Рычаги и простые механизмы

После пособия вы сможете

- находить неизвестную силу или массу из правила рычага, учитывая вес самого рычага;
- находить выигрыш в силе блока, ворота, системы рычагов и блоков, разбирая их как рычаги;
- взвешивать на неравноплечих весах, исключая неизвестные плечи;
- пользоваться «золотым правилом механики» и считать КПД простого механизма.

Теория кратко

Определение 1

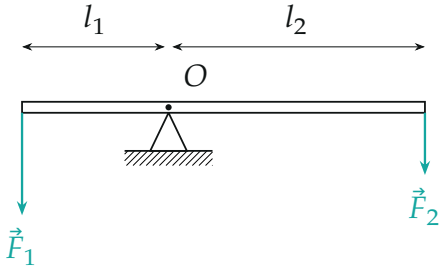
Рычаг — твёрдое тело, которое может поворачиваться вокруг неподвижной оси (опоры) O. *Плечо* силы — расстояние от оси до *линии действия* силы (прямой, вдоль которой направлена сила), то есть длина перпендикуляра из O на эту прямую. *Момент* силы — произведение $M = Fl$.

Факт 1

Правило рычага. Рычаг в равновесии, если сумма моментов сил, поворачивающих его по часовой стрелке, равна сумме моментов сил, поворачивающих против: $M_{\text{по}} = M_{\text{пр}}$. Для двух сил

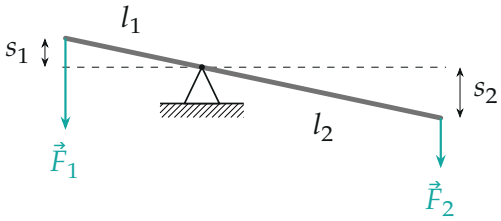
$$F_1 l_1 = F_2 l_2, \qquad \frac{F_1}{F_2} = \frac{l_2}{l_1}.$$

Сила реакции опоры проходит через ось и момента не даёт. Её находят из второго условия — сумма сил равна нулю: для вертикальных сил $N = F_1 + F_2 + m_{\text{р}} g$, где $m_{\text{р}}$ — масса рычага.



Меньшая сила — на длинном плече: $F_1 l_1 = F_2 l_2$.

Повернём рычаг на маленький угол. Концы пройдут дуги, пропорциональные плечам (подобные треугольники): $s_1/s_2 = l_1/l_2$. Тогда правило рычага можно переписать как $F_1 s_1 = F_2 s_2$ — работы двух сил равны по модулю.



Длинное плечо опустилось на s_2, *короткое поднялось на* s_1; $s_1/s_2 = l_1/l_2$.

Факт 2

«Золотое правило механики». Ни один простой механизм (рычаг, блок, ворот, наклонная плоскость, винт) не даёт выигрыша в работе: во сколько раз выигрываем в силе, во столько же раз проигрываем в расстоянии. Без трения и без массы деталей $Fs = mgh$.

Коэффициент полезного действия:

$$\eta = \frac{A_{\text{пол}}}{A_{\text{затр}}} = \frac{mgh}{Fs} \leq 1.$$

Полезная работа — то, ради чего механизм (поднять груз на h), затраченная — работа нашей силы. Разница уходит на трение и на подъём самих деталей.

Методы

Метод 1

Правило рычага по шагам. Когда применять: стержень, доска, линейка, весы на опоре или на нити; груз, при котором «равновесие не нарушится».

1. Нарисуйте все силы на рычаг. Груз на нити действует на рычаг *силой натяжения нити*; это его вес, только если груз висит в воздухе. У однородного рычага сила тяжести — из середины.
2. Ось моментов — в опоре или шарнире: реакция опоры выпадает.
3. Найдите плечи — до линий действия сил. Если все силы вертикальны, а рычаг наклонён, у всех плеч один множитель $\cos\alpha$, и он сокращается.
4. Запишите $M_{\text{по}} = M_{\text{пр}}$; силу на опору — из суммы сил.

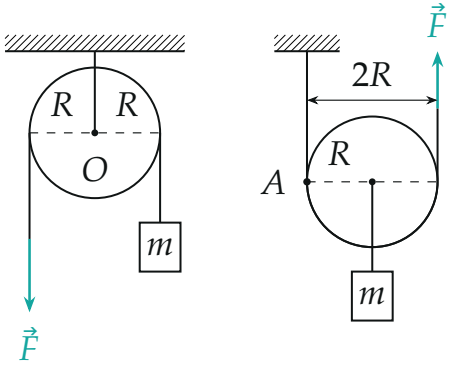
Пример. Человек несёт груз на лёгкой палке, палка лежит на плече O. Груз висит на конце A, $OA = 20$ см, на другой конец B человек давит рукой вниз силой $F = 40$ Н, $OB = 60$ см. Правило рычага относительно плеча: $mg \cdot OA = F \cdot OB$, откуда $m = \dfrac{40 \cdot 60}{10 \cdot 20} = 12$ кг. А плечо человека держит $N = mg + F = 160$ Н — рука добавляет нагрузку.

Метод 2

Блоки и ворот — тоже рычаги. Когда применять: в системе есть блоки, лебёдка, ворот, кабестан, колесо с осью.

1. *Неподвижный блок* — равноплечий рычаг с осью в центре: плечи обеих натяжений равны R. Натяжение одной нити по обе стороны одно и то же: блок меняет направление силы, выигрыша нет.
2. *Подвижный блок* — рычаг с осью A в точке, где неподвижный конец нити сходит с блока. Груз висит на оси блока (плечо R), свободный конец тянут на плече $2R$: $F \cdot 2R = mg \cdot R$, выигрыш в силе вдвое — если концы нити параллельны.
3. *Ворот* — рукоятка радиуса L на валу радиуса r: $FL = Tr$, выигрыш L/r.

4. Идём по телам: одна невесомая нить — одно натяжение T; лёгкий блок — сумма сил на него ноль (на ось подвижного — $2T$); груз — его равновесие; рычаг — правило моментов.



Неподвижный блок — рычаг с плечами R и R; подвижный — с осью в A и плечами R и $2R$.

Метод 3

Неравноплечие весы: исключаем плечи. Когда применять: «весы с неравными плечами», «рычаг неизвестной длины», два взвешивания одного груза.

1. Обозначьте неизвестные плечи a и b (и массу груза m) — не бойтесь лишних букв.
2. Запишите правило рычага для каждого взвешивания. Если пустые весы уравновешены, вес коромысла момента не даёт: его центр масс над опорой.
3. Поделите или перемножьте уравнения — плечи сократятся. Взвесили груз на левой чашке гирями m_1, на правой — m_2: $ma = m_1 b$, $m_2 a = mb$, откуда $m = \sqrt{m_1 m_2}$.

Метод 4

Золотое правило вместо моментов. Когда применять: механизм сложный (зубчатая передача, винт, много блоков), спрашивают КПД, работу или «во сколько раз выигрыш».

1. Сдвиньте механизм чуть-чуть: груз поднялся на h, точка, к которой приложена наша сила, прошла s вдоль силы. Связь s и h — из длины нити или подобия.
2. Без трения: $Fs = mgh$ — сила найдена без единого плеча.
3. С трением: $Fs = mgh + A_{\text{тр}}$, $\eta = \dfrac{mgh}{Fs}$.

Подвижный блок: тянем конец нити на s, оба куска нити укорачиваются на $s/2$, груз поднимается на $h = s/2$, значит, $F = mg/2$ — тот же ответ, что из моментов.

Частые ошибки

Частая ошибка

Брать за плечо расстояние до точки приложения. Сила тянет под углом φ к рычагу — её плечо $l \sin \varphi$, а не l.

Частая ошибка

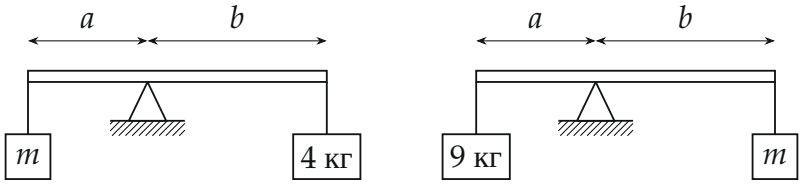
Ставить в правило рычага вес груза, когда он в воде или опирается на дно. На рычаг действует натяжение нити: $T = mg - F_{\text{A}}$ или $T = mg - N$.

Частая ошибка

Ждать от механизма выигрыша в работе, получать $\eta > 1$. Выигрыш в силе всегда оплачен расстоянием: у подвижного блока руку тянут на $2h$. И выигрыш вдвое у подвижного блока — только при параллельных концах нити.

Разобранные примеры

Пример 1. [МОШ 2010/11, отборочный этап, 9 кл.] Неравноплечий рычаг находится в равновесии. Если к левому концу рычага прикрепить груз, а к правому концу рычага — гирю массой 4 кг, то равновесие не нарушится. Если этот груз прикрепить к правому концу рычага, то, чтобы уравновесить рычаг, к его левому концу надо прикрепить гирю массой 9 кг. Найдите массу груза.



Два взвешивания одного груза на одном рычаге.

▲ **Решение. Что происходит.** Это неравноплечие весы: плеч мы не знаем, но они одни и те же в обоих опытах. Запишем правило рычага дважды и исключим плечи (метод 3).

Обозначения. a — левое плечо, b — правое, m — масса груза, $m_1 = 4$ кг, $m_2 = 9$ кг. Рычаг без грузов в равновесии: его центр масс над опорой, и момент его веса равен нулю — в уравнения он не входит.

1. Правило рычага для двух опытов относительно опоры — её реакция выпадает:

$$mg\,a = m_1 g\,b, \qquad m_2 g\,a = mg\,b.$$

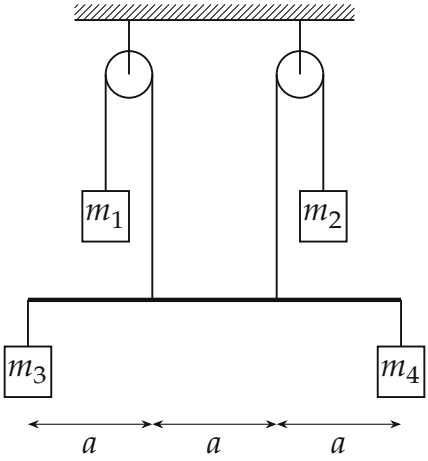
2. Исключаем плечи. Перемножим уравнения и сократим g^2ab: $m^2 = m_1 m_2$, откуда

$$m = \sqrt{m_1 m_2} = \sqrt{4 \cdot 9} = 6\,\text{кг}.$$

Проверка. Размерность — масса. Отношение плеч из первого опыта $a/b = m_1/m = 2/3$, из второго $a/b = m/m_2 = 2/3$ — совпадают. При равных плечах было бы $m_1 = m_2 = m$. Груз на длинном плече перевешивает лёгкую гирю, на коротком — тяжёлую, а истинная масса — их среднее геометрическое.

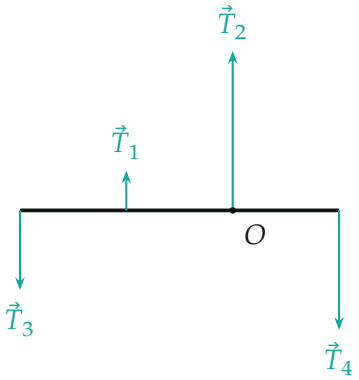
Ответ. $m = \sqrt{m_1 m_2} = 6$ кг.

Пример 2. [МОШ 2012/13, заключительный этап, 9 кл.] Лёгкий горизонтальный жёсткий стержень длиной $3a$; к нему на расстояниях a и $2a$ от одного из концов прикреплены вертикальные нити, перекинутые через блоки. К противоположным концам нитей прикреплены грузы массами m_1 и m_2. К концам стержня прикреплены грузы массами m_3 и m_4 (см. рисунок). Известно, что $m_1 = 1$ кг и $m_3 = 2$ кг. Какими должны быть массы m_2 и m_4, чтобы система находилась в равновесии?



▲ **Решение. Что происходит.** Неподвижные блоки — равноплечие рычаги: они только разворачивают нити, натяжение по обе стороны блока одно. Значит, стержень тянут вверх нити с силами $m_1 g$ и $m_2 g$, вниз — нити грузов $m_3 g$ и $m_4 g$. Неизвестных две — хватит двух условий равновесия.

Обозначения. Натяжения нитей, действующих на стержень: $T_1 = m_1 g$ (в a от левого конца), $T_2 = m_2 g$ (в $2a$), $T_3 = m_3 g$ (левый конец), $T_4 = m_4 g$ (правый конец) — каждый груз висит неподвижно, и его нить тянет с силой, равной его весу.



Силы на лёгкий стержень; длины стрелок — по найденным массам.

1. Правило моментов относительно точки O, где приложена неизвестная T_2 — она выпадет. Против часовой стрелки стержень поворачивает T_3 (плечо $2a$), по часовой — T_1 и T_4 (плечи по a):

$$m_3 g \cdot 2a = m_1 g \cdot a + m_4 g \cdot a \;\Rightarrow\; m_4 = 2m_3 - m_1 = 3\,\text{кг}.$$

2. Первое условие равновесия в проекции на вертикаль:

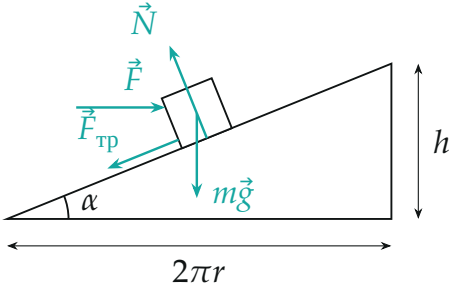
$$m_1 g + m_2 g = m_3 g + m_4 g \;\Rightarrow\; m_2 = m_3 + m_4 - m_1 = 3m_3 - 2m_1 = 4\,\text{кг}.$$

Проверка. Моменты относительно точки крепления первой нити: против часовой — $(m_3 + m_2)ga = 6ga$ (массы в килограммах), по часовой — $m_4 g \cdot 2a = 6ga$. Сходится. Обе массы положительны, нити натянуты. Блоки не дали выигрыша — они просто перенесли вес грузов m_1 и m_2 в силы, тянущие стержень вверх.

Ответ. $m_2 = 3m_3 - 2m_1 = 4$ кг, $m_4 = 2m_3 - m_1 = 3$ кг.

Пример 3. [«Надежда энергетики» 2024/25, отборочный этап, 9 кл.] Найдите максимально возможный КПД винтового домкрата, у которого сила трения не даёт грузу опускаться.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Резьба винта — наклонная плоскость, намотанная на цилиндр. Развернём один виток: получится наклонная плоскость с углом α, основание — длина окружности резьбы $2\pi r$, высота — шаг h. Груз давит на резьбу, как брусок на плоскость, а вращая винт, мы толкаем «брусок» горизонтально, вдоль окружности. Рукоятка — ворот: он меняет силу, но не работу, поэтому на КПД не влияет. Условие «груз сам не опускается» — ограничение на трение.



Один виток резьбы, развёрнутый в наклонную плоскость; груз поднимают горизонтальной силой $\vec{F}$.

1. Самоторможение. Без силы F груз не съезжает: проекции второго закона Ньютона на плоскость и на нормаль дают $F_{\text{тр}} = mg\sin\alpha$, $N = mg\cos\alpha$, и трение покоя не больше μN:

$$mg\sin\alpha \le \mu mg\cos\alpha \;\Rightarrow\; \mu \ge \operatorname{tg}\alpha.$$

2. Медленный подъём. Груз скользит вверх по плоскости, трение μN — вниз по ней. Второй закон Ньютона при $a = 0$ в проекциях на плоскость (вверх) и на нормаль:

$$F\cos\alpha - mg\sin\alpha - \mu N = 0, \qquad N - mg\cos\alpha - F\sin\alpha = 0,$$

$$F = mg\,\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}.$$

3. КПД. Груз прошёл вдоль плоскости путь s: поднялся на $s\sin\alpha$, а вдоль силы F сдвинулся на $s\cos\alpha$. Обозначим $t = \operatorname{tg}\alpha$:

$$\eta = \frac{mg\,s\sin\alpha}{F\,s\cos\alpha} = \frac{t\,(1-\mu t)}{t+\mu}.$$

4. Наибольший КПД. КПД убывает с ростом μ, а по пункту 1 $\mu \ge t$. Числитель не больше $t(1-t^2)$, знаменатель не меньше $2t$:

$$\eta \le \frac{1-t^2}{2} < \frac{1}{2}.$$

К 50% КПД приближается при малом шаге резьбы и μ, равном $\operatorname{tg}\alpha$.

Проверка. Без трения ($\mu = 0$) $\eta = 1$ — золотое правило, но такой домкрат не держит груз. Смысл: чтобы груз сам не съезжал, трение должно «съедать» не меньше, чем отдаёт опускающийся груз, — и при подъёме оно забирает не меньше полезной работы.

Ответ. $\eta < 50\%$: у самотормозящегося винта больше половины работы уходит на трение.

Как решать листок

Сложность 1–3 (качели, линейка с грузами, рычаг с динамометром) — метод 1. Рычаги с блоками, лебёдки — метод 2, идите по телам. «Неравноплечие весы», «взвешивание по Гауссу» — метод 3. Рычаг в жидкости — метод 1, но силы на рычаг — натяжения нитей, а не веса. КПД, домкрат, зубчатые передачи — метод 4.