Масса и плотность

После пособия вы сможете

- находить массу, объём и плотность по формуле $m = \rho V$ и переводить единицы;
- решать задачи про сосуды, полости и составные тела системой уравнений «по частям»;
- находить среднюю плотность смеси, сплава или составного тела и состав по известной средней плотности;
- пользоваться подобием: увеличили размеры в k раз — масса выросла в k^3 раз.

Теория кратко

Определение 1

Плотность вещества — масса единицы объёма:

$$\rho = \frac{m}{V}, \qquad m = \rho V.$$

Плотность — свойство вещества, а не тела: у гвоздя и у рельса из одной стали она одна.

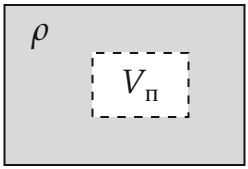
Факт 1

- $1\ \text{г/см}^3 = \dfrac{10^{-3}\ \text{кг}}{10^{-6}\ \text{м}^3} = 1000\ \text{кг/м}^3$. Плотность воды $1\ \text{г/см}^3$.
- $1\ \text{л} = 1\ \text{дм}^3 = 1000\ \text{см}^3 = 10^{-3}\ \text{м}^3$; литр воды — 1 кг.
- Объём бруска $V = abc$, куба $V = a^3$. Объём тела неправильной формы — объём воды, которую оно вытесняет в мензурке.

Тело может состоять из нескольких частей: сосуд и жидкость, металл и полость, два металла. Тогда массы частей складываются, и объёмы тоже (если вещества не растворяются друг в друге):

$$m = m_1 + m_2 + \dots, \qquad V = V_1 + V_2 + \dots$$

У полости масса нулевая, а объём — нет.



Брусок из металла плотностью ρ, внешний объём V, внутри полость: $m = \rho\,(V - V_n)$.

Методы

Метод 1

Масса и объём по частям. Когда применять: сосуд с жидкостью, полость, «пустой сосуд», «изделие из двух материалов».

1. Нарисуйте тело и разбейте его на части; у каждой — своя плотность и свой объём.
2. Для каждой части $m_i = \rho_i V_i$; сложите массы и объёмы.
3. Посчитайте неизвестные и уравнения. Не хватает уравнения — ищите, что общее: один и тот же сосуд (тот же объём), одна и та же масса.
4. Вычтите одно уравнение из другого — общая неизвестная (масса сосуда) уйдёт сама.

Пример. Брусок 5×5 см $\times$ 10 м массой 48 кг из металла плотностью 2000 кг/м^3. Внешний объём $V = 0{,}05{\cdot}0{,}05{\cdot}10 = 0{,}025$ м^3, объём металла $m/\rho = 0{,}024$ м^3, полость $V_п = 0{,}001$ м^3 $= 1000$ см^3.

Метод 2

Средняя плотность смеси и сплава. Когда применять: «сплав», «смесь», «составное тело», «утонет ли», «какую долю составляет».

1. Средняя плотность — вся масса на весь объём:

$$\rho_{ср} = \frac{m_1 + m_2}{V_1 + V_2} = \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{V_1 + V_2}.$$

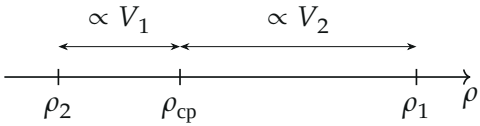
2. Равные объёмы: $\rho_{ср} = \dfrac{\rho_1 + \rho_2}{2}$. Равные массы: $\rho_{ср} = \dfrac{2\rho_1\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$ — тот же ответ, что у средней скорости на равных путях.

3. Известна $\rho_{ср}$, ищем состав — домножим на $V_1 + V_2$ и соберём объёмы:

$$\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2 = \rho_{ср}(V_1 + V_2) \;\Rightarrow\; \frac{V_1}{V_2} = \frac{\rho_{ср} - \rho_2}{\rho_1 - \rho_{ср}}.$$

4. Тело целиком тонет в жидкости, если его средняя плотность больше плотности жидкости, и плавает, если меньше.

Формулу из пункта 3 удобно видеть на оси плотностей, как рычаг: $\rho_{ср}$ делит отрезок $[\rho_2; \rho_1]$ на части, обратно пропорциональные объёмам. Чего больше по объёму, к тому $\rho_{ср}$ и ближе.



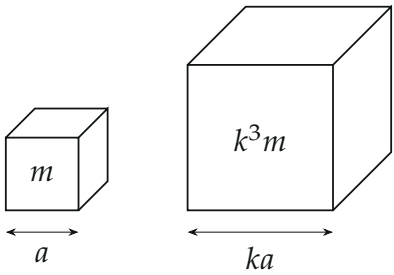
$V_1(\rho_1 - \rho_{ср}) = V_2(\rho_{ср} - \rho_2)$: лёгкого вещества здесь больше.

Метод 3

Подобие. Когда применять: «копия», «модель», «в k раз выше», «снеговик из шаров», «увеличили все размеры».

1. Все длины выросли в k раз — площади выросли в k^2, а объёмы в k^3 раз.
2. Вещество то же — масса растёт как объём: $m_2/m_1 = k^3$.
3. Вещество другое — ещё множитель ρ_2/ρ_1: $m_2/m_1 = k^3\rho_2/\rho_1$.

Копия статуэтки втрое меньше по высоте из того же материала легче в 27 раз, а не в 3.

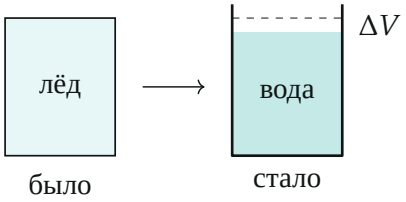


Метод 4

Что сохраняется — масса. Когда применять: лёд тает, вода замерзает, снег утаптывают, жидкость переливают, тело опускают в полный сосуд.

1. Нарисуйте «было» и «стало». Вещество то же, его не прибавили и не убавили — значит, масса та же: $\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$.
2. Объём меняется обратно плотности: $V_2 = V_1 \rho_1 / \rho_2$.
3. Тело опустили в сосуд, полный до краёв, — вылилось столько воды, каков объём тела. Сосуд налит не до краёв — сначала заполняется свободный объём, выливается только остаток.

Пример. Литр льда ($\rho_л = 0{,}9$ г/см^3) весит 900 г. Растаял — воды тоже 900 г, то есть 0,9 л: объём уменьшился на десятую часть. Обратно, вода при замерзании расширяется в $1/0{,}9 \approx 1{,}11$ раза — поэтому зимой лопаются забытые на морозе бутылки.



Масса льда и воды одна, объём воды меньше на $\Delta V = V_л(1 - \rho_л/\rho_в)$.

Частые ошибки

Частая ошибка

Путать плотность вещества и среднюю плотность тела. Полый стальной шар может плавать в воде: плотность стали 7,8 г/см^3, а средняя плотность шара вместе с полостью может быть меньше 1 г/см^3.

Частая ошибка

Считать среднюю плотность сплава средним арифметическим плотностей. Это верно только для равных *объёмов*; для равных масс ответ меньше, а в общем случае — вся масса на весь объём.

Частая ошибка

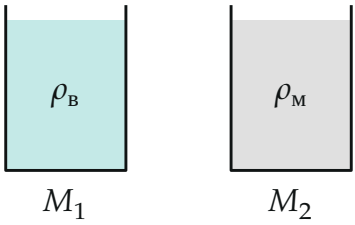
Ошибаться в переводе объёма: $1\,\text{см}^3 = 10^{-6}\,\text{м}^3$, а не 10^{-2} — метр в сто раз больше сантиметра, и эта сотня входит в куб трижды.

Частая ошибка

Забыть часть тела: массу сосуда, объём полости, шпажку внутри фигурки. И считать, что при таянии льда сохраняется объём, — сохраняется масса.

Разобранные примеры

Пример 1. [МОШ 2023/24, отборочный этап, 7 кл.] Сосуд, полностью заполненный водой, весит 400 г. Если этот же сосуд заполнить до краёв маслом, его масса окажется равной 361 г. Найдите массу пустого сосуда. Плотность воды 1000 кг/м^3, плотность масла 850 кг/м^3. Ответ выразите в граммах, округлите до целого числа.



Один и тот же сосуд с водой и с маслом.

▲ **Решение. Что происходит.** Неизвестных две: масса сосуда m_0 и его объём V. Взвешиваний тоже два, а общее у них — один и тот же объём (метод 1).

Обозначения. $M_1 = 400$ г, $M_2 = 361$ г, $\rho_в = 1{,}00\,\text{г/см}^3$, $\rho_м = 0{,}85\,\text{г/см}^3$ — считаем в граммах и кубических сантиметрах.

1. Масса по частям. Масса сосуда с содержимым — сосуд плюс жидкость:

$$m_0 + \rho_в V = M_1, \qquad m_0 + \rho_м V = M_2.$$

2. Объём сосуда. Вычтем второе уравнение из первого — масса сосуда уйдёт:

$$V = \frac{M_1 - M_2}{\rho_в - \rho_м} = \frac{39}{0{,}15} = 260\,\text{см}^3.$$

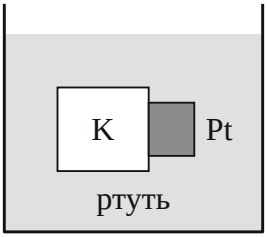
3. Масса сосуда. Из первого уравнения:

$$m_0 = M_1 - \rho_в V = \frac{\rho_в M_2 - \rho_м M_1}{\rho_в - \rho_м} = 400 - 260 = 140\,\text{г}.$$

Проверка. Размерность: г/см^3 · г, делённое на г/см^3, — граммы. Подстановка во второе уравнение: $140 + 0{,}85 \cdot 260 = 361$ г. Предел: если бы плотности были равны, оба взвешивания дали бы одно и то же, и данных бы не хватило — в формуле ноль в знаменателе. Разница масс 39 г — это разница плотностей, умноженная на объём сосуда.

Ответ. $m_0 = \dfrac{\rho_в M_2 - \rho_м M_1}{\rho_в - \rho_м} = 140$ г.

Пример 2. [Курчатов 2021/22, отборочный этап, 7 кл.] Платина и калий имеют плотности 21,5 г/см^3 и 0,89 г/см^3. Какой объём платины V_{Pt} нужно присоединить к $V_K = 10{,}0$ см^3 калия, чтобы полученное тело могло полностью погрузиться в ртуть плотностью 13,6 г/см^3? Химические реакции не учитывайте. Ответ выразите в см^3 с точностью до целых.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Калий легче ртути и всплывает, платина тяжелее и тонет. Составное тело уйдёт под поверхность целиком, если его средняя плотность не меньше плотности ртути (метод 2). Наименьший объём платины — при равенстве.

1. Средняя плотность тела. Вся масса на весь объём:

$$\rho_{\text{ср}} = \frac{\rho_{\text{Pt}} V_{\text{Pt}} + \rho_{\text{K}} V_{\text{K}}}{V_{\text{Pt}} + V_{\text{K}}} \geq \rho_{\text{Hg}}.$$

2. Объём платины. Домножим на $V_{\text{Pt}} + V_{\text{K}}$ и соберём объёмы по разные стороны:

$$V_{\text{Pt}} (\rho_{\text{Pt}} - \rho_{\text{Hg}}) \geq V_{\text{K}} (\rho_{\text{Hg}} - \rho_{\text{K}}),$$

$$V_{\text{Pt}} \geq \frac{\rho_{\text{Hg}} - \rho_{\text{K}}}{\rho_{\text{Pt}} - \rho_{\text{Hg}}} V_{\text{K}} = \frac{12{,}71}{7{,}9} \cdot 10\,\text{см}^3 \approx 16\,\text{см}^3.$$

Это и есть «рычаг» метода 2: плотность ртути делит отрезок от 0,89 до 21,5 в отношении 12,71 : 7,9, и объёмы обратно пропорциональны этим частям.

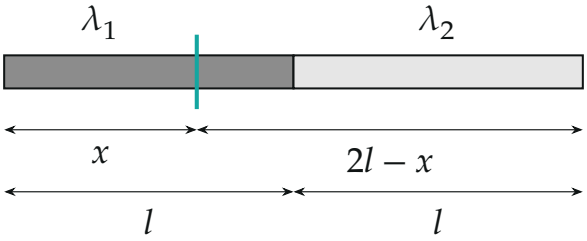
Проверка. Отношение плотностей безразмерно, ответ — в см^3. Средняя плотность при $V_{\text{Pt}} = 16{,}1\,\text{см}^3$: $(21{,}5 \cdot 16{,}1 + 0{,}89 \cdot 10)/26{,}1 \approx 13{,}6\,\text{г/см}^3$ — как у ртути. Предел: если бы плотность калия была равна плотности ртути, платина была бы не нужна — числитель обращается в ноль. Платины по объёму нужно больше, чем калия: калий легче ртути на 12,7 г/см^3, а платина тяжелее её лишь на 7,9 г/см^3.

Ответ. $V_{\text{Pt}} = \dfrac{\rho_{\text{Hg}} - \rho_{\text{K}}}{\rho_{\text{Pt}} - \rho_{\text{Hg}}} V_{\text{K}} \approx 16\ \text{см}^3$ (не меньше).

Пример 3. [Максвелл 2017/18, региональный этап, 7 кл.] Половина (по длине) длинного стержня имеет линейную плотность $\lambda_1 = 60$ г/дм, а вторая половина — $\lambda_2 = 20$ г/дм. Стержень разрезали поперёк на две равные по массе части. Чему оказались равны средние линейные плотности получившихся частей? Линейная плотность λ — масса единицы длины.

▲ **Решение. Что происходит.** Линейная плотность — та же плотность, только масса делится на длину: $m = \lambda l$. Разрез делит пополам массу, а не длину; найдём, где он, и посчитаем среднюю плотность каждой части — массу на длину (метод 2).

Обозначения. Длина каждой половины l, разрез — на расстоянии x от тяжёлого конца.



Тёмная половина — тяжёлая; разрез (бирюзовый) делит массу пополам.

1. Масса стержня. $M = \lambda_1 l + \lambda_2 l = 80l$ (в граммах, если l в дециметрах). Каждой части — по $M/2 = 40l$.

2. Где разрез. Тяжёлая половина весит $60l > 40l$, значит, разрез внутри неё:

$$\lambda_1 x = \frac{M}{2} \;\Rightarrow\; x = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\lambda_1}\, l = \frac{2}{3}\, l.$$

3. Средние плотности. Короткая часть целиком из тяжёлого материала: $\lambda_{\text{I}} = \lambda_1 = 60$ г/дм. Длинная часть — длина $2l - x = 4l/3$, масса $40l$:

$$\lambda_{\text{II}} = \frac{M/2}{2l - x} = \frac{40l}{4l/3} = 30\ \text{г/дм}.$$

Проверка. Размерность — г/дм. $\lambda_{\text{II}} = 30$ лежит между 20 и 60, ближе к 20: лёгкого куска в длинной части больше (l против $l/3$), как и подсказывает рычаг метода 2: $(30 - 20) \cdot l = (60 - 30) \cdot l/3$. Массы частей равны, поэтому длины обратно пропорциональны плотностям: $60 : 30 = (4l/3) : (2l/3)$.

Ответ. Короткая часть — 60 г/дм, длинная — 30 г/дм.

Как решать листок

Сложность 1–3 — $m = \rho V$ и перевод единиц: начинайте с них. Сосуды, полости, «пустой сосуд» — метод 1. Сплавы, смеси, «утонет ли», «какую долю» — метод 2 с рычагом. Копии, модели, снеговики — метод 3. Лёд тает, вода замерзает, фигурки опускают в полный сосуд — метод 4. Задачи с мензуркой и весами (экспериментальные, сложность 4–6) — методы 1 и 4: объём находится по вытесненной воде.