Плавание тел, устойчивость плавания

После пособия вы сможете

- находить осадку тела и долю погружённого объёма из условия плавания;
- находить, как меняется уровень воды, когда тает лёд, тонет груз или тело кладут в лодку;
- решать задачи о плавании в двух жидкостях и о плавающих стаканах через давление на уровне дна;
- объяснять качественно, почему одни плавающие тела устойчивы, а другие переворачиваются.

Теория кратко

Тело плавает, если покоится на поверхности жидкости или внутри неё и не касается дна. Тогда на него действуют только сила тяжести и сила Архимеда (или ещё нить, груз — их рисуем отдельно).

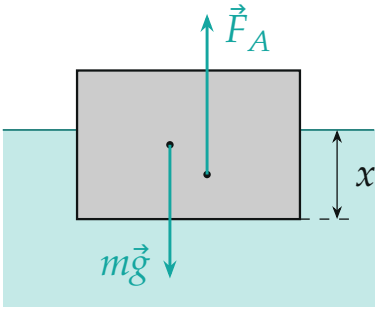
Факт 1

Условие плавания: $mg = \rho_ж g V_{погр}$ — масса вытесненной жидкости равна массе тела. Для однородного тела доля погружённого объёма

$$\frac{V_{погр}}{V} = \frac{\rho_т}{\rho_ж}.$$

Тело плавает, если его *средняя* плотность m/V меньше плотности жидкости (или равна ей), и тонет, если больше. Стальной корабль плавает: вместе с воздухом внутри его средняя плотность меньше плотности воды.

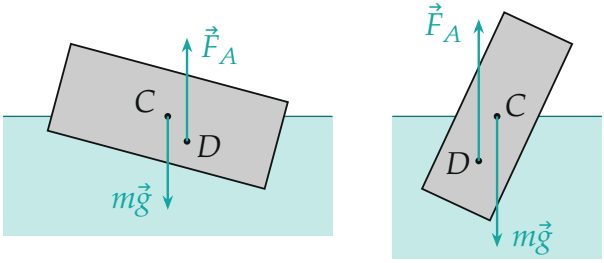
Лёд плотностью $0{,}9$ г/см^3 в воде погружён на $9/10$ объёма, над водой — десятая часть. У айсберга над водой видна лишь «верхушка».



Сила тяжести приложена в центре тяжести тела, сила Архимеда — в центре тяжести погружённой части; x — осадка.

Устойчивость — качественно. Обозначим C — центр тяжести тела, D — центр тяжести вытесненной жидкости, где приложена сила Архимеда. В равновесии они на одной вертикали. Наклоним тело. Если силы $m\vec{g}$ и $\vec{F}_A$ поворачивают его обратно — плавание устойчиво, если дальше — тело перевернётся.

- Тело целиком под водой (подводная лодка, аэростат в воздухе): при наклоне D не смещается относительно тела. Устойчиво, только если C ниже D — поэтому балласт кладут вниз.
- Тело на поверхности: при наклоне погружённая часть меняет форму, и D смещается в сторону опустившегося края. У широкого тела (плот, лодка) он смещается сильно, и плавание устойчиво, даже если C выше D. У узкого высокого тела (бревно стоймя, карандаш) — слабо, и оно ложится набок.



Наклон на 15° и 25°, тела вдвое легче воды. Слева широкое тело: D ушёл к опустившемуся краю, силы выпрямляют. Справа узкое: силы наклоняют дальше.

Методы

Метод 1

Условие плавания и осадка. Когда применять: «плавает», «погружено на долю объёма», «осадка», «какой груз выдержит плот», «надводная часть уменьшилась».

1. Выберите систему: тело или тело вместе с грузом, человеком, содержимым. Силы на систему — общая тяжесть и сила Архимеда (плюс нить, если есть).
2. Запишите $m_{\text{сист}}g = \rho_{\text{ж}} g V_{\text{погр}}$. Для бруска или цилиндра с вертикальными стенками $V_{\text{погр}} = Sx$, x — осадка.
3. Если что-то добавили, пишите условие для обоих состояний и вычитайте: добавочная масса Δm увеличивает погружённый объём на $\Delta m/\rho_{\text{ж}}$, а осадку на $\Delta m/(\rho_{\text{ж}} S)$.

Метод 2

Уровень воды: объём под уровнем. Когда применять: «лёд растаял», «камень из лодки бросили в воду», «как изменится уровень».

1. Уровень в сосуде определяется объёмом всего, что ниже уровня: воды и погружённых частей тел.
2. Посчитайте этот объём до и после. Плавающее тело массы m занимает под уровнем $m/\rho_{\text{в}}$ (условие плавания), утонувшее — свой объём $m/\rho_{\text{т}}$, растаявший лёд — $m/\rho_{\text{в}}$.
3. Изменение уровня $\Delta h = \Delta V/S$, где S — сечение сосуда.

Пример. Чистый лёд массы m плавает — занимает под уровнем $m/\rho_{\text{в}}$; растаял — его вода занимает те же $m/\rho_{\text{в}}$: уровень не меняется. Камень в лодке занимает $m/\rho_{\text{в}}$, а на дне — $m/\rho_{\text{к}}$, меньше: если камень выбросить за борт, уровень опустится.

Метод 3

Две жидкости и давление на уровне дна. Когда применять: тело на границе двух жидкостей, слой масла или нефти над водой, плавающий стакан, ареометр.

1. Тело на границе: сила Архимеда — сумма по жидкостям, $F_A =$

$g(\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2)$. Верхняя жидкость тоже выталкивает — её не выбрасываем.

2. У тела с плоским горизонтальным дном (стакан, брусок) удобнее посчитать давление на уровне дна снаружи, спускаясь от поверхности: $p = \rho_1 g d_1 + \rho_2 g d_2$. Сила давления на дно pS — это и есть сила Архимеда.
3. Равновесие: pS равно силе тяжести стакана вместе с его содержимым.

Частые ошибки

Частая ошибка

Путать долю объёма и долю высоты. У бруска они совпадают, а у шара, конуса, лодки — нет: в условие плавания входит именно объём погружённой части.

Частая ошибка

Забывать верхнюю жидкость. Шайба на границе воды и бензина: бензин тоже давит и выталкивает, $F_A = g(\rho_б V_б + \rho_в V_в)$, а не только $\rho_в g V_в$.

Частая ошибка

«Лёд легче воды — растает, и уровень поднимется». Для чистого льда в воде уровень не меняется; опустится он, если лёд плавает в жидкости легче воды (талая вода занимает $m/\rho_в$, меньше вытесненных $m/\rho_ж$) или во льду вмёрз камень, а поднимется — если лёд плавает в солёной воде.

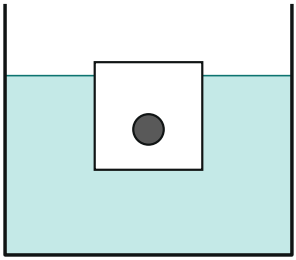
Частая ошибка

Считать, что плавание устойчиво, только если центр тяжести ниже точки приложения силы Архимеда. Это верно для тела целиком под водой; лодка с высоко сидящими людьми плавает устойчиво за счёт широкого корпуса.

Разобранные примеры

Пример 1. [Курчатов 2012/13, отборочный этап, 8 кл.] В цилиндрическом сосуде с пло-

щадью основания 10 см^2 плавает в воде кусочек льда, в который вмёрз стальной шарик. Масса шарика 2,0 г, плотность стали 7,8 г/см^3, плотность воды 1,0 г/см^3. На сколько миллиметров изменится уровень воды в сосуде после того, как лёд растает? Ответ округлите до десятых долей миллиметра.



▲ **Решение. Что происходит.** Пока лёд с шариком плавает, вода держит и лёд, и шарик. Растает — вода изо льда займёт ровно то место, что занимал лёд (пример к методу 2), а шарик утонет и займёт только свой объём, меньший, чем вытеснял на плаву. Уровень опустится. Считаем объём под уровнем до и после (метод 2).

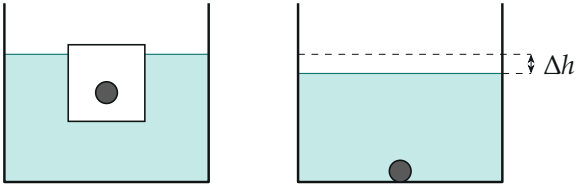
Обозначения. M — масса льда, $m = 2{,}0$ г — масса шарика, $\rho_в$ и $\rho_с$ — плотности воды и стали, $S = 10$ см^2, V_0 — объём воды в сосуде вначале.

1. До. Лёд с шариком плавает. Условие плавания для системы «лёд + шарик»: $(M + m)g = \rho_в g V_{погр}$. Под уровнем

$$V_1 = V_0 + \frac{M + m}{\rho_в}.$$

2. После. Лёд стал водой объёмом $M/\rho_в$, шарик лежит на дне и занимает $m/\rho_с$:

$$V_2 = V_0 + \frac{M}{\rho_в} + \frac{m}{\rho_с}.$$



Было и стало; изменение уровня на рисунке сильно увеличено.

3. Изменение уровня. Масса льда сокращается:

$$\Delta h = \frac{V_2 - V_1}{S} = \frac{m}{S}\left(\frac{1}{\rho_с} - \frac{1}{\rho_в}\right) = \frac{2{,}0}{10}\left(\frac{1}{7{,}8} - 1\right)\text{ см} \approx -0{,}17\text{ см}.$$

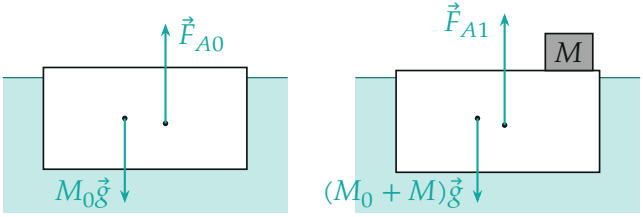
Проверка. Размерность: $\text{г}/(\text{см}^2 \cdot \text{г}/\text{см}^3) = \text{см}$. Предел $\rho_с \to \rho_в$: шарик «как вода», $\Delta h \to 0$ — верно. Знак минус: уровень упал, потому что на плаву шарик вытеснял $2\,\text{см}^3$ воды, а на дне — только свои $0{,}26\,\text{см}^3$.

Ответ. Уровень опустится на $\dfrac{m}{S}\left(\dfrac{1}{\rho_в} - \dfrac{1}{\rho_с}\right) \approx 1{,}7$ мм.

Пример 2. [МОШ 2011/12, заключительный этап, 9 кл.] Когда на льдину поставили груз массой $M = 90$ кг, объём её надводной части уменьшился на 30 %. Потом на льдину вышел школьник Антон, и объём надводной части уменьшился ещё на 30 %. Найдите массу Антона и массу льдины. Отношение плотностей льда и воды $\rho_л : \rho_в = 0{,}9$.

▲ **Решение. Что происходит.** Каждый новый груз притапливает льдину: погружённый объём растёт ровно на массу груза, делённую на $\rho_в$, а надводная часть на столько же уменьшается (метод 1). «Ещё на 30 %» — от надводной части после груза, так понимает это и ответ авторов.

Обозначения. V — объём льдины, $M_0 = \rho_л V$ — её масса, V_0, V_1, V_2 — объём надводной части без груза, с грузом, с грузом и Антоном, m — масса Антона.



Льдина без груза и система «льдина + груз»; толщина надводной части увеличена.

1. Льдина без груза. Условие плавания $\rho_л V g = \rho_в g(V - V_0)$ даёт $V_0 = V(1 - \frac{\rho_л}{\rho_в}) = 0{,}1V$.

2. С грузом. Условие плавания для системы «льдина + груз»: $(M_0 + M)g = \rho_в g(V - V_1)$. Вычитаем первое состояние — погружённый объём вырос на $M/\rho_в$:

$$\frac{M}{\rho_в} = V_0 - V_1 = 0{,}3V_0 = 0{,}03V \;\Rightarrow\; \rho_в V = \frac{M}{0{,}03} = 3000\,\text{кг}.$$

Отсюда масса льдины $M_0 = \rho_л V = 0{,}9 \cdot 3000 = 2700$ кг.

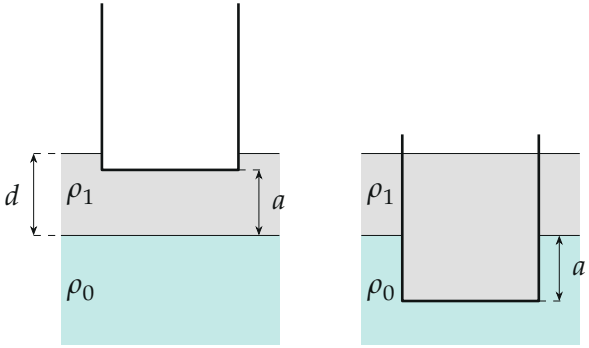
3. С Антоном. Так же $\dfrac{m}{\rho_в} = V_1 - V_2 = 0{,}3V_1 = 0{,}3 \cdot 0{,}7V_0$. Делим на равенство из пункта 2:

$$\frac{m}{M} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}7V_0}{0{,}3V_0} = 0{,}7 \;\Rightarrow\; m = 63\,\text{кг}.$$

Проверка. Отношения масс безразмерны, ответ в килограммах. Над водой у льдины без груза $0{,}1V$, то есть 300 кг «запаса»: груз и Антон вместе притопили 153 кг из них, льдина ещё держит. Антон легче груза: вторые 30 % отсчитаны от уже меньшей надводной части.

Ответ. Масса Антона $m = 0{,}7M = 63$ кг, масса льдины $M_0 = 30M = 2700$ кг.

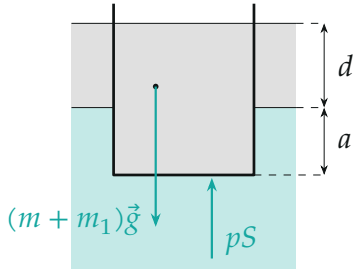
Пример 3. [ВсОШ 2009/10, заключительный этап, 9 кл.] В сильно загрязнённом водоёме толщина слоя нефти на поверхности воды $d = 1{,}0$ см. На поверхность пустили плавать лёгкий цилиндрический стаканчик массой $m = 4{,}0$ г с площадью дна $S = 25\,\text{см}^2$. Стакан был сначала пустым, а его дно было выше середины слоя нефти. Затем в него долили нефти так, чтобы её уровни в стакане и снаружи сравнялись. В обоих случаях дно находилось на одном и том же расстоянии a от уровня воды. Определите плотность нефти ρ_1, если плотность воды $\rho_0 = 1{,}0\,\text{г/см}^3$.



▲ **Решение.** **Что происходит.** В первом случае пустой стакан плавает в слое нефти, и его дно на высоте a над водой. Когда в стакан налили нефть, он стал тяжелее и опустился, дно ушло в воду на глубину a. Дно у стакана плоское — силу Архимеда считаем как силу давления на дно, спускаясь от поверхности (метод 3). Стенки тонкие, их объёмом пренебрегаем.

1. Пустой стакан. Дно на глубине $d-a$ под поверхностью нефти, давление там $\rho_1 g(d-a)$ (избыточное: атмосфера давит и на стакан сверху). Равновесие стакана:

$$mg = \rho_1 g(d-a)S \;\Rightarrow\; \frac{m}{S} = \rho_1(d-a).$$



Второй случай: стакан с нефтью; снизу на дно давят нефть и вода.

2. Стакан с нефтью. Давление на уровне дна снаружи: спускаемся через слой нефти d и воды a, $p = \rho_1 g d + \rho_0 g a$. Внутри нефть от дна до

поверхности, высота $d+a$, масса $m_1=\rho_1 S(d+a)$. Равновесие стакана с нефтью:

$$mg+\rho_1 gS(d+a)=(\rho_1 d+\rho_0 a)gS \;\Rightarrow\; \frac{m}{S}=(\rho_0-\rho_1)a.$$

3. Неизвестные. Два уравнения, неизвестные ρ_1 и a. Приравниваем правые части: $\rho_1(d-a)=(\rho_0-\rho_1)a$, откуда $\rho_1=\rho_0\dfrac{a}{d}$. Подставим в первое уравнение, $x=a/d$:

$$x(1-x)=\frac{m}{\rho_0 dS}=\frac{4{,}0}{1{,}0\cdot 1{,}0\cdot 25}=0{,}16 \;\Rightarrow\; x=0{,}5\pm 0{,}3.$$

Дно пустого стакана выше середины слоя нефти: $a>d/2$, $x=0{,}8$. Получаем $\rho_1=0{,}8\rho_0=0{,}8\,\text{г/см}^3$.

Проверка. Размерность: a/d безразмерно, ρ_1 — в г/см^3. Числа: $a=0{,}8$ см; пустой стакан сидит в нефти на 0,2 см, $\rho_1(d-a)S=0{,}8\cdot 0{,}2\cdot 25=4$ г — это его масса. Без условия «выше середины» ответов было бы два: и 0,8, и 0,2 г/см^3 — оно сказано не просто так.

Ответ. $\rho_1=\rho_0\dfrac{a}{d}=0{,}8\,\text{г/см}^3$.

Как решать листок

Сложность 1–3 («какая часть погружена», «осадка», «плотность по доле над водой») — условие плавания, метод 1. Лёд, камни в лодках, «как изменится уровень» — метод 2. Тело на границе жидкостей, стаканы, ареометры — метод 3. Вопросы про устойчивость решайте по рисунку: куда сместится D при наклоне.