Нити и блоки

После пособия вы сможете

- записывать длину нити через координаты и получать из неё связь скоростей и ускорений тел;
- находить натяжения: одна невесомая нить — одно натяжение, на ось подвижного блока — $2T$;
- решать задачи динамики с блоками: второй закон Ньютона для каждого тела плюс связь;
- связывать с нитью тело, которое по ней лезет или скользит, законом сложения скоростей.

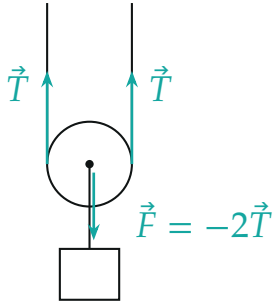
Теория кратко

Определение 1

Кинематическая связь — ограничение, из-за которого движения тел зависят друг от друга. Главный пример — нерастяжимая нить: её длина постоянна при любых движениях и ускорениях. Нить невесомая и без трения о блоки — натяжение T одно и то же по всей её длине. Блок невесомый — его масса ноль.

Факт 1

Для невесомого блока второй закон Ньютона даёт $0 \cdot \vec{a} = \sum \vec{F}$: сумма сил на него равна нулю *всегда*, даже когда блок движется с ускорением. Если оба отрезка нити, охватывающей блок, параллельны, на его ось действует сила $2T$. Подвижный блок «выигрывает в силе» вдвое — и проигрывает вдвое в перемещении.



Невесомый подвижный блок: нить тянет его вверх двумя силами $\vec{T}$, груз — вниз силой $2T$.

Скорость тела вдоль оси — изменение его координаты за малый промежуток Δt, делённое на Δt: $v_x = \Delta x/\Delta t$. Так же $a_x = \Delta v_x/\Delta t$. Поэтому соотношение между координатами, верное в *каждый* момент, переходит в такое же соотношение между проекциями скоростей, а потом и ускорений. Короче говорят: «дважды продифференцируем по времени».

Методы

Метод 1

Метод координат. Когда применять: «найдите скорость (ускорение) груза», в системе нерастяжимые нити и блоки.

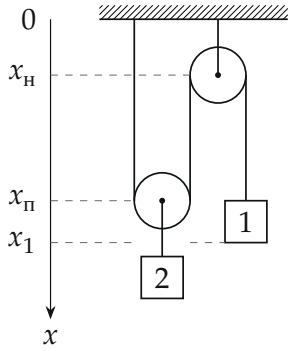
1. Вводим ось — куда удобно — и отмечаем координаты всех подвижных точек: концов нити, осей блоков, тел. Неподвижные точки — константы.
2. Пишем длину нити суммой отрезков; каждый отрезок — «большая координата минус меньшая». Дуги на блоках и отрезки постоянной длины уходят в константу.
3. Длина постоянна — берём изменение за Δt и делим на Δt: связь проекций скоростей; ещё раз — связь проекций ускорений.
4. Сколько нитей — столько уравнений связи.
5. Только в конце раскрываем проекции по рисунку; знак ответа скажет направление.

Пример. Нить привязана к потолку, охватывает подвижный блок с грузом 2, перекинута через неподвижный блок, на конце — груз 1. Ось

x вниз, потолок — $x = 0$, неподвижный блок — $x_н$, подвижный — $x_п$. Длина нити

$$x_п + (x_п - x_н) + (x_1 - x_н) + \text{const} = \text{const} \;\Rightarrow\; 2a_{пx} + a_{1x} = 0.$$

Груз 2 висит на оси подвижного блока, $a_{2x} = a_{пx}$, и $a_{2x} = -\frac{1}{2}a_{1x}$: грузы движутся в разные стороны, второй — вдвое медленнее.



Метод 2

Динамика с блоками. Когда применять: «найдите ускорения грузов», «натяжение нити», «с какой силой тянуть».

1. Натяжения: одна невесомая нить — одно T; разные нити — разные. Для каждого невесомого блока — сумма сил равна нулю.
2. Второй закон Ньютона для каждого тела в проекции на *одну* ось; ускорения — проекциями со знаком.
3. Связь ускорений — методом координат.
4. Считаем: неизвестные — все a и все T; уравнений должно быть столько же.

Пример (рисунок выше, массы m_1 и m_2). Ось x вниз. Груз 1: $m_1 a_{1x} = m_1 g - T$. Груз 2 с блоком: $m_2 a_{2x} = m_2 g - 2T$. Вместе со связью $a_{2x} = -\frac{1}{2}a_{1x}$ находим

$$a_{1x} = \frac{2(2m_1 - m_2)}{4m_1 + m_2}\, g.$$

При $m_2 = 2m_1$ ускорения нулевые — равновесие, как и должно быть: подвижный блок выигрывает в силе вдвое.

Метод 3

Тело движется по нити. Когда применять: обезьяна лезет по верёвке, бусинка или колечко скользит по нити.

1. В длину нити пишем координату *точки нити* (например, её конца), а не тела.
2. Тело с этой точкой связывает закон сложения: $\vec{v} = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{v}_{\text{нити}}$, и так же для ускорений.
3. Получили связь ускорений, верную в каждый момент, а вначале всё покоилось — умножаем на Δt и складываем все малые изменения: та же связь верна для скоростей, а затем и для перемещений.

Частые ошибки

Частая ошибка

Вписать в длину нити координату обезьяны, которая по ней лезет. Нить относительно обезьяны едет, и связь выйдет неверной. Следим за точкой нити, а обезьяну связываем с ней законом сложения.

Частая ошибка

Считать, что все грузы на одной нити движутся с одной скоростью. Это так, только если нить идёт через неподвижные блоки. С подвижным блоком скорости разные — их даёт метод координат.

Частая ошибка

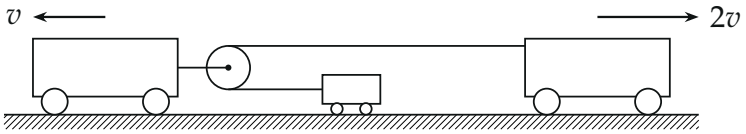
Потерять силу: на подвижный блок нить действует *двумя* силами T; на тело, к которому нить привязана и через блок которого она снова проходит, — несколькими. Перебирайте все места, где нить касается тела.

Частая ошибка

Одна нить — одно уравнение связи. Нитей две, а уравнение одно — неизвестных не хватит; ищите связь для второй нити.

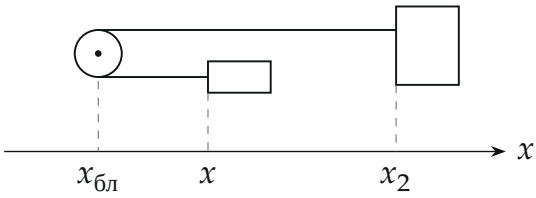
Разобранные примеры

Пример 1. [Росатом 2022/23, отборочный этап, 8 кл.] Два автомобиля едут в противоположные стороны со скоростями v и $2v$. К одному автомобилю привязан трос, который переброшен через блок, привязанный ко второму автомобилю. Второй конец троса привязан к тележке (см. рисунок). Найдите её скорость.



▲ **Решение. Что происходит.** Правый автомобиль вытягивает трос из верхнего отрезка, левый уносит блок. Нижний отрезок, от блока до тележки, подстраивается — его длину и найдём методом координат (метод 1).

Обозначения. Ось x вправо. Координаты: $x_{\text{бл}}$ — ось блока (едет с левым автомобилем), x_2 — точка крепления троса к правому автомобилю, x — тележка. Проекции скоростей: $v_{\text{бл}x} = -v$, $v_{2x} = 2v$.



1. Длина троса. Верхний отрезок $x_2 - x_{\text{бл}}$, нижний $x - x_{\text{бл}}$, дуга на блоке постоянна:

$$(x_2 - x_{\text{бл}}) + (x - x_{\text{бл}}) + \text{const} = \text{const}.$$

2. Связь скоростей. Изменение за Δt, делим на Δt:

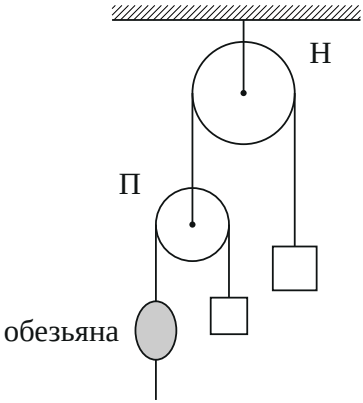
$$v_{2x} + v_x - 2v_{\text{бл}x} = 0 \;\Rightarrow\; v_x = 2v_{\text{бл}x} - v_{2x} = -2v - 2v = -4v.$$

Проекция отрицательна — тележка едет влево, к блоку.

Проверка. Размерность — скорость. Предел: стоит левый автомобиль — верхний отрезок удлиняется на $2v\,\Delta t$, нижний на столько же укорачивается, и тележка едет к блоку со скоростью $2v$; у нас при $v_{блх} = 0$ как раз $v_x = -2v$. Движение блока влево добавляет тележке $2v$: блок «тащит» за собой и нижний отрезок, и его укорочение.

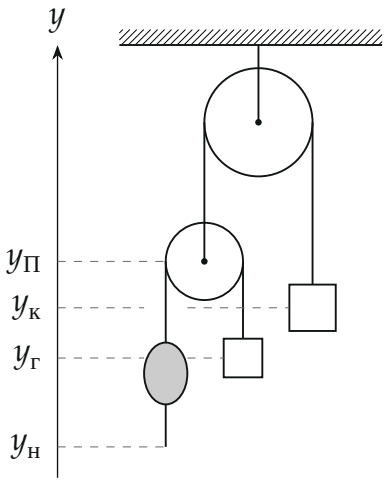
Ответ. $4v$, тележка движется влево (в ту же сторону, что и автомобиль с блоком).

Пример 2. [Физтех 2023/24, отборочный этап, 10 кл.] Через подвижный блок П перекинута лёгкая нерастяжимая верёвка. На одном её конце, ухватившись за неё, висит обезьяна, на другом — груз массой, равной массе обезьяны. Подвижный блок П уравновешен грузом, прикреплённым к лёгкой нерастяжимой верёвке, перекинутой через неподвижный блок Н. Вначале система покоится. Начиная с некоторого момента обезьяна движется вверх с постоянной скоростью относительно верёвки. Найдите модуль перемещения блока П, когда обезьяна выберет 2 м верёвки. Блоки лёгкие, трения нет, тела движутся по вертикали.



▲ **Решение. Что происходит.** Вначале всё уравновешено. Чтобы полезть вверх, обезьяна тянет верёвку сильнее — натяжение растёт, и ускорения появляются у всех тел. Обезьяна лезет по верёвке, поэтому нужен метод 3: в длину верёвки пишем её нижний конец, а обезьяну связываем с ним законом сложения.

Обозначения. Масса обезьяны и груза m, противовеса — M. Ось y вверх. Координаты: $y_П$ — ось блока П, $y_к$ — противовес, $y_г$ — груз, $y_н$ — нижний конец верёвки на блоке П; блок Н неподвижен.



1. Натяжения. Верёвка через П одна — натяжение T и у обезьяны, и у груза. Блок П невесом: верёвка через Н тянет его силой $2T$, значит, и противовес — силой $2T$. В начальном равновесии $T = mg$ и $2T = Mg$, то есть $M = 2m$.

2. Второй закон Ньютона в произвольный момент разгона, проекции на y:

$$\text{обезьяна: } ma_о = T - mg, \qquad \text{груз: } ma_г = T - mg,$$
$$\text{противовес: } 2ma_к = 2T - 2mg.$$

Справа везде одно и то же $T - mg$, поэтому $a_о = a_г = a_к = a$ в любой момент.

3. Связи. Верёвка через Н: $(y_Н - y_П) + (y_Н - y_к) = \text{const}$, откуда $a_П = -a_к = -a$. Верёвка через П: $(y_П - y_н) + (y_П - y_г) = \text{const}$, откуда $2a_П = a_н + a_г$. Закон сложения для обезьяны и верёвки: $a_о = a_{отн} + a_н$. Подставляем $a_н = a - a_{отн}$:

$$-2a = (a - a_{отн}) + a \;\Rightarrow\; a_{отн} = 4a.$$

4. Суммирование. Связь $a_{\text{отн}} = 4a_{\text{к}}$ верна в каждый момент, а вначале всё покоилось. Умножаем на Δt и складываем от начала: $v_{\text{отн}} = 4v_{\text{к}}$; ещё раз — для перемещений: $s_{\text{отн}} = 4s_{\text{к}}$. Обезьяна выбрала $s_{\text{отн}} = 2$ м верёвки, значит, противовес поднялся на 0,5 м, а блок П опустился на столько же:

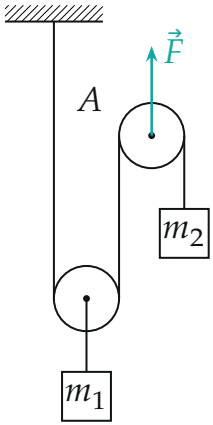
$$|s_{\text{П}}| = \frac{s_{\text{отн}}}{4} = 0{,}5\text{ м}.$$

Обратите внимание: скорость обезьяны относительно верёвки после разгона постоянна, но ответ от этого не зависит — связь верна и при разгоне, и после.

Проверка. Размерность — длина. Знак: обезьяна тянет верёвку, натяжение $T > mg$, поэтому $a > 0$ — противовес идёт вверх, блок П вниз. Связь через П тоже сходится: конец верёвки опускается с ускорением $a - 4a = -3a$, и $2a_{\text{П}} = -3a + a = -2a$. Обезьяна поднимается лишь на четверть выбранной верёвки: остальное «съедают» опускающийся блок и уходящий вниз конец.

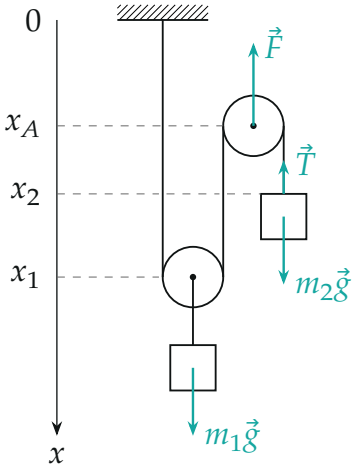
Ответ. $|s_{\text{П}}| = \dfrac{s}{4} = 0{,}5$ м (блок П опускается).

Пример 3. [МОШ 1998/99, заключительный этап, 10 кл.] В системе на рисунке нить невесома и нерастяжима, блоки невесомы, трения нет. Массы грузов m_1 и m_2. Найдите ускорение оси блока A, к которой приложена в вертикальном направлении сила F. Ускорение свободного падения g.



▲ **Решение. Что происходит.** Три неизвестных ускорения (груз m_1 с нижним блоком, груз m_2, блок A) и одно натяжение. Динамику пишем для каждого тела, связь даёт нить — метод 2.

Обозначения. Ось x вниз, потолок — $x = 0$. Координаты: x_1 — ось нижнего блока (груз m_1 висит на ней и движется так же), x_A — ось блока A, x_2 — груз m_2.



Силы на грузы и на блок A (натяжения на груз m_1 с блоком не показаны); ось x вниз.

1. Натяжение. Нить одна — натяжение T всюду. Блок A невесом: нить тянет его вниз двумя отрезками, сила $\vec{F}$ — вверх, и $0 = 2T - F$, то есть $T = \dfrac{F}{2}$.

2. Второй закон Ньютона в проекциях на x. Груз m_1 вместе с невесомым нижним блоком (нить тянет блок вверх двумя отрезками) и груз m_2:

$$m_1 a_1 = m_1 g - 2T, \qquad m_2 a_2 = m_2 g - T.$$

Отсюда $a_1 = g - \dfrac{F}{m_1}$, $a_2 = g - \dfrac{F}{2m_2}$.

3. Связь. Идём по нити от потолка: $x_1 + (x_1 - x_A) + (x_2 - x_A) + \text{const} = \text{const}$. Дважды берём изменение за Δt и делим на Δt:

$$2a_1 + a_2 = 2a_A.$$

4. Ответ. Собираем:

$$a_A = a_1 + \frac{a_2}{2} = \frac{3}{2}g - \frac{F}{m_1} - \frac{F}{4m_2} = \frac{3}{2}g - \frac{m_1 + 4m_2}{4m_1 m_2}F.$$

Плюс — ось A ускоряется вниз, минус — вверх.

Проверка. Размерность: F/m — ускорение. Равновесие: при $m_1 = 2m_2$ и $F = m_1 g$ получаем $a_A = \frac{3}{2}g - g - \frac{1}{2}g = 0$, и грузы тоже стоят. Обратите внимание: при малой F ускорение блока больше g — противоречия нет: блок невесом, F и $2T$ на нём уравновешены, и его ускорение задаёт только нить.

Ответ. $a_A = \frac{3}{2}g - \frac{m_1 + 4m_2}{4m_1 m_2}F$ (проекция на ось, направленную вниз).

Как решать листок

Сложность 1–4 («найдите скорость груза», машины и тележки, системы блоков без масс) — метод 1. «Найдите ускорения и натяжения» — метод 2: натяжения, второй закон Ньютона для каждого тела, связь. Обезьяны на верёвке, бусинки на нити, начальный покой — метод 3 и суммирование.