Сила трения: покой и проскальзывание

После пособия вы сможете

- определять направление силы трения при скольжении и при покое;
- находить силу трения покоя из второго закона Ньютона и проверять предположение «проскальзывания нет» неравенством $F_{\text{тр}} \le \mu N$;
- находить наименьшую силу, коэффициент трения или угол через неравенство для всех случаев покоя;
- разбирать системы из нескольких тел по случаям от простого к сложному.

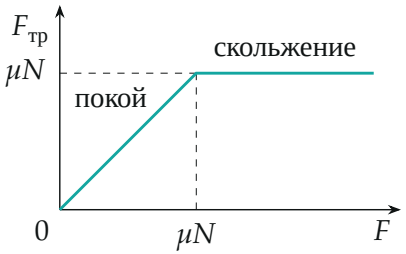
Теория кратко

Сухое трение — твёрдое тело о твёрдое тело, без смазки. Сила реакции опоры $\vec{Q} = \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}$: $\vec{N}$ — перпендикулярно поверхности, $\vec{F}_{\text{тр}}$ — вдоль неё. Поверхности друг по другу не скользят — *трение покоя*, скользят — *трение скольжения*.

Тянем шкаф массы m по горизонтальному полу горизонтальной силой F. Пока шкаф покоится, $a = 0$, и второй закон Ньютона в проекциях даёт

$$x:\ F - F_{\text{тр}} = 0 \ \Rightarrow\ F_{\text{тр}} = F, \qquad y:\ N - mg = 0.$$

Силу трения покоя мы нашли *из динамики*, а не по формуле. Растёт F — растёт и $F_{\text{тр}}$, но лишь до μN: дальше шкаф поедет, и сила трения постоянна.



Сила трения на шкаф в зависимости от силы F.

Факт 1

Закон сухого трения (Кулона — Амонтона).

- *Скольжение*. Значение всегда $F_{\text{тр}} = \mu N$. Направление — против $\vec{v}_{\text{отн}}$, скорости тела *относительно поверхности*, по которой оно скользит.
- *Покой*. Формулы для значения нет, есть только ограничение $0 \leq F_{\text{тр}} \leq \mu N$. Значение — из второго закона Ньютона, зная, что скольжения нет. Направление — против *возможной* относительной скорости или из динамики.

Коэффициент μ зависит от материалов и не зависит от площади соприкосновения. Если в задаче наибольшая сила трения покоя больше силы трения скольжения (эффект застоя), дают два коэффициента.

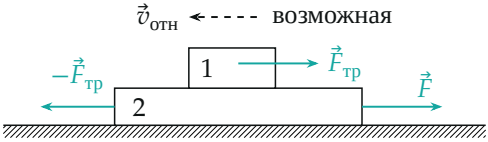
Методы

Метод 1

Направление силы трения. Когда применять: движутся оба тела — брусок на доске, монета на ленте транспортёра, груз в кузове.

1. Найдите скорость тела относительно поверхности, о которую оно трётся. Закон сложения скоростей: $\vec{v}_1 = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{v}_2$, то есть $\vec{v}_{\text{отн}} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$.
2. Тело скользит — трение против $\vec{v}_{\text{отн}}$, по модулю μN.
3. Тело не скользит — «по щелчку пальцев» уберите трение между телами и посмотрите, как они поедут. Трение покоя направлено против этой *возможной* относительной скорости. Второй способ — предположить направление и проецировать на ось вдоль него: проекция вышла отрицательной — трение смотрит наоборот, переписывать ничего не нужно.
4. На второе тело действует сила $-\vec{F}_{\text{тр}}$ (третий закон Ньютона).

Пример. Нижний брусок 2 тянут силой $\vec{F}$, верхний 1 едет вместе с ним. Уберём трение — нижний уедет вперёд, верхний останется. Возможная относительная скорость верхнего смотрит назад, значит, трение покоя на него — вперёд: оно его и разгоняет. На нижний — $-\vec{F}_{\text{тр}}$, назад.



Метод 2

Предположить покой и проверить. Когда применять: «сдвинется ли тело», «найдите силу трения», «с каким ускорением» — а хватит ли силы, чтобы сдвинуть, неизвестно. Ускорение $a = 0$ — тоже ответ.

1. Предположим, что проскальзывания нет: $\vec{a} = \vec{0}$ (или у тел общее ускорение).
2. Расставим все силы, запишем второй закон Ньютона векторно, потом в проекциях. Из него найдём $F_{тр}$ и N; N — тоже из законов, а не «$= mg$».
3. Проверим $F_{тр} \le \mu N$. Выполнено — покой, ответ найден.
4. Не выполнено — тело скользит: $F_{тр} = \mu N$ против $\vec{v}_{отн}$, ускорение — из того же второго закона Ньютона.

Пример. Брусок на наклонной плоскости с углом α. Предположим, что он покоится; ось x — вдоль склона вниз, y — по нормали:

$$x:\ mg\sin\alpha - F_{тр} = 0, \qquad y:\ N - mg\cos\alpha = 0.$$

Покой возможен, если $mg\sin\alpha \le \mu mg\cos\alpha$, то есть $\operatorname{tg}\alpha \le \mu$. Иначе брусок скользит, $F_{тр} = \mu mg\cos\alpha$ и $a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$.

Метод 3

Граница через неравенство. Когда применять: «при каком наименьшем коэффициенте трения», «с какой наименьшей силой», «под каким углом надо тянуть».

1. Возьмите произвольное значение искомой величины (μ, F, α) и предположите, что проскальзывания нет.
2. Методом 2 запишите условие покоя $F_{тр} \le \mu N$ — для каждого места, где может начаться скольжение.
3. Решите неравенства: получатся *все* значения, при которых ничего не скользит. Граница этого множества — ответ.

Сразу писать «на грани $F_{тр} = \mu N$» — натянуто за уши: легко взять не то место, где сорвётся первым.

Метод 4

Несколько тел: от простого к сложному. Когда применять: стопка брусков, доска с грузом, лист между телами, сила растёт со временем — и непонятно, кто относительно кого неподвижен.

1. Нигде не скользит: все тела — одно целое. Второй закон Ньютона для системы даёт общее ускорение; трение между телами — сила внутренняя и в него не входит.
2. Для каждого тела найдите нужную ему силу трения и проверьте $F_{тр} \leq \mu N$. Самое строгое условие показывает, где проскальзывание начнётся первым.
3. Там поставьте скольжение (μN против $\vec{v}_{отн}$), остальные тела снова считайте одним целым и проверяйте — и так, пока не скользит всё.
4. Скорости тел сравнялись — ситуация новая: снова предполагаем «едут вместе» и проверяем.

Частые ошибки

Частая ошибка

Писать $F_{тр} = \mu N$ для трения покоя. Оно принимает *любое* значение от 0 до μN. Тянем шкаф силой 10 Н при $\mu mg = 100$ Н: трение равно 10 Н, а не 100 — иначе шкаф поехал бы на нас.

Частая ошибка

Писать $N = mg$ «по умолчанию». Сила под углом прижимает тело или приподнимает его, на склоне $N = mg\cos\alpha$, на нижний брусок давит ещё и верхний. N — только из второго закона Ньютона; и проверяйте $N > 0$, иначе тело оторвалось от опоры.

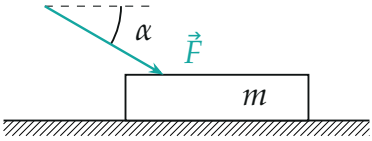
Частая ошибка

«Тело едет вправо — трение влево». Нет: против *относительной* скорости. Брусок на разгоняющейся доске трение тянет вперёд — оно его

и разгоняет.

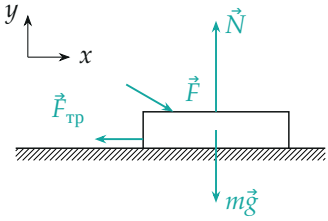
Разобранные примеры

Пример 1. [МОШ 2018/19, отборочный этап, 10 кл.] На горизонтальном столе лежит учебник массой $m = 200$ г. Коэффициент трения между учебником и столом $\mu = 0{,}4$. Учебник толкает лапой кошка, действуя на его верхнюю обложку силой $F = 1$ Н, направленной под углом $\alpha = 30°$ к горизонту (угол отсчитан вниз от горизонтальной линии). Сдвинется ли учебник с места?



▲ **Решение. Что происходит.** Хватит ли силы, чтобы сдвинуть учебник, заранее неизвестно. Предположим, что он покоится, и проверим (метод 2). Сила направлена вниз: она не только толкает учебник, но и прижимает его к столу. Возьмём $g = 10\,\text{м/с}^2$.

Силы и оси. На учебник действуют $m\vec{g}$, $\vec{F}$, $\vec{N}$ и трение покоя $\vec{F}_{\text{тр}}$ — против горизонтальной составляющей $\vec{F}$: без трения учебник поехал бы вдоль неё. Ось x — по этой составляющей, y — вверх.



1. Второй закон Ньютона при покое. Ускорения нет: $m\vec{g} + \vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} = \vec{0}$. Проецируем:

$$x:\ F\cos\alpha - F_{\text{тр}} = 0, \qquad y:\ N - mg - F\sin\alpha = 0.$$

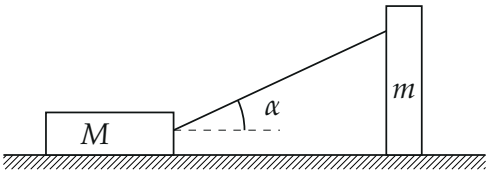
Отсюда $F_{тр} = F\cos\alpha \approx 0{,}87$ Н и $N = mg + F\sin\alpha = 2{,}5$ Н.

2. Проверка предположения. Трение покоя не может быть больше $\mu N = 0{,}4 \cdot 2{,}5 = 1{,}0$ Н. Нужно 0,87 Н — это меньше, значит, покой действительно возможен.

Проверка. Все величины — в ньютонах. Предел $\alpha \to 0$: та же сила горизонтально даёт $\mu N = \mu mg = 0{,}8\,\text{Н} < 1\,\text{Н}$, и учебник поехал бы. С $g = 9{,}8\,\text{м/с}^2$ вывод тот же: $\mu N \approx 0{,}98$ Н. Наклонная вниз сила прижимает учебник сильнее, чем толкает.

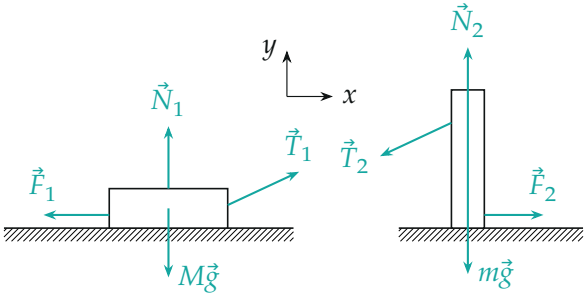
Ответ. Не сдвинется: нужна сила трения покоя $F\cos\alpha \approx 0{,}87$ Н, а наибольшая возможная $\mu(mg + F\sin\alpha) = 1{,}0$ Н.

Пример 2. [Росатом 2025/26, заключительный этап, 10 кл.] Человек массой $m = 60$ кг стоит на льду и пытается с помощью верёвки сдвинуть тяжёлые сани массой $M = 100$ кг. Коэффициент трения саней о лёд $\mu_1 = 0{,}2$, человека о лёд $\mu_2 = 0{,}3$. Сможет ли человек сдвинуть сани, и если да, то под каким углом к горизонту он должен их тянуть? Считать $g = 10\,\text{м/с}^2$.



▲ **Решение. Что происходит.** Сани должны поехать, а человек — устоять: трение под санями должно сорваться, а под человеком — нет. Верёвка под углом меняет обе силы нормальной реакции: сани она приподнимает, человека прижимает ко льду. Ищем все углы, при которых найдётся подходящее натяжение, — метод 3.

Обозначения и оси. T — натяжение верёвки, α — её угол с горизонтом. Верёвка лёгкая и прямая: сани она тянет силой $\vec{T}_1$, человека — силой $\vec{T}_2$, $T_1 = T_2 = T$. $\vec{N}_1$, $\vec{F}_1$ — реакция и трение льда на сани, $\vec{N}_2$, $\vec{F}_2$ — на человека. Ось x — от саней к человеку, y — вверх.



Силы на сани и на человека; длины стрелок условны.

1. Горизонтальная верёвка. Сани сдвинутся при $T > \mu_1 Mg = 200$ Н, а человек поедет уже при $T > \mu_2 mg = 180$ Н — так нельзя.

2. Сани. Предположим, что сани стоят. Второй закон Ньютона для саней в проекциях:

$$x:\ T\cos\alpha - F_1 = 0, \qquad y:\ N_1 + T\sin\alpha - Mg = 0.$$

Покой возможен при $F_1 \le \mu_1 N_1$, то есть $T\cos\alpha \le \mu_1(Mg - T\sin\alpha)$:

$$T \le T_1 = \frac{\mu_1 Mg}{\cos\alpha + \mu_1 \sin\alpha},$$

и сани поедут при любом $T > T_1$.

3. Человек. Верёвка тянет его к саням и вниз, трение покоя — от саней. Второй закон Ньютона для человека, который стоит:

$$x:\ F_2 - T\cos\alpha = 0, \qquad y:\ N_2 - mg - T\sin\alpha = 0.$$

Человек устоит при $T\cos\alpha \le \mu_2(mg + T\sin\alpha)$, то есть $T(\cos\alpha - \mu_2\sin\alpha) \le \mu_2 mg$.

4. Когда оба условия выполнимы. Возьмём натяжение чуть больше T_1 — наименьшее, которое сдвигает сани. Человек при нём устоит, если $T_1(\cos\alpha - \mu_2\sin\alpha) < \mu_2 mg$:

$$\mu_1 M(\cos\alpha - \mu_2\sin\alpha) < \mu_2 m(\cos\alpha + \mu_1\sin\alpha).$$

Делим на $\cos\alpha$ и собираем $\operatorname{tg}\alpha$:

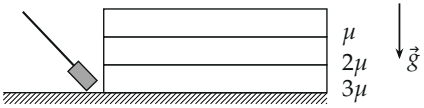
$$\operatorname{tg}\alpha > \frac{\mu_1 M - \mu_2 m}{\mu_1\mu_2(M+m)} = \frac{20-18}{0{,}06\cdot 160} \approx 0{,}21, \qquad \alpha > 11{,}8^\circ.$$

Обратите внимание: угол, лучший для одних саней ($\operatorname{tg}\alpha = \mu_1$, $\alpha \approx 11{,}3^\circ$), не годится — при нём срывается человек.

Проверка. Размерность: в дроби — отношение масс. Предел: если $\mu_2 m \geq \mu_1 M$ (человек держится крепче саней), правая часть не больше нуля и годится любой угол, даже горизонталь. Числа: при $\alpha = 10^\circ$ саням нужно 196 Н, а человек держит лишь 193 Н. Человек добирает сцепление со льдом, натягивая верёвку вниз на себя.

Ответ. Сможет, если тянуть верёвку вверх под углом к горизонту α, где $\operatorname{tg}\alpha > \dfrac{\mu_1 M - \mu_2 m}{\mu_1\mu_2(M+m)} \approx 0{,}21$, то есть $\alpha > 11{,}8^\circ$; горизонтально — не сможет.

Пример 3. [ВсОШ 1994/95, заключительный этап, 10 кл.] На столе один на другом лежат три одинаковых длинных бруска. Их поверхности обработаны так, что коэффициенты трения скольжения между ними равны соответственно μ, 2μ и 3μ (см. рисунок). По нижнему бруску ударяют молотком, направление удара горизонтально. Найдите время, через которое система вернётся в состояние покоя. Известно, что после удара по верхнему бруску, сообщившему ему ту же скорость V_0, что и скорость нижнего бруска в результате удара по нему, система вернулась в состояние покоя через время $t_0 = 3$ с.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Удар короткий: за это время трение ничего не успевает сдвинуть, и сразу после него нижний брусок едет со скоростью V_0, а два верхних стоят. Дальше бруски трутся друг о друга, скорости выравниваются, и на каждом этапе заново решаем, кто по кому скользит, — метод 4.

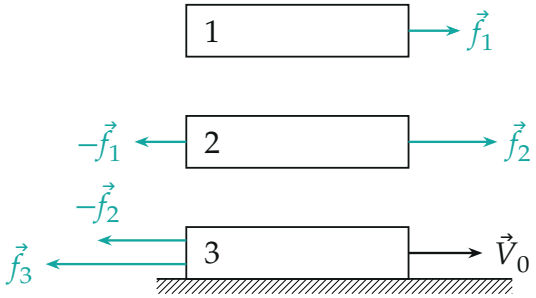
Обозначения. Бруски сверху вниз — 1, 2, 3, масса каждого m. Каждая граница держит всё, что над ней: силы нормальной реакции mg, $2mg$ и $3mg$. Силы трения скольжения: $f_1 = \mu mg$, $f_2 = 2\mu \cdot 2mg = 4\mu mg$, $f_3 = 3\mu \cdot 3mg = 9\mu mg$. Ось x — по $\vec{V}_0$, a_1, a_2, a_3 — проекции ускорений.

0. Удар по верхнему бруску. Брусок 1 тянет брусок 2 вперёд силой μmg, а трение снизу держит 2 силой до $4\mu mg$ — бруски 2 и 3 стоят. Брусок 1 тормозится с ускорением μg: $t_0 = V_0/(\mu g)$, то есть $\mu g = V_0/t_0$.

1. Первый этап: брусок 3 обгоняет 2. Брусок 3 скользит вперёд и по 2, и по столу — оба трения на него назад. Могут ли 1 и 2 ехать вместе? Тогда их разгоняет сила $4\mu mg$, ускорение $2\mu g$, и бруску 1 нужно трение $2\mu mg > f_1$ — нет: 1 отстаёт от 2, трение на него вперёд. Второй закон Ньютона для каждого бруска:

$$ma_1 = \mu mg, \qquad ma_2 = 4\mu mg - \mu mg, \qquad ma_3 = -4\mu mg - 9\mu mg,$$

то есть $a_1 = \mu g$, $a_2 = 3\mu g$, $a_3 = -13\mu g$.



Первый этап: силы трения на каждый брусок; длины стрелок не в масштабе.

Скорости 2 и 3 сравняются, когда $3\mu g\, t_1 = V_0 - 13\mu g\, t_1$, то есть через $t_1 = \dfrac{V_0}{16\mu g} = \dfrac{t_0}{16}$. К этому моменту $v_2 = v_3 = \dfrac{3V_0}{16}$, $v_1 = \dfrac{V_0}{16}$.

2. Второй этап: едут ли 2 и 3 вместе? Скорости сравнялись — предположим, что 2 и 3 едут вместе. Брусок 1 по-прежнему медленнее, трение от него на 2 — назад, μmg. Второй закон Ньютона для системы «2+3»: $2ma = -\mu mg - 9\mu mg$, $a = -5\mu g$. Для бруска 2: $ma = -\mu mg + F_{23}$, откуда нужное трение от 3 равно $|F_{23}| = 4\mu mg \le f_2$ — выполнено, хоть

и на пределе. Значит, $a_2 = a_3 = -5\mu g$, $a_1 = \mu g$. Все скорости сравняются через Δt:

$$\frac{3V_0}{16} - 5\mu g\,\Delta t = \frac{V_0}{16} + \mu g\,\Delta t \;\Rightarrow\; \Delta t = \frac{V_0}{48\mu g} = \frac{t_0}{48}, \qquad v = \frac{V_0}{12}.$$

3. Третий этап: едут ли все вместе? Снова предполагаем. Тогда $3ma = -9\mu mg$, $a = -3\mu g$, и бруску 1 нужно трение $3\mu mg > f_1$ — нет, 1 скользит, $a_1 = -\mu g$. А 2 и 3 вместе? Система «2+3»: $2ma = \mu mg - 9\mu mg$, $a = -4\mu g$; бруску 2 нужно $|F_{23}| = 5\mu mg > f_2$ — тоже нет. Скользит всё:

$$ma_1 = -\mu mg, \qquad ma_2 = \mu mg - 4\mu mg, \qquad ma_3 = 4\mu mg - 9\mu mg,$$

то есть $a_1 = -\mu g$, $a_2 = -3\mu g$, $a_3 = -5\mu g$. Знаки согласуются с предположением: 3 тормозится быстрее 2, а 2 — быстрее 1. Остановившийся брусок дальше стоит: на 3 сверху действует $4\mu mg < f_3$, на 2 — $\mu mg < f_2$. Последним остановится брусок 1, через $t_3 = \dfrac{V_0}{12\mu g} = \dfrac{t_0}{12}$. Всё время

$$t = t_1 + \Delta t + t_3 = t_0\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{48} + \frac{1}{12}\right) = \frac{t_0}{6} = 0{,}5\text{ с}.$$

Проверка. Размерность верна: ответ — доля t_0. Второй способ — импульс системы: стол действует на брусок 3 силой $9\mu mg$ до его остановки в момент $t_0/10$, затем $4\mu mg$ до остановки 2 в момент $t_0/9$, затем μmg до $t_0/6$. Импульс этих сил $\mu mg\,t_0\left(\frac{9}{10} + \frac{4}{90} + \frac{1}{18}\right) = mV_0$ — ровно тот, что сообщил удар. Дольше всех едет верхний брусок: у него самое слабое трение.

Ответ. $t = \dfrac{t_0}{6} = 0{,}5$ с.

Как решать листок

Сложность 1–3 («сдвинется ли», «найдите силу трения») — метод 2. «Наименьшая сила», «минимальный μ» — метод 3; доска с бруском, лента — метод 1. От сложности 6 — стопки и системы тел, метод 4.