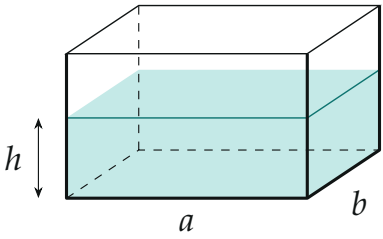
Частая ошибка

Брать глубину не по вертикали: вдоль наклонной трубки или от дна, а не от поверхности. В $\rho g h$ стоит разность высот двух точек, а форма и наклон сосуда роли не играют.

Разобранные примеры

Пример 1. [Росатом 2025/26, отборочный этап, 9 кл.] В прямоугольный аквариум налито некоторое количество воды. Сила давления воды на дно аквариума $F_1 = 60$ Н, на меньшую из боковых стенок, длина которой $b = 20$ см, — $F_2 = 10$ Н. Найдите силу давления воды на большую из боковых стенок. Плотность воды $\rho = 1\,\text{г/см}^3$, $g = 10\,\text{м/с}^2$. Атмосферным давлением пренебречь.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Вода давит на дно с постоянным давлением, на стенки — с давлением, растущим от нуля у поверхности. Все три силы выражаются через высоту воды h и стороны дна a и b (метод 2). Две силы известны — найдём из них h и a.



1. Три силы. На дно давление всюду ρgh, на стенки — в среднем $\rho gh/2$:

$$F_1 = \rho gh\,ab, \qquad F_2 = \frac{\rho gh}{2}\,bh, \qquad F_3 = \frac{\rho gh}{2}\,ah.$$

2. Что от нас хотят. Сразу видно, что $F_3/F_2 = a/b$, то есть нужна только длина a. Делим первую силу на вторую: $F_1/F_2 = 2a/h$, а из второй силы

$$h = \sqrt{\frac{2F_2}{\rho gb}} = \sqrt{\frac{2\cdot 10}{10^3\cdot 10\cdot 0{,}2}}\ \text{м} = 0{,}1\ \text{м}.$$

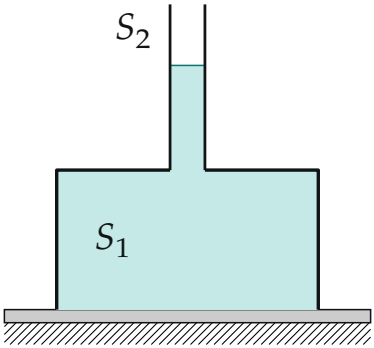
Тогда $a = \dfrac{F_1 h}{2F_2} = 0{,}3$ м и

$$F_3 = F_2\frac{a}{b} = \frac{F_1}{2b}\sqrt{\frac{2F_2}{\rho gb}} = 15\ \text{Н}.$$

Проверка. Размерность: $\sqrt{\text{Н}/(\text{кг}/\text{м}^3\cdot\text{м}/\text{с}^2\cdot\text{м})} = $ м, высота — в метрах. Числа: $F_1 = 10^4\cdot 0{,}1\cdot 0{,}3\cdot 0{,}2 = 60$ Н, верно. Большая стенка шире — и сила на неё больше, чем на малую.

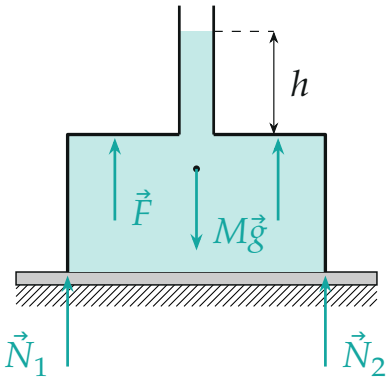
Ответ. $F_3 = \dfrac{F_1}{2b}\sqrt{\dfrac{2F_2}{\rho gb}} = 15$ Н.

Пример 2. [Всесоюзная 1977/78, заключительный этап, 9 кл.] В дне цилиндрической кастрюли площади S_1 просверлили дырку площади S_2 и вставили в неё пластмассовую трубку. Масса кастрюли с трубкой равна M. Кастрюля стоит на ровном листе резины дном вверх. Сверху в трубку осторожно наливают воду. До какого уровня можно налить воду, чтобы она не вытекала снизу?



▲ **Решение. Что происходит.** Вода заполняет перевёрнутую кастрюлю и поднимается в трубке. Изнутри она давит на дно вверх и стремится приподнять кастрюлю. Пока кастрюля прижата к резине, вода не вытекает; потечёт, когда сила давления воды сравняется с силой тяжести кастрюли (метод 3).

Обозначения. h — высота уровня воды в трубке над дном кастрюли, ρ — плотность воды, p_0 — атмосферное давление. Систему берём «кастрюля с трубкой» без воды.



Силы на кастрюлю с трубкой: сила давления воды на дно действует по всей площади $S_1 - S_2$.

1. Давление на дно. Изнутри, на уровне дна, вода на h ниже своей поверхности в трубке: $p = p_0 + \rho g h$. Снаружи на дно сверху давит воздух, p_0. Атмосфера давит на дно с двух сторон и сокращается, остаётся $\rho g h$.

2. Сила давления на кастрюлю. Дно — это кольцо площади $S_1 - S_2$: на месте дырки вода давит не на кастрюлю, а на воду в трубке. Стенки кастрюли и трубки вертикальны и вертикальной силы не дают. Поэтому вверх действует

$$F = \rho g h\,(S_1 - S_2).$$

3. Равновесие кастрюли. Второй закон Ньютона в проекции на вертикаль: $N_1 + N_2 + F - Mg = 0$. Резина может только толкать: $N_1 + N_2 = Mg - F \geq 0$. Граница — реакция обращается в ноль, $F = Mg$:

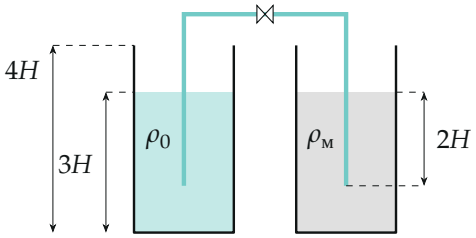
$$\rho g h\,(S_1 - S_2) = Mg \;\Rightarrow\; h = \frac{M}{\rho\,(S_1 - S_2)}.$$

Выше этого уровня кастрюлю приподнимет, и вода потечёт из-под края.

Проверка. Размерность: кг/(кг/м^3 · м^2) = м. Предел $S_2 \to S_1$: дна почти нет, давить не на что, $h \to \infty$ — верно. Числа: $M = 1$ кг, $S_1 = 100\,\text{см}^2$, $S_2 = 5\,\text{см}^2$ дают $h \approx 10{,}5$ см. Обратите внимание: вес воды в трубке тут ни при чём — важна только высота столба.

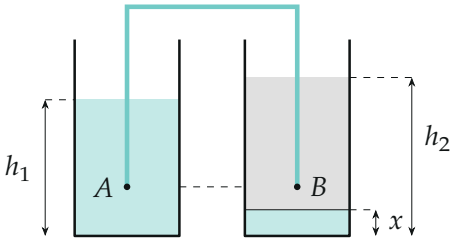
Ответ. До высоты $h = \dfrac{M}{\rho\,(S_1 - S_2)}$ над дном кастрюли (если трубка достаточно длинная).

Пример 3. [ВсОШ 2008/09, региональный этап, 9 кл.] Два одинаковых стакана высотой $4H$ заполнены до уровня $3H$ водой и маслом соответственно. Плотность воды $\rho_0 = 10^3$ кг/м^3, масла $\rho_\text{м} = 0{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3. Сверху стаканы соединены заполненной водой тонкой трубочкой с краном. Открытые концы трубки погружены на $2H$ в каждую из жидкостей. Какие уровни установятся в стаканах, если кран открыть?



▲ **Решение. Что происходит.** Концы трубки на одной высоте H над дном. Сейчас над левым концом $2H$ воды, над правым — $2H$ более лёгкого масла: давление у левого конца больше, и вода потечёт по трубке в стакан с маслом. Там она опустится на дно под масло. Течение прекратится, когда давления у концов трубки сравняются (метод 1).

Обозначения. h_1 — уровень воды в левом стакане, x — толщина слоя воды на дне правого стакана, h_2 — уровень масла в нём; A и B — концы трубки. Трубка тонкая, воды в ней мало.



Равновесие: давления у концов трубки A и B одинаковы.

1. Почему приравниваем давления у концов. Вода в трубке покоится и соединена без перерыва, концы A и B на одной высоте — значит, $p_A = p_B$. Это и есть «давление на уровне», только горизонтальный путь между точками идёт по воде в трубке.

2. Давления. Спускаемся от поверхностей. Над A вода высотой $h_1 - H$; над B, пока слой воды $x < H$, только масло высотой $h_2 - H$:

$$p_0 + \rho_0 g(h_1 - H) = p_0 + \rho_м g(h_2 - H).$$

3. Сохранение объёма. Стаканы одинаковые: сколько воды ушло слева, столько пришло вправо, $h_1 = 3H - x$; масло просто поднялось на x, $h_2 = 3H + x$. Подставляем:

$$\rho_0(2H - x) = \rho_м(2H + x) \;\Rightarrow\; x = 2H\,\frac{\rho_0 - \rho_м}{\rho_0 + \rho_м} = \frac{2H}{9}.$$

Отсюда $h_1 = 3H - \dfrac{2H}{9} = \dfrac{25}{9}H$, $h_2 = \dfrac{29}{9}H$.

Проверка. Предположение $x < H$ верно: $2H/9 < H$; масло не переливается: $29H/9 < 4H$. Предел $\rho_м = \rho_0$: $x = 0$, ничего не течёт — верно. Вода перетекает, пока лишний столб масла не уравновесит более короткий столб воды.

Ответ. Уровень воды в первом стакане $h_1 = \dfrac{25}{9}H$, уровень масла во втором $h_2 = \dfrac{29}{9}H$ (под маслом слой воды $\dfrac{2}{9}H$).

Как решать листок

Сложность 1–3 («давление на глубине», «сила давления на дно») — формула $p = p_0 + \rho g h$ и метод 2. U-трубки, сообщающиеся сосуды, несколько жидкостей — метод 1, и не забывайте сохранение объёма. Пробки, крышки, поршни, «когда потечёт» — метод 3: силы на тело отдельно и смоченная площадь.