Графики движения, путь как площадь

После пособия вы сможете

- читать график координаты $x(t)$: наклон — скорость, горизонталь — стоянка, пересечение — встреча;
- находить путь и перемещение как площадь под графиком скорости $v(t)$, в том числе ступенчатым;
- строить график $x(t)$ самому, когда в условии много событий: туда-обратно, встречи, развороты;
- находить время движения по графику $v(x)$ как площадь под графиком $1/v$.

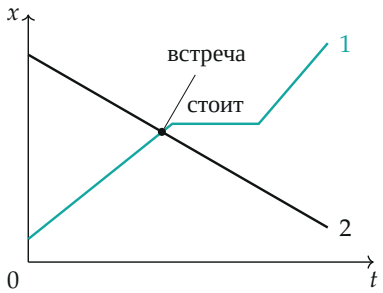
Теория кратко

Определение 1

График $x(t)$ — координата тела в каждый момент. При равномерном движении $x = x_0 + v_x t$, и график — прямая. Её *наклон* — на сколько меняется координата за единицу времени:

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

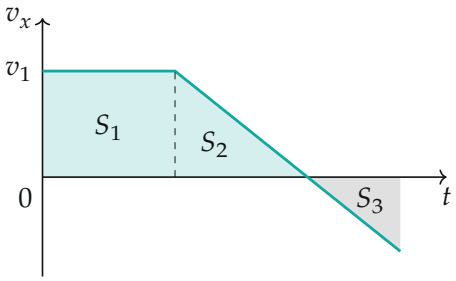
Чем круче прямая, тем быстрее тело; прямая идёт вниз — тело едет против оси ($v_x < 0$); горизонталь — стоит.



Тело 1 едет по оси, стоит и снова едет быстрее; тело 2 едет навстречу.

Факт 1

Путь — площадь под графиком скорости. На участке с постоянной скоростью путь $s = v\,\Delta t$ — это площадь прямоугольника высотой v и шириной Δt. Если скорость меняется, разобьём время на очень узкие полоски: на каждой скорость почти постоянна, и путь за неё — площадь узкого прямоугольника. Сложим полоски — получим площадь под графиком $v(t)$.



Площадь под осью — тело едет назад: перемещение $S_1 + S_2 - S_3$, путь $S_1 + S_2 + S_3$.

Если тело не разворачивается, путь равен площади под графиком. Где график ушёл под ось t, проекция $v_x < 0$: тело едет назад, и для перемещения эта площадь вычитается, а для пути — прибавляется.

Методы

Метод 1

Читаем график $x(t)$ или $s(t)$. Когда применять: дан график координаты или пути, спрашивают скорость, время встречи, среднюю скорость.

1. Посмотрите, что по осям и в каких единицах. График пути $s(t)$ никогда не идёт вниз, график координаты — может.
2. Скорость на участке — наклон: $v_x = \Delta x/\Delta t$ по двум удобным точкам, лучше по узлам клетки.
3. Встреча — точка пересечения двух графиков $x(t)$: в один момент одна координата.
4. Средняя скорость от начала до момента t — наклон отрезка (хор-

ды) из начальной точки в точку графика в момент t.

Метод 2

Путь — площадь под $v(t)$. Когда применять: дан график скорости, скорость меняется ступеньками или «равномерно уменьшалась», спрашивают путь, среднюю скорость, где тело в момент t.

1. Нарисуйте $v(t)$, если его нет: ступенька — горизонталь, «равномерно уменьшалась» — наклонная прямая.
2. Разбейте площадь на прямоугольники, треугольники и трапеции. Площадь трапеции — полусумма оснований на высоту.
3. Проверьте, нет ли участков под осью: там тело едет назад.
4. «Где тело прошло половину пути» — найдите момент, где площадь слева равна половине всей.

Единицы площади — произведение единиц осей: км/ч · мин сначала переведите в километры.

Метод 3

Строим график $x(t)$ сами. Когда применять: в условии нет графика, но событий много — выехал, встретил, развернулся, вернулся раньше, чем обычно.

1. Ось x — вдоль дороги, начало — в удобной точке (станция, дом); время — от удобного момента.
2. Каждое тело — своя ломаная. Одна и та же скорость — параллельные отрезки; туда и обратно с одной скоростью — симметричные.
3. Нарисуйте и обычный, и сегодняшний сценарий на одном графике. Разница между ними — это и есть то, что дано в условии.
4. Ищите равные отрезки и подобные треугольники: часто скорости вообще не нужны.

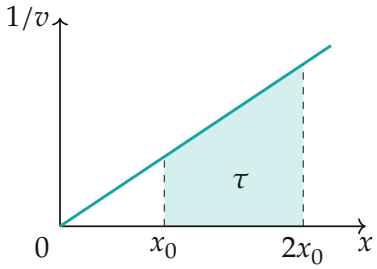
Метод 4

Время по графику $v(x)$ (10 класс). Когда применять: дана зависимость скорости от координаты или пути, а спрашивают время.

1. Разбейте путь на маленькие кусочки Δx. На каждом скорость почти постоянна, и время $\Delta t = \Delta x/v = (1/v)\cdot\Delta x$.
2. Это площадь узкой полоски под графиком $1/v$ от x. Сложим полоски: *время — площадь под графиком* $1/v(x)$.
3. Постройте этот график по точкам и посчитайте площадь фигурами.

Пример (Росатом 2020, 9 кл.). Скорость тела $v = c/x$; найдите время движения от x_0 до $2x_0$. Здесь $1/v = x/c$ — прямая, под ней трапеция:

$$\tau = \frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{c} + \frac{2x_0}{c}\right)x_0 = \frac{3x_0^2}{2c}.$$



Частые ошибки

Частая ошибка

Путать графики $x(t)$ и $v(t)$. Пересечение двух графиков $x(t)$ — встреча, а пересечение двух графиков $v(t)$ — только равенство скоростей; тела в этот момент могут быть далеко друг от друга.

Частая ошибка

Считать путь по высоте графика скорости. Путь — площадь, а не высота: за 10 с со скоростью 5 м/с пройдено 50 м, а не 5.

Частая ошибка

Вычитать площадь под осью, когда спрашивают путь. Для перемещения — вычитаем, для пути — прибавляем.

Частая ошибка

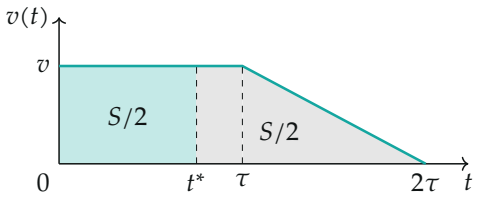
Делить «половину пути» по половине времени. Момент, когда пройдена половина пути, находится по площади, а не по середине оси t.

Разобранные примеры

Пример 1. [Курчатов 2012/13, заключительный этап, 7–8 кл.] Автомобиль в пробке перед светофором 30 секунд ехал с постоянной скоростью, а затем его скорость в течение такого же промежутка времени равномерно уменьшалась до нуля. За 1 минуту автомобиль прошёл некоторый путь. На какой половине этого пути — первой или второй — средняя скорость автомобиля была больше, и во сколько раз?

▲ **Решение. Что происходит.** Скорость сначала постоянна, потом линейно падает — график $v(t)$ состоит из горизонтали и наклонной прямой. Путь — площадь под ним (метод 2), половину пути ищем по половине площади.

Обозначения. v — скорость на первом участке, $\tau = 30$ с — длительность каждого участка.



Площадь под $v(t)$ разделена пополам моментом t^*.

1. Весь путь. Площадь прямоугольника и треугольника:

$$S = v\tau + \frac{1}{2}v\tau = \frac{3}{2}v\tau.$$

2. Где половина пути. $S/2 = 3v\tau/4$ — меньше площади прямоугольника $v\tau$, значит, половина пути пройдена ещё с постоянной скоростью, в момент $t^* = 3\tau/4$.

3. Средние скорости. Первая половина: $v_1 = (S/2)/t^* = v$. Вторая половина длится $2\tau - 3\tau/4 = 5\tau/4$:

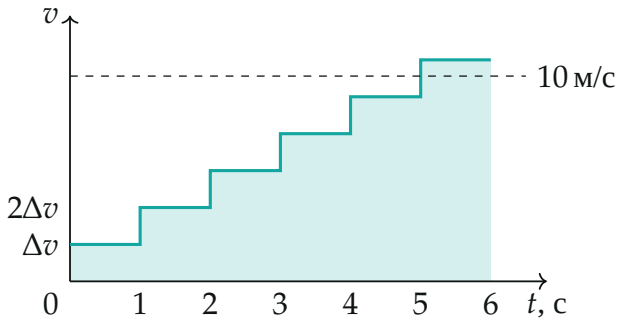
$$v_2 = \frac{3v\tau/4}{5\tau/4} = \frac{3}{5}v, \qquad \frac{v_1}{v_2} = \frac{5}{3}.$$

Проверка. Отношение безразмерное и не зависит ни от v, ни от τ — поэтому их и не дали. Средняя скорость за всё время $S/(2\tau) = 0{,}75v$ лежит между $v_1 = v$ и $v_2 = 0{,}6v$, как и должно быть. На второй половине машина тормозит, и средняя скорость там меньше.

Ответ. На первой половине пути средняя скорость больше в $5/3 \approx 1{,}7$ раза.

Пример 2. [Росатом 2017/18, заключительный этап, 7 кл.] Нечестный спортсмен принимал допинг, который позволял достигать очень высокой скорости, но при медленном разгоне. Он бежал дистанцию $l = 100$ м так: в начале каждой следующей секунды он мгновенно увеличивал свою скорость на $\Delta v = 1{,}8$ м/с (до начала первой секунды его скорость была нулевой). На какое время обгонит или отстанет этот спортсмен от конкурентов, которые бегут с постоянной скоростью $v = 10$ м/с?

▲ **Решение. Что происходит.** График $v(t)$ — лестница: в k-ю секунду скорость $k\Delta v$. Путь — площадь под лестницей (метод 2); в конце нужно понять, на какой ступеньке спортсмен добежит до 100 м.



Скорость спортсмена (первые 6 с) и конкурентов (штрих).

1. Путь за n секунд. Ступенька k — прямоугольник шириной $\tau_0 = 1$ с и высотой $k\Delta v$. Площадь лестницы из n ступенек:

$$s_n = \Delta v\,\tau_0\,(1 + 2 + \ldots + n) = \Delta v\,\tau_0\,\frac{n(n+1)}{2}.$$

Сумму видно из рисунка: две одинаковые лестницы, приставленные друг к другу, складываются в прямоугольник $n \times (n+1)$ ступенек. Получаем $s_n = 0{,}9\,n(n+1)$ м: $s_9 = 81$ м, $s_{10} = 99$ м.

2. Финиш. За 10 с спортсмен не добежал 1 м. В одиннадцатую секунду его скорость $11\Delta v = 19{,}8$ м/с, и последний метр он пробегает за

$$\Delta t = \frac{l - s_{10}}{11\Delta v} = \frac{1}{19{,}8}\text{ с} \approx 0{,}05\text{ с}.$$

Всего $t = 10{,}05$ с.

3. Сравнение. Конкуренты бегут $l/v = 10$ с. Спортсмен отстанет на 0,05 с.

Проверка. Средняя скорость спортсмена $100/10{,}05 \approx 9{,}95$ м/с чуть меньше 10 м/с — проигрыш маленький, как и вышло. Формула суммы при $n = 2$: $1 + 2 = 3 = 2 \cdot 3/2$. Быстрый финиш не спасает: медленные первые секунды весят больше.

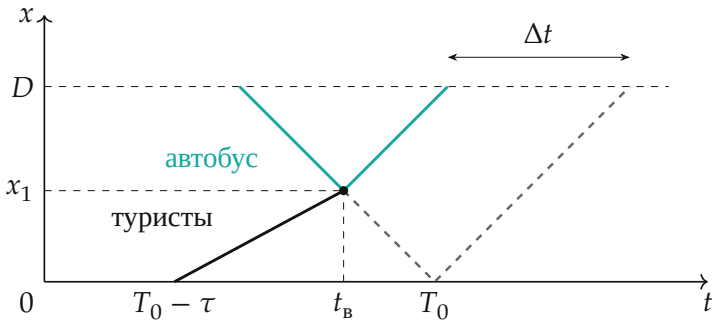
Ответ. Отстанет на $\Delta t \approx 0{,}05$ с (пробежит за 10,05 с, конкуренты — за 10 с).

Пример 3. [«Шаг в будущее» 2019/20, заключительный этап, 9 кл.] Лагерь находится на некотором расстоянии от станции. Автобус обычно приходит к приходу поезда, забирает туристов и сразу отвозит их в лагерь. Однажды группа приехала другим поездом и была на станции на $\tau = 2$ ч раньше, чем приходит автобус. Не дожидаясь автобуса, туристы пошли пешком и встретили выехавший за ними автобус; он сразу развернулся и повёз их в лагерь. Группа приехала в лагерь на $\Delta t = 20$ мин раньше, чем если бы автобус встретил их на станции. Сколько времени туристы шли пешком? Скорости автобуса и туристов постоянны.

▲ **Решение. Что происходит.** Событий много, скоростей и расстояний нет — строим график $x(t)$ (метод 3): обычный рейс автобуса и сегодняш-

ний на одном графике. Автобус выезжает из лагеря как обычно — к приходу поезда.

Обозначения. Ось x — от станции ($x = 0$) к лагерю ($x = D$). T_0 — момент, когда автобус обычно у станции; туристы пришли на станцию в $T_0 - \tau$. Встреча — в момент $t_в$ в точке x_1; u — скорость автобуса.



Бирюзовая ломаная — автобус сегодня, серый штрих — обычный рейс от точки встречи; чёрная — туристы.

1. Что сэкономил автобус. До точки встречи сегодняшний и обычный рейсы совпадают. Обычно автобус ещё доехал бы от x_1 до станции и вернулся бы в x_1 — это путь $2x_1$ со скоростью u. Обратно он едет с той же скоростью, поэтому на графике это параллельные отрезки, и вся разница во времени прибытия — время этого крюка:

$$\Delta t = \frac{2x_1}{u}.$$

2. Момент встречи. От x_1 до станции автобус едет $x_1/u = \Delta t/2$, значит, встретил туристов на $\Delta t/2$ раньше обычного:

$$t_в = T_0 - \frac{\Delta t}{2}.$$

3. Сколько шли туристы. От $T_0 - \tau$ до $t_в$:

$$t_п = t_в - (T_0 - \tau) = \tau - \frac{\Delta t}{2} = 120 - 10 = 110\,\text{мин}.$$

Проверка. Размерность — время. Предел: если $\Delta t \to 0$ (автобус встретил их у самой станции), выходит $t_{\text{п}} = \tau$ — туристы просто прождали бы автобус, только на ногах. Скорость туристов и расстояние до лагеря не понадобились: всё решила симметрия графика.

Ответ. $t_{\text{п}} = \tau - \dfrac{\Delta t}{2} = 110$ мин.

Как решать листок

Сложность 1–3 — прочитать наклон и площадь по готовому графику: методы 1 и 2. Ступеньки, торможение, «на какой половине пути» — метод 2. Встречи, автобусы и туристы без графика в условии (сложность 4–6) — метод 3: начните с рисунка $x(t)$. Графики $v(x)$ и $v(S)$ — метод 4.