Баллистика: бросок под углом

После пособия вы сможете

- проецировать начальную скорость и $\vec{g}$ на любые оси, со знаком;
- находить время и высоту подъёма, время полёта и дальность;
- решать задачи векторно: треугольник скоростей, его медиана $\vec{s}/t$, треугольник перемещений;
- находить наибольшую дальность броска, в том числе со скалы или на холм.

Теория кратко

Летит тело — на него действует только сила тяжести (сопротивлением воздуха пренебрегаем). По второму закону Ньютона $m\vec{a} = m\vec{g}$, то есть $\vec{a} = \vec{g}$ — постоянный вектор. Значит, работают все формулы равноускоренного движения, только векторные:

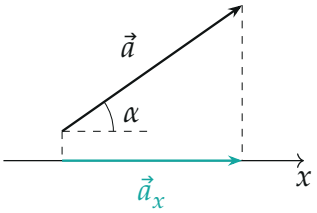
Факт 1

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t, \qquad \vec{s} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}, \qquad \vec{s} = \frac{\vec{v}_0 + \vec{v}}{2}\,t, \qquad \vec{g}\cdot\vec{s} = \frac{v^2 - v_0^2}{2}.$$

Траектория — парабола с вертикальной осью. Тело опустилось на h — последняя формула даёт $v^2 = v_0^2 + 2gh$, поднялось — $v^2 = v_0^2 - 2gh$, при любом угле броска.

Определение 1

Проекция вектора на ось — плюс или минус модуль вектора, умноженный на косинус *острого* угла между вектором и осью. Знак — по «помогатору»: опустим перпендикуляры из начала и конца вектора на ось; отрезок между ними, направленный от начала к концу, смотрит по оси — плюс, против — минус.

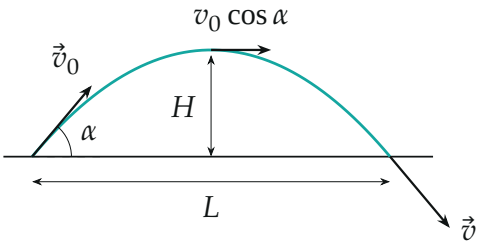


Помогатор $\vec{a}_x$ смотрит по оси: $a_x = +a\cos\alpha$.

Бросок с поверхности под углом α к горизонту, ось x — по горизонтали в сторону броска, y — вверх: $v_x = v_0\cos\alpha$ не меняется, $v_y = v_0\sin\alpha - gt$. В верхней точке $v_y = 0$:

$$t_{\text{п}} = \frac{v_0\sin\alpha}{g}, \qquad H = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}, \qquad L = v_0\cos\alpha\cdot 2t_{\text{п}} = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}.$$

Если точки броска и падения на одной горизонтали, скорость падения по модулю равна начальной, а угол падения — углу броска.



Методы

Метод 1

Проекции. Когда применять: найти время, высоту, дальность; бросок с высоты, «через забор», «в момент, когда…».

1. Начало отсчёта — в точке броска, ось x — по горизонтали, y — вверх (или как удобно).
2. Спроецируйте $\vec{v}_0$ помогатором: $v_{0x} = v_0\cos\alpha$, $v_{0y} = \pm v_0\sin\alpha$; $g_x = 0$, $g_y = -g$.

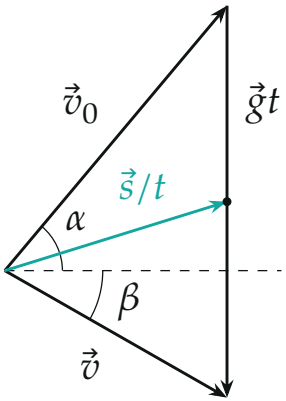
3. Запишите $v_x = v_{0x}$, $v_y = v_{0y} - gt$, $x = v_{0x}t$, $y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$.
4. Переведите слова условия в равенства: верхняя точка — $v_y = 0$; упало с высоты h — $y = -h$; «через τ скорость горизонтальна» — $v_y(\tau) = 0$.

Мешает неизвестный вектор — направьте ось перпендикулярно ему, и он выпадет из уравнения. Оси не обязаны быть «горизонталь — вертикаль».

Метод 2

Треугольник скоростей. Когда применять: в условии углы скоростей, модуль скорости в разные моменты, «скорость уменьшилась вдвое», «перпендикулярна начальной».

1. Нарисуйте $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t$: из конца $\vec{v}_0$ вниз отложите $\vec{g}t$. Углы α и β скоростей отсчитывайте от горизонтали.
2. Горизонтальный катет общий: $v_0 \cos\alpha = v \cos\beta$. Вертикаль: $gt = v_0 \sin\alpha + v \sin\beta$ (если $\vec{v}$ смотрит вниз).
3. Непонятный треугольник достройте до прямоугольного или возьмите теорему косинусов: $v^2 = v_0^2 + (gt)^2 - 2v_0gt\sin\alpha$.
4. Перемещение: $\vec{s} = \frac{1}{2}(\vec{v}_0 + \vec{v})t$, поэтому $\vec{s}/t$ — медиана треугольника скоростей к стороне $\vec{g}t$. Её горизонтальная проекция — L/t, вертикальная — h/t.



Средняя скорость $\vec{s}/t$ упирается в середину стороны $\vec{g}t$.

Треугольник перемещений $\vec{s} = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$ — тот же треугольник, только стороны умножены на t, а нижняя сторона — сама $\vec{s}$. Его горизонтальный катет — дальность $L = v_0 \cos\alpha\, t$.

Метод 3

Наибольшая дальность. Когда применять: «на каком наибольшем расстоянии», «под каким углом бросить, чтобы дальше», точка падения выше или ниже точки броска.

1. Найдите модуль конечной скорости из $\vec{g} \cdot \vec{s} = \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2)$: при заданных v_0 и перепаде высот он от угла не зависит.
2. Посчитайте площадь треугольника скоростей двумя способами: $\frac{1}{2} g t \cdot \frac{L}{t} = \frac{1}{2} v_0 v \sin\gamma$, где γ — угол между $\vec{v}_0$ и $\vec{v}$. Время сокращается:
$$L = \frac{v_0 v \sin\gamma}{g}.$$
3. Меняется только $\sin\gamma$, максимум — при $\gamma = 90°$, то есть $\vec{v}_0 \perp \vec{v}$: $L_{\max} = \frac{v_0 v}{g}$.

Частые ошибки

Частая ошибка

«В верхней точке скорость равна нулю». Нулю равна только вертикальная проекция; сама скорость горизонтальна и равна $v_0 \cos\alpha$.

Частая ошибка

«Дальше всего — под 45°» верно, *только* если точки броска и падения на одной горизонтали. Со скалы выгоднее бросать положе, на холм — круче; общее правило — $\vec{v}_0 \perp \vec{v}$.

Частая ошибка

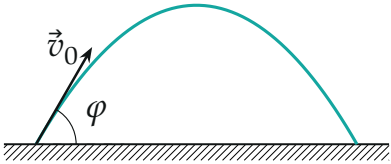
Убрать стрелки из векторной формулы и сложить модули: $s = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$ для броска под углом неверно. Векторы складываются треугольником; либо рисуйте его, либо проецируйте со знаками.

Частая ошибка

Из $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$ сделать вывод $\alpha = \beta$. Синус не меняется при замене угла на 180° минус угол, поэтому есть второй ответ: $\alpha + \beta = 90°$. Так на одну дальность летят навесная и настильная траектории.

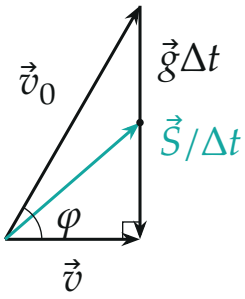
Разобранные примеры

Пример 1. [ВсОШ 2011/12, региональный этап, 9 кл.] Скорость камня v_0, брошенного под углом $\varphi = 60°$ к горизонту, уменьшилась вдвое за $\Delta t = 1$ с. Найдите модуль перемещения S, которое камень совершил за это время. Считайте $g = 10$ м/с^2.



▲ **Решение. Что происходит.** У скорости меняется только вертикальная составляющая, горизонтальная остаётся $v_0 \cos 60° = \frac{v_0}{2}$. Скорость стала $\frac{v_0}{2}$ — столько же, сколько одна горизонтальная составляющая. Наверное, это сказано не просто так: посмотрим на треугольник скоростей (метод 2).

1. Треугольник скоростей. Горизонтальный катет общий: $v_0 \cos\varphi = v \cos\beta$, где $v = \frac{v_0}{2}$, β — угол $\vec{v}$ с горизонталью. Отсюда $\cos\beta = 2\cos 60° = 1$, $\beta = 0$: через Δt камень в верхней точке, и треугольник прямоугольный.



2. Начальная скорость. Вертикальный катет: $g\Delta t = v_0 \sin\varphi$, $v_0 = \frac{g\Delta t}{\sin\varphi} = \frac{20}{\sqrt{3}} \approx 11{,}5$ м/с.

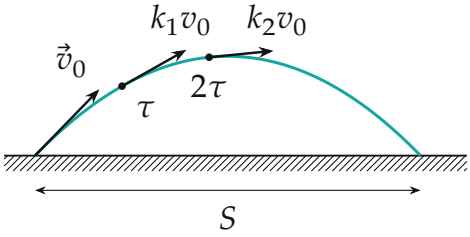
3. Перемещение. Средняя скорость $\vec{S}/\Delta t$ — медиана к стороне $\vec{g}\Delta t$: её горизонтальная проекция $v_0 \cos\varphi$, вертикальная — $\frac{1}{2}g\Delta t$. По теореме Пифагора

$$S = \Delta t\sqrt{\left(\frac{g\Delta t}{\operatorname{tg}\varphi}\right)^2 + \left(\frac{g\Delta t}{2}\right)^2} = g\Delta t^2\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{7}{12}}\,g\Delta t^2 \approx 7{,}6\,\text{м}.$$

Проверка. Размерность: $g\Delta t^2$ — метры. Проекциями: высота подъёма $\frac{v_0^2\sin^2\varphi}{2g} = 5$ м, по горизонтали $v_0\cos\varphi\,\Delta t \approx 5{,}8$ м, $\sqrt{25+33{,}3} \approx 7{,}6$ м. Предел: при броске вертикально ($\operatorname{tg}\varphi \to \infty$) остаётся $\frac{1}{2}g\Delta t^2$ — высота подъёма, как и должно быть.

Ответ. $S = \sqrt{\frac{7}{12}}\,g\Delta t^2 \approx 7{,}6$ м.

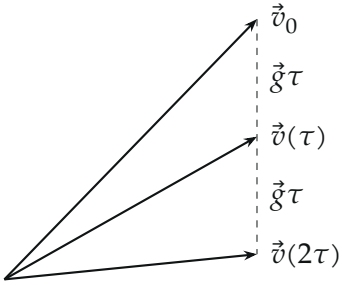
Пример 2. [ВсОШ 2014/15, региональный этап, 9 кл.] Модуль скорости камня, брошенного с горизонтальной плоскости под углом к горизонту, через время $\tau = 0{,}5$ с после броска составлял $k_1 = 80\%$ от модуля начальной скорости, а ещё через τ — $k_2 = 70\%$. Найдите продолжительность T полёта камня и расстояние S от места броска до места падения. Считайте $g = 9{,}8\,\text{м/с}^2$.



▲ **Решение. Что происходит.** Горизонтальная проекция скорости постоянна, вертикальная убывает равномерно. Значит, концы векторов скорости, отложенных из одной точки, лежат на одной вертикали и за каждое

τ сдвигаются вниз на $g\tau$. Неизвестных две — проекции начальной скорости, условий тоже два (метод 1).

Обозначения. Ось x — по горизонтали в сторону броска, y — вверх; v_{0x}, $v_{0y} > 0$ — проекции начальной скорости, $v_0^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2$.



1. Модуль скорости. $v_x = v_{0x}$, $v_y = v_{0y} - gt$, поэтому

$$v^2(t) = v_{0x}^2 + (v_{0y} - gt)^2 = v_0^2 - 2v_{0y}gt + g^2t^2.$$

(Это теорема косинусов в треугольнике скоростей.)

2. Два условия. При $t = \tau$ и $t = 2\tau$:

$$(1 - k_1^2)v_0^2 = 2v_{0y}g\tau - g^2\tau^2, \qquad (1 - k_2^2)v_0^2 = 4v_{0y}g\tau - 4g^2\tau^2.$$

Умножим первое на 2 и вычтем второе — v_{0y} уйдёт:

$$v_0^2 = \frac{2g^2\tau^2}{1 - 2k_1^2 + k_2^2} = \frac{2g^2\tau^2}{0{,}21}, \qquad v_0 \approx 15{,}1\ \text{м/с}.$$

Из первого условия $v_{0y} = \frac{(1-k_1^2)v_0^2 + g^2\tau^2}{2g\tau} \approx 10{,}85$ м/с, и $v_{0x} = \sqrt{v_0^2 - v_{0y}^2} \approx 10{,}53$ м/с.

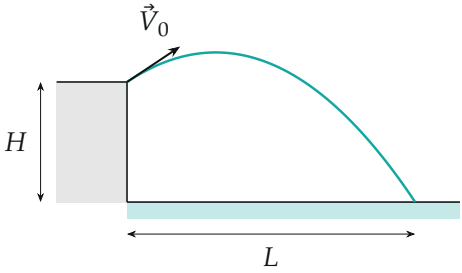
3. Время и дальность. Камень вернулся на ту же высоту, когда $y = v_{0y}T - \frac{1}{2}gT^2 = 0$:

$$T = \frac{2v_{0y}}{g} = \tau\,\frac{3 - 4k_1^2 + k_2^2}{1 - 2k_1^2 + k_2^2} \approx 2{,}21\ \text{с}, \qquad S = v_{0x}T \approx 23{,}3\ \text{м}.$$

Проверка. Размерность: τ на безразмерную дробь — секунды. Числа: $v^2(\tau) = 10{,}53^2 + 5{,}95^2 \approx 146$, а $0{,}64 \cdot 15{,}12^2 \approx 146$; $v^2(2\tau) = 10{,}53^2 + 1{,}05^2 \approx 112$, $0{,}49 \cdot 15{,}12^2 \approx 112$. Знак: $2\tau = 1$ с меньше $T/2 \approx 1{,}1$ с — камень ещё поднимается, и скорость в самом деле убывает.

Ответ. $T = \tau\,\dfrac{3 - 4k_1^2 + k_2^2}{1 - 2k_1^2 + k_2^2} \approx 2{,}21$ с; $S \approx 23{,}3$ м.

Пример 3. [Ведомственная 2010/11, заключительный этап, 10 кл.] Под каким углом надо бросить в море камень с прибрежной скалы высотой H, чтобы он упал на максимальном расстоянии от берега? Начальная скорость камня V_0.



▲ **Решение. Что происходит.** Дальность зависит от угла, искать её максимум через производную долго. Заметим, что модуль скорости падения от угла не зависит, — тогда работает площадь треугольника скоростей (метод 3).

1. Скорость падения. Камень опустился на H, поэтому $\vec{g} \cdot \vec{s} = gH$ и

$$v^2 = V_0^2 + 2gH$$

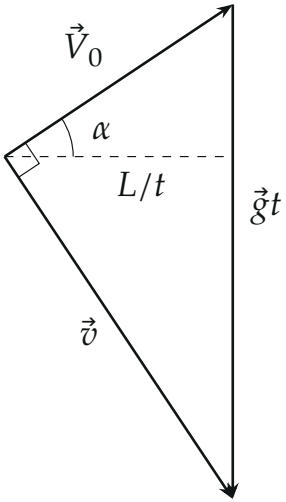
при любом угле броска.

2. Дальность. В треугольнике $\vec{v} = \vec{V}_0 + \vec{g}t$ основание gt вертикально, а высота к нему — горизонтальная проекция скорости L/t. Площадь двумя способами: $\frac{1}{2}gt \cdot \frac{L}{t} = \frac{1}{2}V_0 v \sin\gamma$, где γ — угол между $\vec{V}_0$ и $\vec{v}$:

$$L = \frac{V_0 v \sin\gamma}{g}.$$

3. Максимум. V_0 и v от угла не зависят, значит, наибольшая дальность — при $\sin\gamma = 1$, то есть $\vec{V}_0 \perp \vec{v}$:

$$L_{\max} = \frac{V_0\sqrt{V_0^2 + 2gH}}{g}.$$



При наибольшей дальности треугольник скоростей прямоугольный: $\vec{V}_0 \perp \vec{v}$.

4. Угол. Горизонтальный катет общий: $V_0\cos\alpha = v\cos\beta$, а из $\vec{V}_0 \perp \vec{v}$ угол $\vec{v}$ с горизонталью $\beta = 90° - \alpha$. Тогда $V_0\cos\alpha = v\sin\alpha$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{V_0}{v} = \frac{V_0}{\sqrt{V_0^2 + 2gH}}.$$

Проверка. Размерность: отношение скоростей. Предел $H = 0$: $\operatorname{tg}\alpha = 1$, $\alpha = 45°$ и $L_{\max} = \frac{V_0^2}{g}$ — знакомый случай. При $H \to \infty$ угол стремится к нулю: с очень высокой скалы выгоднее бросать почти горизонтально.

Ответ. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{V_0}{\sqrt{V_0^2 + 2gH}}$; при этом $L_{\max} = \dfrac{V_0\sqrt{V_0^2 + 2gH}}{g}$.

Как решать листок

Сложность 2–3 — метод 1: оси, проекции, верхняя точка из $v_y = 0$. В условии углы или модули скоростей в разные моменты — метод 2, треугольник скоростей и медиана $\vec{s}/t$. «Наибольшая дальность», «наименьшая скорость, чтобы долететь» — метод 3: $\vec{v}_0 \perp \vec{v}$. Два тела в полёте — в системе отсчёта одного из них другое летит по прямой (пособие «Относительность движения»).