Равновесие тел, моменты сил

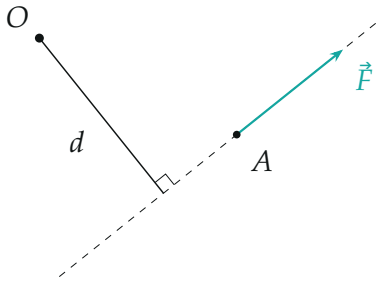
После пособия вы сможете

- находить плечо силы и записывать два условия равновесия твёрдого тела;
- выбирать полюс так, чтобы неизвестные силы выпали из правила моментов;
- находить направление реакции шарнира и опоры правилом трёх сил;
- пользоваться свойством палочки: на лёгкий стержень с двумя силами они действуют вдоль него;
- находить условия, при которых равновесие возможно: $T \geq 0$, $N \geq 0$, $F_{\text{тр}} \leq \mu N$.

Теория кратко

Определение 1

Выберем точку O — *полюс*. Её выбираем сами, где удобно; она не обязана быть осью, вокруг которой что-то вращается. Через точку приложения силы $\vec{F}$ проведём *линию действия* — прямую вдоль силы — и опустим на неё перпендикуляр из O. Его длина d — *плечо* силы, а $M = Fd$ — *момент* силы относительно O.



Плечо — перпендикуляр из O на линию действия силы (штрих), а не отрезок OA.

Каждую силу мысленно оставляем одну и смотрим, куда она поворачивает тело вокруг O. Моменты сил, поворачивающих по часовой стрелке, складываем в $M_{\text{по}}$, против — в $M_{\text{пр}}$. Сила, линия действия которой проходит через O, момента не даёт.

Факт 1

Условия равновесия твёрдого тела.

1. Первое: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots = \vec{0}$ — сумма всех сил равна нулю (центр масс не разгоняется).
2. Второе (правило моментов): $M_{\text{по}} = M_{\text{пр}}$ относительно *одного и того же* полюса, любого.

Правило моментов верно, когда тело покоится, когда оно вращается равномерно и когда тело лёгкое (без массы) — для лёгкого тела всегда, даже если оно движется.

Систему тел можно брать целиком: силы взаимодействия тел равны, противоположны и лежат на одной прямой, у них одно плечо — их моменты сокращаются. Пишем только внешние силы.

Методы

Метод 1

Полюс там, где неизвестные силы. Когда применять: всегда в статике; особенно когда сил много, а спрашивают про одну.

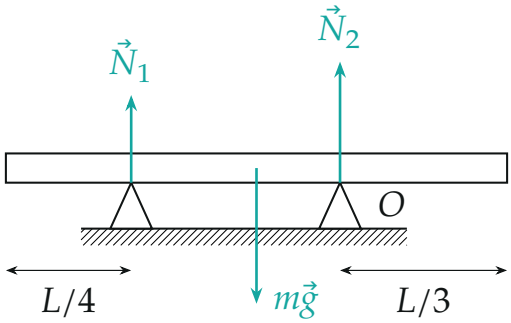
1. Нарисуйте все силы на тело (или на систему целиком). Сила тяжести — из центра масс; её можно оставить и по кускам, у каждого куска — в его центре.
2. Запишите первое условие в проекциях — это до двух уравнений.
3. Полюс поставьте в точку, где пересекаются линии действия неизвестных сил, которые сейчас не нужны: шарнир, опора, угол. Их моменты нулевые.
4. Посчитайте уравнения и неизвестные. Не хватает — правило моментов относительно другой точки нового не даст; ищите связь (лёгкий стержень, трение, деформации).

Пример. Однородное бревно массы m и длины L лежит на двух опо-

рах: в $L/4$ от левого конца и в $L/3$ от правого. Полюс — в правой опоре O, тогда $\vec{N}_2$ выпадает:

$$N_1 \cdot \frac{5L}{12} = mg \cdot \frac{L}{6} \;\Rightarrow\; N_1 = \frac{2}{5}mg, \qquad N_2 = mg - N_1 = \frac{3}{5}mg.$$

Под центром масс ближе правая опора — на неё и давит сильнее.



Метод 2

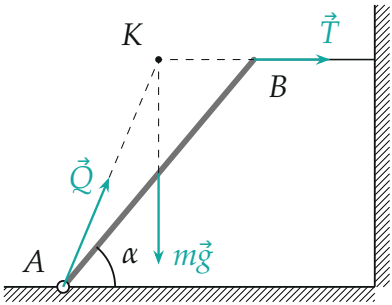
Правило трёх сил. Когда применять: на тело действуют ровно три силы, и направление одной неизвестно — реакция шарнира, полная реакция шероховатой опоры.

1. Продлите линии действия двух известных сил до пересечения в точке K.
2. Правило моментов относительно K: две силы момента не дают, значит, и у третьей плечо равно нулю — её линия действия тоже проходит через K.
3. Куда она смотрит вдоль этой линии, скажет первое условие равновесия. Если две силы параллельны, третья им тоже параллельна.

Сила реакции шероховатой опоры — это одна сила $\vec{Q} = \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}$. Объединяя их, часто получаем ровно три силы, а угол $\vec{Q}$ с нормалью сразу даёт $F_{\text{тр}}/N$.

Пример. Однородный стержень длины $2l$ стоит на шарнире A под углом α к полу, верхний конец B держит горизонтальная нить. Прави-

ло моментов относительно A убирает реакцию шарнира: $mg \cdot l\cos\alpha = T \cdot 2l\sin\alpha$, $T = \frac{1}{2}mg\operatorname{ctg}\alpha$. Линии $\vec{T}$ и $m\vec{g}$ пересекаются в точке K — на вертикали через середину стержня, на высоте $2l\sin\alpha$; от шарнира по горизонтали до неё $l\cos\alpha$. Поэтому реакция $\vec{Q}$ наклонена к полу под углом β, где $\operatorname{tg}\beta = 2\operatorname{tg}\alpha$ — круче стержня.



Метод 3

Свойство палочки. Когда применять: в конструкции есть лёгкий стержень, лёгкая опора, лёгкая распорка, и силы на него приложены только в двух точках.

1. Масса равна нулю, поэтому $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ — силы равны и противоположны, как бы стержень ни двигался.
2. Правило моментов для лёгкого тела верно всегда. Относительно точки 1: $F_2 d = 0$, значит, плечо $d = 0$ — обе силы лежат на одной прямой, на самом стержне.
3. Вывод: силы на лёгкий стержень направлены вдоль него, навстречу друг другу или наружу. Реакция пола на лёгкую ножку — тоже вдоль ножки, и $F_{\text{тр}} = N\operatorname{tg}\beta$, где β — угол ножки с вертикалью.

Метод 4

При каких условиях равновесие возможно. Когда применять: «при каком μ», «при каких массах», «не опрокинется ли».

1. Найдите силы из условий равновесия в общем виде.
2. Наложите физические ограничения: нить не провисла, $T \geq 0$;

тело не оторвалось, $N \geq 0$; нет проскальзывания, $F_{\text{тр}} \leq \mu N$ — в *каждой* точке, где оно может начаться.

3. На грани опрокидывания вся реакция опоры — в ребре, вокруг которого тело поворачивается.

Частые ошибки

Частая ошибка

Брать за плечо расстояние до точки приложения силы. Плечо — до *линии действия*: у силы тяжести стержня длины l, наклонённого под углом α к горизонту, относительно его конца оно равно $\frac{l}{2}\cos\alpha$, а не $\frac{l}{2}$.

Частая ошибка

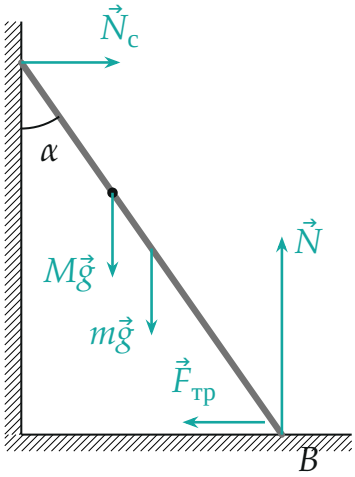
Считать силы на лёгкую опору за три — $\vec{F}$, $\vec{N}$, $\vec{F}_{\text{тр}}$ — и не применять свойство палочки. $\vec{N}$ и $\vec{F}_{\text{тр}}$ — две составляющие одной силы $\vec{Q}$. И наоборот: правило трёх сил — только для трёх сил, свойство палочки — только для двух и только у лёгкого тела.

Частая ошибка

Ставить $F_{\text{тр}} = \mu N$ сразу «во всех ножках». Трение покоя находится из условий равновесия; μN — только его предел. Силы трения на двух ножках могут быть равны, а μN у них разные: проскальзывает та, где N меньше.

Разобранные примеры

Пример 1. [Белорусская 1989/90, заключительный этап, 9 кл.] К гладкой вертикальной стене приставлена лестница массой m, образуя с ней угол α. Какой должен быть коэффициент трения между полом и лестницей, чтобы по ней мог взобраться человек массой M?



Силы на лестницу; человек — на расстоянии s от нижнего конца B.

▲ **Решение. Что происходит.** Чем выше человек, тем сильнее лестница давит на стену и тем больше нужна сила трения внизу. Найдём трение для человека на высоте s и проверим $F_{тр} \le \mu N$ для всех s.

Обозначения. l — длина лестницы, s — расстояние от нижнего конца B до человека. Стена гладкая: её реакция $\vec{N}_c$ горизонтальна. Пол действует силами $\vec{N}$ и $\vec{F}_{тр}$ — трение к стене: без него низ лестницы уехал бы от стены.

1. Первое условие равновесия в проекциях на горизонталь и вертикаль:

$$F_{тр} = N_c, \qquad N = (M+m)g.$$

2. Правило моментов относительно B — там приложены обе неизвестные силы пола. Плечи силы тяжести — горизонтальные расстояния: $\frac{l}{2}\sin\alpha$ и $s\sin\alpha$; плечо $\vec{N}_c$ — высота верхнего конца $l\cos\alpha$:

$$N_c\, l\cos\alpha = mg\,\frac{l}{2}\sin\alpha + Mg\,s\sin\alpha \;\Rightarrow\; F_{тр} = \Big(\frac{m}{2} + M\frac{s}{l}\Big)g\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

3. Нет проскальзывания. Нужно $F_{тр} \le \mu N$ при всех $0 \le s \le l$:

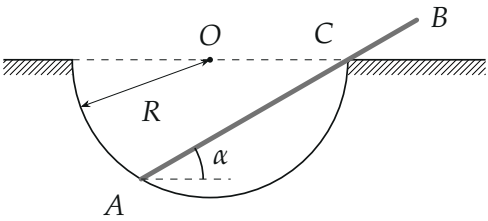
$$\mu \ge \frac{\frac{m}{2} + M\frac{s}{l}}{M+m}\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Правая часть растёт с s и наибольшая наверху, при $s = l$. Соберём ответ.

Проверка. μ безразмерен. Без человека ($M = 0$) получаем известное $\mu \geq \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$; при $M \gg m$ — $\mu \geq \operatorname{tg}\alpha$: вся масса наверху. Опаснее всего последняя ступенька.

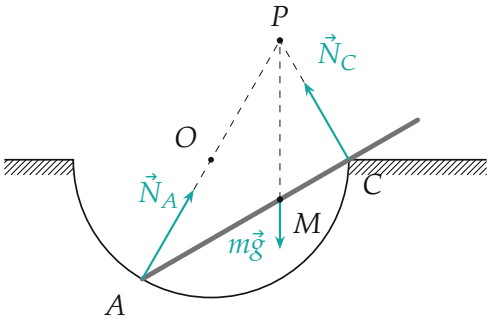
Ответ. $\mu \geq \dfrac{M + m/2}{M + m}\operatorname{tg}\alpha$.

Пример 2. [МОШ 2016/17, отборочный этап, 10 кл.] В горизонтальной плоской плите сделано углубление в виде полусферы радиусом R. В углубление опущен однородный тонкий стержень AB неизвестной длины l ($2R < l < 4R$). Найдите длину стержня, если он образует с горизонтом угол α. Трения нигде нет.



▲ **Решение. Что происходит.** Трения нет, поэтому на стержень действуют три силы: $m\vec{g}$ из середины M, реакция дна в точке A — по нормали к сфере, то есть по радиусу к центру O, и реакция края C — перпендикулярно стержню. Сил ровно три — правило трёх сил (метод 2). Главная идея задачи — найти точку, где пересекаются реакции.

1. Где пересекаются реакции. Продлим AO до точки P на окружности, диаметрально противоположной A. Угол ACP опирается на диаметр AP, значит, он прямой: $PC \perp AC$. Значит, линия реакции края идёт через ту же точку P.



Реакции $\vec{N}_A$ и $\vec{N}_C$ пересекаются в точке P; через неё же проходит вертикаль центра M.

2. Геометрия. Треугольник AOC равнобедренный ($OA = OC = R$), угол при A равен углу при C, то есть α. Отсюда $AC = 2R\cos\alpha$, а радиус AO наклонён к горизонту под углом 2α, и горизонтальное расстояние от A до P равно $AP\cos 2\alpha = 2R\cos 2\alpha$.

3. Правило трёх сил. Сила тяжести тоже проходит через P, значит, середина стержня M лежит на вертикали через P. Горизонтальное расстояние от A до M равно $\frac{l}{2}\cos\alpha$:

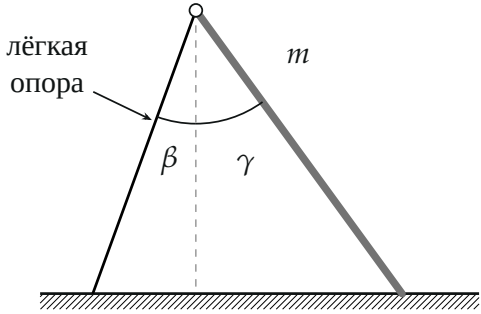
$$\frac{l}{2}\cos\alpha = 2R\cos 2\alpha \;\Rightarrow\; l = 4R\,\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}.$$

Проверка. Размерность — длина. При $\alpha \to 0$ получаем $l \to 4R$: стержень лежит по диаметру, а его середина — над центром O. Чем круче стержень, тем он короче: середина должна сместиться к нижнему концу. И всегда $\frac{l}{2} < AC = 2R\cos\alpha$ — середина внутри лунки, иначе стержень вывалился бы. Обратите внимание: ни одну силу мы так и не нашли — вся физика задачи в одной точке P.

Ответ. $l = 4R\,\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}$.

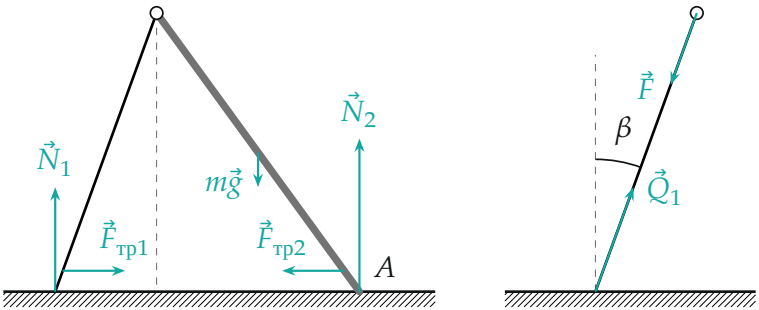
Пример 3. [ВсОШ 2018/19, заключительный этап, 9 кл.] На рисунке — упрощённая модель стремянки: лёгкая опора и массивная часть соединены шарниром и наклонены к вертикали под углами $\beta = 20°$ и γ, причём $\operatorname{tg}\gamma = 2\operatorname{tg}\beta$. Масса лестницы $m = 20$ кг. С какой силой взаимодействуют части лестницы? Трения в шарнире нет. Коэффициент трения μ между полом и

обеими частями одинаков. При каком минимальном μ части лестницы не будут разъезжаться? $g = 10\,\text{м/с}^2$.



▲ **Решение. Что происходит.** Для всей стремянки двух условий равновесия хватит на силы N_1, N_2, но не на трение: силы трения на ножках лишь равны друг другу. Недостающую связь даёт лёгкая опора — свойство палочки (метод 3).

Обозначения. h — высота шарнира. Лёгкая ножка стоит в $a = h\,\text{tg}\,\beta$ левее вертикали шарнира, тяжёлая — в $h\,\text{tg}\,\gamma = 2a$ правее. Центр тяжёлой части — на её середине, в a правее вертикали. На лёгкую ножку пол действует силами $\vec{N}_1$, $\vec{F}_{\text{тр1}}$, на тяжёлую — $\vec{N}_2$, $\vec{F}_{\text{тр2}}$. Без трения ножки разъехались бы, поэтому трение тянет их друг к другу.



Слева — внешние силы на всю стремянку, справа — силы на лёгкую опору.

1. Первое условие равновесия для стремянки целиком: $N_1 + N_2 = mg$, $F_{\text{тр1}} = F_{\text{тр2}}$.

2. Правило моментов относительно A — точки опоры тяжёлой ножки: через неё проходят $\vec{N}_2$ и обе силы трения. Плечо $\vec{N}_1$ — $a + 2a = 3a$, плечо $m\vec{g}$ — a:

$$N_1 \cdot 3a = mg \cdot a \;\Rightarrow\; N_1 = \frac{mg}{3}, \qquad N_2 = \frac{2mg}{3}.$$

Высота h сократилась — её и не давали.

3. Свойство палочки. На лёгкую опору действуют ровно две силы: $\vec{F}$ от массивной части через шарнир и полная реакция пола $\vec{Q}_1 = \vec{N}_1 + \vec{F}_{\text{тр1}}$. Значит, обе направлены вдоль опоры. Проекция первого условия равновесия опоры на вертикаль:

$$F\cos\beta = N_1 \;\Rightarrow\; F = \frac{mg}{3\cos\beta} = \frac{200}{3 \cdot 0{,}940} \approx 71\ \text{Н}.$$

Сила $\vec{Q}_1$ наклонена к вертикали на β, поэтому $F_{\text{тр1}} = N_1 \operatorname{tg}\beta$.

4. Нет проскальзывания. Силы трения равны, а нормальные реакции — нет, $N_1 < N_2$. Условие $F_{\text{тр}} \le \mu N$ строже для лёгкой ножки:

$$N_1 \operatorname{tg}\beta \le \mu N_1 \;\Rightarrow\; \mu \ge \operatorname{tg}\beta \approx 0{,}36,$$

и для тяжёлой тогда $F_{\text{тр}} \le \mu N_2$ выполнено с запасом.

Проверка. F — в ньютонах, μ безразмерен. При $\beta \to 0$ опора вертикальна: $F \to mg/3 = N_1$, трение не нужно, $\mu_{\min} \to 0$. Разъезжается лёгкая ножка: трение на ножках одинаковое, а прижата она слабее.

Ответ. $F = \dfrac{mg}{3\cos\beta} \approx 71$ Н; $\mu_{\min} = \operatorname{tg}\beta \approx 0{,}36$.

Как решать листок

Сложность 1–3 (бревно на опорах, линейка на краю стола, рычаг) — метод 1, полюс в опоре. Лестницы, шарниры, стержни в лунках и на гвоздях — метод 2, сначала ищите точку пересечения сил. Есть лёгкая распорка или опора — метод 3. «При каком μ», «при каких массах» — метод 4, проверяйте ограничения в каждой точке контакта.