Относительность движения, сложение скоростей

После пособия вы сможете

- записывать закон сложения скоростей и перемещений и понимать, какая скорость относительная, а какая переносная;
- переходить в систему отсчёта, где задача становится знакомой: вода стоячая, плита неподвижна, одно из тел стоит;
- решать задачи о реке: время переправы, снос, наименьший снос;
- находить наименьшее расстояние между движущимися телами через относительную скорость.

Теория кратко

Определение 1

Система отсчёта — тело отсчёта, жёстко связанная с ним система координат и часы. Систему связывают с *телом*, а не с точкой: говорят «скорость относительно системы отсчёта, связанной с плотом».

Удобно представлять две системы. Неподвижная (обычно Земля) — «царь»: скорость, которую видит она, — абсолютная, $\vec{v}$. Подвижная — «слуга»: скорость, которую видит она, — относительная, $\vec{v}_{\text{отн}}$. Сам «слуга» движется поступательно со скоростью $\vec{u}$ — это переносная скорость.

Закон сложения скоростей

$$\vec{v} = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{u}, \qquad \vec{v}_{\text{отн}} = \vec{v} - \vec{u}.$$

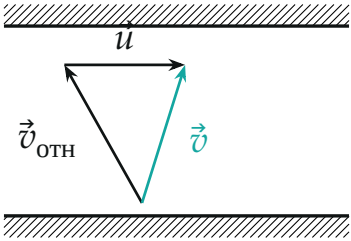
Умножив на время, получаем закон сложения перемещений: $\vec{s} = \vec{s}_{\text{отн}} + \vec{u}\,t$.

Факт 1

При переходе в другую систему отсчёта меняются скорость, перемещение, ускорение (если «слуга» разгоняется), путь. Не меняются время, масса и расстояние между двумя точками в один и тот же момент.

Лодка в реке: «скорость лодки в стоячей воде» — это её скорость относительно воды, переносная — скорость течения $\vec{u}$. Относительно берега

лодка идёт по третьей стороне треугольника.



Нос лодки — против течения, а относительно берега она идёт наискосок.

Если у двух тел одинаковое ускорение (два камня в полёте, два тела на одной ленте), их относительная скорость постоянна: $\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = (\vec{v}_{02} + \vec{g}t) - (\vec{v}_{01} + \vec{g}t) = \vec{v}_{02} - \vec{v}_{01}$. В системе отсчёта одного камня другой летит равномерно и по прямой.

Методы

Метод 1

Перейти туда, где задача знакомая. Когда применять: слова «относительно», движущаяся плита, зеркало, эскалатор, лента, ветер, дождь, течение.

1. Найдите систему отсчёта, в которой задача знакома: плита неподвижна, вода стоячая, воздух не движется. Это «слуга», его скорость $\vec{u}$.
2. Запишите закон сложения скоростей векторно и выразите относительную скорость: $\vec{v}_{\text{отн}} = \vec{v} - \vec{u}$.
3. Решите задачу в этой системе.
4. Вернитесь к Земле тем же законом: $\vec{v} = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{u}$.

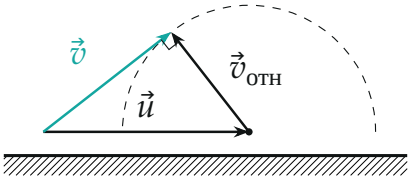
Векторы не параллельны — рисуйте треугольник скоростей и достраивайте его до прямоугольного.

Пример. Шарик летит со скоростью v навстречу тяжёлой плите, которая едет к нему со скоростью u; удар упругий. В системе плиты шарик подлетает со скоростью $v + u$ и отлетает с той же $v + u$. Возвращаемся к Земле: оба вектора смотрят от плиты, $v^* = v + 2u$.

Метод 2

Река и переправа. Когда применять: катер, лодка, пловец, «скорость в стоячей воде», «снос», «за наименьшее время».

1. Перейдите в систему воды: там всё как в озере, лодка идёт туда, куда смотрит нос, со скоростью v_0.
2. Время переправы через реку ширины H определяет только поперечная составляющая $\vec{v}_{\text{отн}}$: $t = \frac{H}{v_0 \cos\alpha}$, где α — угол носа с перпендикуляром к берегу. Наименьшее время $\frac{H}{v_0}$ — нос строго поперёк, снос при этом $\frac{uH}{v_0}$.
3. Наименьший снос. При $u < v_0$ можно переправиться без сноса: $\vec{v}$ поперёк реки, $\sin\alpha = \frac{u}{v_0}$. При $u > v_0$ концы всех возможных $\vec{v} = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{u}$ лежат на окружности радиуса v_0, сдвинутой на $\vec{u}$; наименьший угол с перпендикуляром даёт касательная из начала: $\vec{v} \perp \vec{v}_{\text{отн}}$, и снос $L_{\min} = H\frac{\sqrt{u^2 - v_0^2}}{v_0}$.



При $u > v_0$: наименьший снос, когда $\vec{v}$ касается окружности, $\vec{v} \perp \vec{v}_{отн}$.

Метод 3

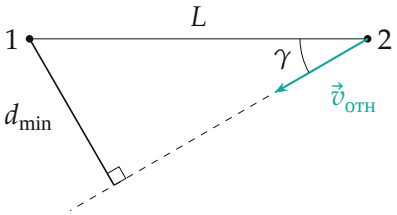
Наименьшее расстояние. Когда применять: «на каком наименьшем расстоянии пройдут», «когда расстояние будет минимальным», «столкнутся ли»; оба тела движутся равномерно или с одним и тем же ускорением.

1. Сядьте на первое тело. Второе движется относительно него с постоянной скоростью $\vec{v}_{\text{отн}} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ — по прямой.
2. Расстояние от системы отсчёта не зависит. Значит, наименьшее расстояние — перпендикуляр из первого тела на эту прямую.
3. Если γ — угол между $\vec{v}_{\text{отн}}$ и отрезком, соединяющим тела в начале, а L — его длина, то $d_{\min} = L\sin\gamma$, и это случится через

$t = \frac{L\cos\gamma}{v_{отн}}$.

4. $v_{отн}$ и угол γ — из треугольника скоростей.

Столкнутся тела, только если $\vec{v}_{отн}$ смотрит точно на первое тело: $\gamma = 0$.



В системе первого тела второе идёт по прямой; наименьшее расстояние — перпендикуляр.

Частые ошибки

Частая ошибка

Складывать модули: $v = v_{отн} + u$ верно, только когда векторы сонаправлены. В остальных случаях — треугольник, теорема Пифагора или косинусов.

Частая ошибка

Считать, что катер идёт туда, куда смотрит нос, *относительно берега*. Вдоль носа направлена скорость относительно воды; относительно берега катер сносит течением.

Частая ошибка

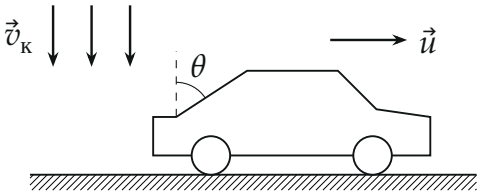
Перепутать порядок вычитания. Скорость второго тела относительно первого — $\vec{v}_2 - \vec{v}_1$ (из скорости того, *чьё* движение смотрим, вычитаем скорость того, *откуда* смотрим), а не наоборот.

Частая ошибка

Искать наименьшее расстояние «когда одно тело проходит перекрёсток» или «когда скорости равны». Расстояние наименьшее, когда отрезок между телами перпендикулярен их относительной скорости.

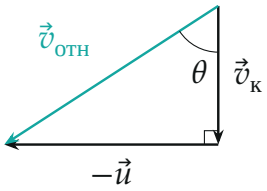
Разобранные примеры

Пример 1. [«Шаг в будущее» 2018/19, отборочный этап, 9 кл.] Идёт дождь, ветра нет. Скорость капель относительно земли $v_к = 18$ м/с. Под каким углом к вертикали должно быть наклонено заднее стекло автомобиля, чтобы капли перестали попадать на него, когда автомобиль разгонится до скорости $u = 100$ км/ч?



▲ **Решение. Что происходит.** Капли попадают на стекло или нет — это вопрос о движении капель *относительно автомобиля*. Перейдём в систему отсчёта автомобиля (метод 1): там капли летят наискосок, назад и вниз.

1. Относительная скорость капель. Закон сложения скоростей: $\vec{v}_к = \vec{v}_{отн} + \vec{u}$, откуда $\vec{v}_{отн} = \vec{v}_к - \vec{u}$. Векторы $\vec{v}_к$ (вниз) и $-\vec{u}$ (назад) перпендикулярны, треугольник прямоугольный.



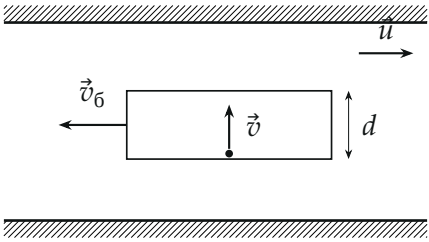
2. Условие «не попадают». Относительно машины капли летят вдоль $\vec{v}_{отн}$. Если стекло параллельно этой прямой, капли скользят мимо, если наклонено к вертикали меньше — тем более. Граница — стекло параллельно $\vec{v}_{отн}$, угол стекла с вертикалью равен углу $\vec{v}_{отн}$ с вертикалью:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{u}{v_к} = \frac{27{,}8}{18} \approx 1{,}54, \qquad \theta \approx 57°.$$

Проверка. Безразмерно: отношение скоростей. Предел: машина стоит ($u = 0$) — $\theta = 0$, капли не попадают только на вертикальное стекло; чем быстрее машина, тем положе может быть стекло. При скорости ровно 100 км/ч капли перестают попадать на стекло с наклоном 57° к вертикали.

Ответ. $\theta = \operatorname{arctg}\dfrac{u}{v_к} \approx 57°$.

Пример 2. [МОШ 2025/26, отборочный этап, 9 кл.] По реке, скорость течения которой $u = 0{,}5$ м/с, против течения движется баржа. Скорость баржи в стоячей воде $V = 2{,}5$ м/с. По палубе от борта к борту ходит матрос; его скорость относительно баржи $v = 1{,}0$ м/с и всё время перпендикулярна скорости баржи. Ширина палубы $d = 10$ м, матрос начинает от борта, временем разворота пренебречь. Найдите: скорость матроса относительно берега; модуль его перемещения относительно баржи за минуту; модуль перемещения относительно берега за то же время; путь относительно берега за минуту. Считайте $\sqrt{5} \approx 2{,}2$.



Вид сверху: баржа идёт против течения, матрос ходит поперёк палубы.

▲ **Решение. Что происходит.** Здесь три системы отсчёта: берег, вода и баржа. Скорость баржи дана относительно воды, скорость матроса — относительно баржи. Закон сложения применяем дважды: сначала для баржи, потом для матроса (метод 1).

1. Скорость баржи. Относительно берега $\vec{v}_б = \vec{V} + \vec{u}$; векторы противоположны, $v_б = V - u = 2{,}0$ м/с.

2. Скорость матроса. $\vec{v}_м = \vec{v} + \vec{v}_б$, $\vec{v} \perp \vec{v}_б$, по теореме Пифагора

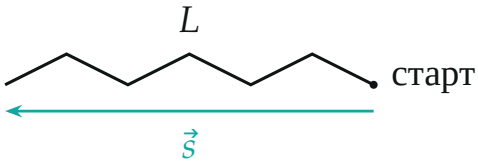
$$v_м = \sqrt{v^2 + v_б^2} = \sqrt{5} \approx 2{,}2\ \text{м/с}.$$

Когда матрос разворачивается, $\vec{v}$ меняет направление, а модуль $v_м$ остаётся тем же.

3. Перемещение относительно баржи. Палубу матрос проходит за $\frac{d}{v} = 10$ с; за 60 с — 6 раз, то есть возвращается к тому борту, откуда начал: $s_{отн} = 0$.

4. Перемещение относительно берега. Закон сложения перемещений: $\vec{s} = \vec{s}_{отн} + \vec{v}_б t = \vec{v}_б t$, $s = 2 \cdot 60 = 120$ м.

5. Путь относительно берега. Модуль скорости всё время $\sqrt{5}$ м/с, поэтому $L = v_м t = 60\sqrt{5} \approx 132$ м (точнее 134 м). Траектория — зигзаг: каждые 10 с матрос смещается на 20 м вдоль реки и на 10 м поперёк.

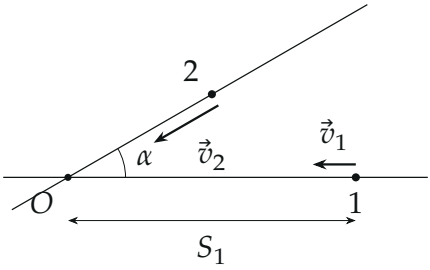


Траектория матроса относительно берега за минуту (масштаб один по обеим осям).

Проверка. Размерности верны. Путь не меньше модуля перемещения: $132 > 120$; если матрос стоит ($v = 0$), путь равен перемещению, 120 м.

Ответ. $\sqrt{5} \approx 2{,}2$ м/с; 0; 120 м; $60\sqrt{5} \approx 132$ м (134 м без округления корня).

Пример 3. [МОШ 1992/93, заключительный этап, 10 кл.] По двум дорогам, пересекающимся под углом $\alpha = 30°$, к перекрёстку едут два автомобиля: первый со скоростью $v_1 = 10$ м/с, второй — со скоростью $v_2 = 10\sqrt{3} \approx 17{,}3$ м/с. Когда расстояние между автомобилями было наименьшим, первый находился на расстоянии $S_1 = 200$ м от перекрёстка. На каком расстоянии S_2 от перекрёстка был в этот момент второй автомобиль?

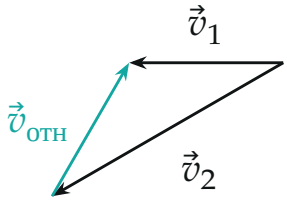


▲ **Решение. Что происходит.** Оба едут равномерно и прямо — в системе отсчёта второго автомобиля первый тоже едет равномерно и по прямой с $\vec{v}_{\text{отн}} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$. Наименьшее расстояние — когда отрезок между машинами перпендикулярен $\vec{v}_{\text{отн}}$ (метод 3). Значит, нужно направление $\vec{v}_{\text{отн}}$.

1. Треугольник скоростей. Обе скорости направлены к перекрёстку, угол между ними α. По теореме косинусов

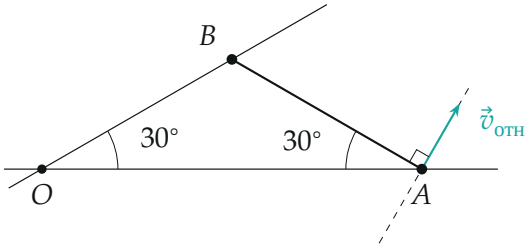
$$v_{\text{отн}}^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\alpha = 100 + 300 - 300, \qquad v_{\text{отн}} = 10\,\text{м/с} = v_1.$$

Треугольник $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}_{\text{отн}}$ равнобедренный: углы при основании v_2 равны $\alpha = 30°$, угол между $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_{\text{отн}}$ — $120°$. Значит, $\vec{v}_{\text{отн}}$ образует $60°$ с дорогой первого автомобиля и смотрит от перекрёстка.



2. Момент наибольшего сближения. Пусть A — первая машина, B — вторая, O — перекрёсток. $AB \perp \vec{v}_{\text{отн}}$, а $\vec{v}_{\text{отн}}$ идёт под $60°$ к дороге OA, поэтому $\angle OAB = 90° - 60° = 30°$. В треугольнике AOB два угла по $30°$ — он равнобедренный, $OB = AB$, и высота из B делит OA пополам:

$$S_2 = OB = \frac{S_1}{2\cos\alpha} = \frac{S_1}{\sqrt{3}} \approx 115\,\text{м}.$$



Наибольшее сближение: $AB \perp \vec{v}_{отн}$, треугольник AOB равнобедренный.

Проверка. Размерность верна. Второй способ — координаты: ось x по дороге OA, $\vec{r}_1 = (200;\,0)$, $\vec{r}_2 = S_2(\cos 30^\circ;\,\sin 30^\circ)$, $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = (5;\,8{,}66)$ м/с. Условие $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\cdot(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = 0$ даёт $1000 - 8{,}66\,S_2 = 0$, $S_2 \approx 115$ м. Второй автомобиль быстрее, поэтому в момент сближения он ближе к перекрёстку.

Ответ. $S_2 = \dfrac{S_1}{2\cos\alpha} = \dfrac{S_1}{\sqrt{3}} \approx 115$ м.

Как решать листок

Сложность 2–3 — эскалаторы, поезда, ветер: метод 1, сложение скоростей вдоль одной прямой или прямоугольный треугольник. Лодки, катера, «снос» — метод 2, система отсчёта воды. «Наименьшее расстояние», «встретятся ли», два брошенных камня — метод 3. Скорость относительно движущегося тела всегда считайте векторно: $\vec{v} - \vec{u}$.