Равномерное движение, средняя скорость

После пособия вы сможете

- записывать равномерное движение через путь $s = vt$ и через координату $x = x_0 + v_x t$;
- находить среднюю скорость как весь путь, делённый на всё время, а не как среднее скоростей;
- решать задачи на встречу и догон через скорость сближения или через координаты;
- решать задачи без чисел в условии через отношения путей и времён.

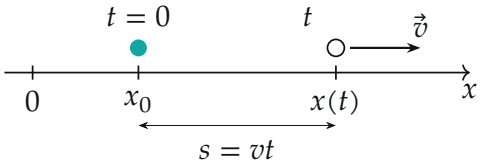
Теория кратко

Определение 1

Движение *равномерное*, если тело за любые равные промежутки времени проходит равные пути. Скорость v — путь за единицу времени, и он не меняется: $s = vt$. Если тело движется вдоль прямой в одну сторону, удобно ввести ось x и начало отсчёта; тогда координата

$$x = x_0 + v_x t,$$

где x_0 — координата в момент $t = 0$, $v_x = +v$, если тело едет по оси, и $v_x = -v$, если против.



Тело в начальный и в произвольный момент: $x = x_0 + v_x t$.

Координата удобна тем, что знак сидит в проекции v_x, а не в наших рассуждениях: для двух тел, едущих навстречу, пишем две формулы одинакового вида и не разбираем, кто куда едет.

Определение 2

Средняя (путевая) скорость — весь путь, делённый на всё время, вместе с остановками:

$$v_{\text{ср}} = \frac{L}{t} = \frac{s_1 + s_2 + \ldots}{t_1 + t_2 + \ldots}.$$

Факт 1

- Равные *времена* со скоростями v_1 и v_2: $v_{\text{ср}} = \dfrac{v_1 + v_2}{2}$ — среднее арифметическое.
- Равные *пути*: $v_{\text{ср}} = \dfrac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}$ — оно всегда меньше среднего арифметического: медленный участок длится дольше и весит больше.
- Перевод единиц: 1 м/с = 3,6 км/ч, 36 км/ч = 10 м/с.

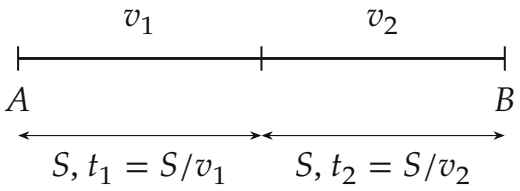
Методы

Метод 1

Весь путь на всё время. Когда применять: «средняя скорость», «половину пути …, а вторую половину …», «с остановкой».

1. Нарисуйте путь отрезком и разбейте его на участки, как сказано в условии: по пути или по времени.
2. Неизвестный путь или время обозначьте буквой, например весь путь $2S$. Не бойтесь лишней буквы — в конце она сократится.
3. Для каждого участка запишите $t_i = s_i/v_i$ (или $s_i = v_i t_i$), сложите пути и времена отдельно.
4. Поделите сумму путей на сумму времён. Проверка: $v_{\text{ср}}$ лежит между наименьшей и наибольшей скоростью.

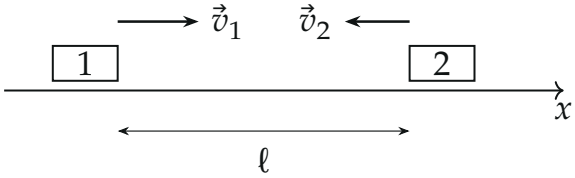
Пример. Половину пути со скоростью v_1, половину — со скоростью v_2. Весь путь $2S$, время $S/v_1 + S/v_2$, и $v_{\text{ср}} = \dfrac{2S}{S/v_1 + S/v_2} = \dfrac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}$. При 60 и 40 км/ч это 48 км/ч, а не 50.



Метод 2

Встреча и догон. Когда применять: «навстречу», «догонит», «обгонит», «через сколько встретятся», движутся поезда, колонны, люди на мосту.

1. Нарисуйте оба тела в начальный момент и расстояние ℓ между ними; отметьте, куда смотрят скорости.
2. *Способ скорости сближения.* Перейдём в систему отсчёта, связанную с одним телом: оно стоит, а второе приближается со скоростью $v_1 + v_2$ (навстречу) или $v_1 - v_2$ (вдогонку). Время до встречи $\tau = \ell/v_{\text{сбл}}$.
3. *Способ координат.* Одна ось, одно начало отсчёта: $x_1 = x_{01} + v_{1x}t$, $x_2 = x_{02} + v_{2x}t$. Встреча — это $x_1 = x_2$ в один и тот же момент.
4. У длинного тела (поезд, колонна) следите за *одной* точкой: головой или хвостом. Проехать мимо столба — пройти свою длину, проехать мост — длину моста плюс свою.



Навстречу: $\tau = \ell/(v_1 + v_2)$; если бы второе тело ехало вправо медленнее первого — $\tau = \ell/(v_1 - v_2)$.

Пример. Поезд проходит мимо столба за t_1, а мост длиной ℓ — за t_2. Следим за хвостом поезда: мимо столба он проходит длину поезда L, а

мост — путь $L + \ell$. Скорость одна: $v = \dfrac{L}{t_1} = \dfrac{L+\ell}{t_2}$, откуда $v = \dfrac{\ell}{t_2 - t_1}$ и $L = \dfrac{\ell\, t_1}{t_2 - t_1}$. Неизвестных две ($v$ и L) — и уравнений две, по одному на каждый проезд.

Метод 3

Отношения вместо чисел. Когда применять: в условии нет скоростей и расстояний, только «во столько раз», «за то же время», «пока один …, другой …».

1. Найдите в условии два процесса с общим временем или общим путём.
2. Одинаковое время: $\dfrac{s_1}{s_2} = \dfrac{v_1}{v_2}$. Одинаковый путь: $\dfrac{t_1}{t_2} = \dfrac{v_2}{v_1}$.
3. Из первой пары найдите отношение скоростей, во второй пустите его в ход. Неизвестных больше, чем уравнений? Так и задумано: спрашивают тоже отношение.

Частые ошибки

Частая ошибка

Считать среднюю скорость средним арифметическим скоростей. Это верно только для равных *времён*. На равных путях — нет: 60 и 40 км/ч дают 48, а не 50 км/ч.

Частая ошибка

Забыть остановку. Средняя скорость — весь путь на *всё* время, и время отдыха в знаменателе есть, хотя путь за него не прибавился.

Частая ошибка

Путать «половину пути» и «половину времени»: это разные точки на дороге. И считать этажи вместо пролётов: с первого этажа на четвёртый — три пролёта, а не четыре.

Частая ошибка

Складывать километры в час с метрами в секунду. Переведите всё в

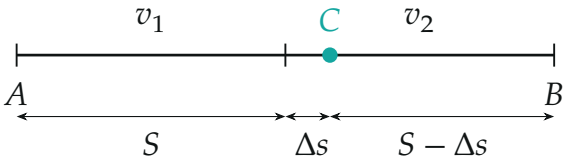
одни единицы до подстановки чисел, а лучше решайте в буквах и подставляйте в конце.

Разобранные примеры

Пример 1. [«Бельчонок» 2015/16, заключительный этап, 7 кл.] Автомобиль первую половину пути двигался со скоростью 60 км/ч, а вторую — со скоростью 40 км/ч. Какова средняя скорость автомобиля за первую половину времени?

▲ **Решение. Что происходит.** Путь разбит пополам по пути, а спрашивают про половину по времени — это другая точка дороги. Средняя скорость — путь, делённый на время (метод 1), значит, надо найти, где машина в момент $T/2$.

Обозначения. Весь путь $2S$, $v_1 = 60$ км/ч, $v_2 = 40$ км/ч. Время на половинах $t_1 = S/v_1$ и $t_2 = S/v_2$, всё время $T = t_1 + t_2$.



C — где машина в момент $T/2$: за серединой пути.

1. Где машина в момент $T/2$. Так как $v_1 > v_2$, первая половина пройдена быстрее: $t_1 < t_2$, значит, $t_1 < T/2$. К середине времени машина уже на второй половине и едет там ещё время

$$\frac{T}{2} - t_1 = \frac{t_2 - t_1}{2} = \frac{S}{2}\left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1}\right).$$

2. Путь за первую половину времени. На втором участке скорость v_2, поэтому $\Delta s = v_2\left(\frac{T}{2} - t_1\right) = \frac{S}{2}\left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right)$, и весь путь до точки C

$$L = S + \Delta s = \frac{3v_1 - v_2}{2v_1}\,S.$$

3. Средняя скорость. Делим путь на время $T/2 = \dfrac{S}{2} \cdot \dfrac{v_1+v_2}{v_1 v_2}$:

$$v_{\text{ср}} = \frac{L}{T/2} = \frac{(3v_1 - v_2)\,v_2}{v_1+v_2} = \frac{140\cdot 40}{100} = 56\ \text{км/ч}.$$

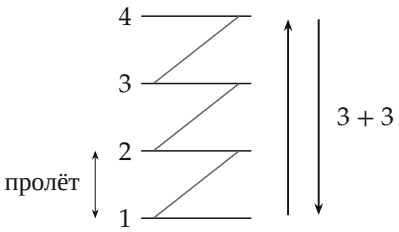
Буква S сократилась, как и обещал метод.

Проверка. Размерность: км/ч · км/ч/ км/ч. Предел $v_1 = v_2 = v$ даёт $v_{\text{ср}} = v$. Число 56 лежит между 40 и 60 и больше средней на всём пути (48): в первой половине времени быстрый участок занимает большую долю.

Ответ. $v_{\text{ср}} = \dfrac{(3v_1 - v_2)v_2}{v_1+v_2} = 56$ км/ч.

Пример 2. [ВсОШ 2011/12, региональный этап, 9 кл.] Чебурашка и Крокодил Гена решили устроить забег по лестнице. Выяснилось, что Чебурашка успевает три раза добежать до четвёртого этажа и вернуться на первый за время, пока Гена поднимается на шестнадцатый этаж. На какой этаж успеет подняться Чебурашка, пока Гена будет бегать с первого этажа на шестой и обратно? Чебурашка и Гена бегают вверх и вниз с постоянными скоростями.

▲ **Решение. Что происходит.** Ни скоростей, ни времени нет, есть два забега с общим временем — метод 3. Скорость каждого вверх и вниз одна и та же (иначе данных не хватило бы). Считаем путь в пролётах между этажами, а не в этажах.



С первого этажа на четвёртый и обратно — 6 пролётов.

1. Первый забег: отношение скоростей. За общее время T Чебурашка пробегает $3\cdot(3+3) = 18$ пролётов, Гена — $16-1 = 15$. Время одно,

поэтому пути относятся как скорости:

$$\frac{v_\text{Ч}}{v_\text{Г}} = \frac{18}{15} = \frac{6}{5}.$$

2. Второй забег. Гена бежит с первого на шестой и обратно: $5+5 = 10$ пролётов. За то же время Чебурашка пробегает в $6/5$ раза больше:

$$n = 10 \cdot \frac{6}{5} = 12 \text{ пролётов},$$

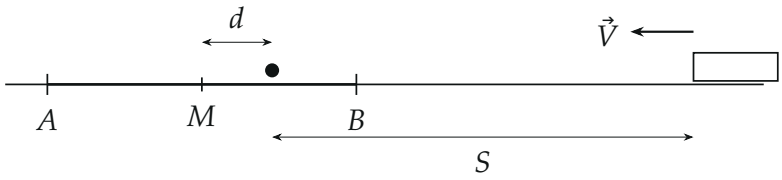
то есть поднимается с первого этажа на $1 + 12 = 13$-й.

Обратите внимание: если считать этажи вместо пролётов, выйдет $v_\text{Ч}/v_\text{Г} = 24/16$ и ответ 19 — неверно.

Проверка. Второй способ — через времена: Гена тратит на пролёт $T/15$, Чебурашка — $T/18$; второй забег длится $10 \cdot T/15 = 2T/3$, и Чебурашка успевает $\frac{2T}{3} : \frac{T}{18} = 12$ пролётов. Он быстрее, и $12 > 10$ — так и должно быть.

Ответ. На 13-й этаж.

Пример 3. [МОШ 2015/16, заключительный этап, 7 кл.] Турист переходил узкий железнодорожный мост от точки A к точке B. Находясь на расстоянии $d = 50$ м от середины моста, ближе к B, он увидел поезд, движущийся ему навстречу со скоростью $V = 54$ км/ч, который в этот момент был на расстоянии $S = 300$ м от туриста. Турист побежал вперёд, навстречу поезду, со скоростью $v = 5$ м/с и достиг точки B, когда поезд был в $h = 60$ м от неё. Успел бы турист добежать до точки A, если бы, увидев поезд, сразу развернулся и побежал с той же скоростью назад? Если да, то на каком расстоянии от A был бы поезд в этот момент; если нет, то на каком расстоянии от A поезд догнал бы его? Скорость поезда постоянна.



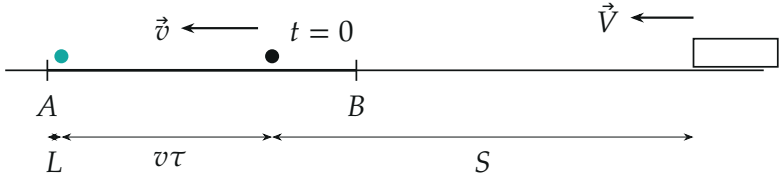
Мост AB, его середина M; турист — точка в d от середины.

▲ **Решение. Что происходит.** Два сценария начинаются в один момент. Первый даёт то, чего нет в условии, — длину моста. Второй — догон: поезд нагоняет убегающего туриста (метод 2). Переведём скорость: $V = 54\,\text{км/ч} = 15\,\text{м/с}$.

1. Первый сценарий: где точка B. Пусть от туриста до B расстояние x. Турист бежит его за время x/v, поезд за это же время проходит $S-x-h$. Время одно:

$$\frac{x}{v} = \frac{S-h-x}{V} \;\Rightarrow\; x = \frac{v(S-h)}{V+v} = \frac{5\cdot 240}{20} = 60\,\text{м}.$$

2. Длина моста. Половина моста $MB = d + x = 110$ м, а от туриста до A — $x + 2d = 160$ м.



Второй сценарий: чёрная точка и поезд — в момент $t = 0$, бирюзовая точка — где поезд догонит туриста, в L от A.

3. Второй сценарий: догон. Теперь турист и поезд едут в одну сторону, к A. В системе отсчёта туриста поезд приближается со скоростью $V - v = 10\,\text{м/с}$ и должен закрыть расстояние S:

$$\tau = \frac{S}{V-v} = 30\,\text{с}.$$

За это время турист пробежит $v\tau = 150$ м, а до A было 160 м. Не успел: поезд догонит его на расстоянии

$$L = x + 2d - \frac{Sv}{V-v} = 60 + 100 - 150 = 10\,\text{м}$$

от точки A.

Проверка. Все слагаемые — в метрах. Второй способ: до A турист бежал бы $160/5 = 32$ с, а поезд догоняет за 30 с — раньше, вывод тот же. Координатами: за 30 с поезд прошёл 450 м и оказался в 150 м за начальной точкой туриста — там же, где и турист. Бежать к ближнему концу моста и навстречу поезду оказалось правильнее.

Ответ. Не успел бы: поезд догнал бы туриста в $L = \dfrac{v(S-h)}{V+v} + 2d - \dfrac{Sv}{V-v} = 10$ м от точки A.

Как решать листок

Сложность 1–3 — переводы единиц, $s = vt$ и средняя скорость: метод 1. Встречи, поезда, мосты, колонны (сложность 3–5) — метод 2, со скоростью сближения или координатами. Задачи без чисел, «во сколько раз», лестницы и круги стадиона — метод 3. Сложные задачи (от 6) обычно сочетают два метода — начинайте с рисунка «было» и «стало».