Механическая энергия, консервативные системы

После пособия вы сможете

- записывать закон изменения механической энергии «было — стало» и выбирать уровень нуля потенциальной энергии;
- считать работу каждой непотенциальной силы отдельно: трение — через путь, сила, перпендикулярная скорости, — ноль;
- находить энергию пружины, отсчитывая деформацию от недеформированного положения;
- соединять энергию со вторым законом Ньютона: натяжение, давление, отрыв;
- считать потенциальную энергию каната и верёвки по центрам масс кусков.

Теория кратко

Работа постоянной силы $\vec{F}$ на перемещении $\vec{S}$: $A = FS\cos\alpha$. Если сила меняется, траекторию бьют на малые кусочки и складывают $\delta A = \vec{F}\cdot\Delta\vec{s}$. Три частных случая встречаются постоянно: сила перпендикулярна скорости — $A = 0$; сила постоянна по модулю и направлена против скорости — $A = -FL$, где L — *путь*; известен график $F(x)$ — работа равна площади под ним.

Теорема об изменении кинетической энергии

В ИСО для материальной точки $\dfrac{mv_2^2}{2} - \dfrac{mv_1^2}{2} = A_{\text{всех сил}}$.

Определение 1

Сила *потенциальна*, если её работа при перемещении из точки 1 в точку 2 не зависит от траектории. Тогда работу даёт готовая формула — потенциальная энергия: $A_{\text{пот}} = E_{\text{п}1} - E_{\text{п}2}$. Потенциальны тяжесть (её работа mgh по любой траектории), сила упругости пружины, тяготение, сила Кулона. Непотенциальны трение, сопротивление, нормальная реакция, натяжение нити.

Потенциальная энергия определена с точностью до постоянной:

смысл есть только у её разности. Поэтому сначала выбирают ноль.

- Тяжесть: $E_{\text{п}} = mgh$, ноль — где удобно; ниже нуля $h < 0$. У протяжённого тела h — высота центра масс.
- Пружина: $E_{\text{п}} = \dfrac{kx^2}{2}$, где x — деформация *от недеформированной длины*; ноль уже выбран за нас.
- Тяготение: $E_{\text{п}} = -\dfrac{GmM}{r}$, ноль на бесконечности.

Перенесём работу потенциальных сил в левую часть теоремы и обозначим $E = E_{\text{к}} + E_{\text{п}}$.

Закон изменения механической энергии (ИСО)

$$E_{\text{кон}} - E_{\text{нач}} = A_{\text{непот}}.$$

Если $A_{\text{непот}} = 0$, механическая энергия сохраняется. Для системы тел в $A_{\text{непот}}$ входят и внутренние силы: пара сил трения между телами даёт $-F_{\text{тр}}S_{\text{отн}} = -Q$, а у нерастяжимой нити и твёрдого тела работа внутренних сил ноль.

Методы

Метод 1

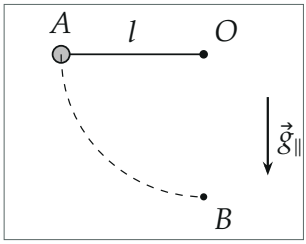
Было — стало. Когда применять: спрашивают скорость, высоту, путь или работу, а время и ускорения не нужны.

1. Нарисуйте начальное и конечное положения; выберите систему тел.
2. Выберите уровень нуля потенциальной энергии — обычно в самой низкой точке.
3. Перечислите все силы. Для каждой непотенциальной найдите работу отдельно: $\vec{F} \perp \vec{v}$ — ноль; трение постоянного модуля — минус сила на путь.
4. Второй закон Ньютона пишите, только чтобы найти нужное: N для силы трения, a_n для натяжения.
5. Запишите $E_{\text{кон}} - E_{\text{нач}} = A_{\text{непот}}$ и выразите искомое.

Пример («Физтех»). Шайба на нити длины l лежит на наклонной плоскости с углом β и коэффициентом трения μ. Её отпускают из положения A, где нить горизонтальна. Найдём скорость в самой низкой точке B. Нарисуем вид на саму плоскость. Нить перпендикулярна скорости — $A_T = 0$. По нормали к плоскости ускорения нет: $N = mg\cos\beta$, и трение $\mu mg\cos\beta$ постоянно и направлено против скорости. Путь — четверть окружности, $\frac{\pi}{2}l$; шайба опустилась на $l\sin\beta$:

$$\frac{mv_B^2}{2} - mgl\sin\beta = -\mu mg\cos\beta\cdot\frac{\pi}{2}l \;\Rightarrow\; v_B = \sqrt{2gl\left(\sin\beta - \frac{\pi}{2}\mu\cos\beta\right)}.$$

Если под корнем выходит отрицательное число, шайба до B не доходит.



Вид на наклонную плоскость; $\vec{g}_{\parallel}$ — вниз по склону.

Метод 2

Пружина. Когда применять: в задаче есть пружина, жгут, резинка.

1. Проведите черту «недеформированная пружина» и отсчитывайте деформацию от неё, а не от положения равновесия.
2. Каждое положение — отдельный рисунок с номером: 0, 1, 2… Так не потеряется ни одна деформация.
3. Для каждого перехода пишите закон изменения энергии и не забывайте mgh — тяжесть никуда не делась.
4. Выбирайте переход, в котором нет неизвестных сил и скоростей.

Пример. Груз висит на пружине в равновесии (растяжение x_0), его смещают вниз ещё на x. Работа силы упругости — не $-\frac{kx^2}{2}$, а

$$A_{\text{упр}} = \frac{kx_0^2}{2} - \frac{k(x_0+x)^2}{2} = -\frac{kx^2}{2} - kx_0x.$$

Метод 3

Энергия плюс второй закон Ньютона. Когда применять: «с какой силой давит», «натяжение нити», «оторвётся ли», «мёртвая петля», шайба в чаше.

1. Рассмотрите произвольное положение (угол φ) — частные подставите потом.
2. Из энергии найдите $v^2(\varphi)$.
3. Второй закон Ньютона в проекции к центру окружности: $\dfrac{mv^2}{R}$ = сумма проекций сил.
4. Отрыв — $N = 0$ (у нити — $T = 0$). Проверьте $N \geq 0$ на всём пути: тело может оторваться раньше, чем вы думаете.
5. После отрыва тело летит свободно: горизонтальная скорость постоянна.

Пример. Маятник отпустили с угла φ_0. Энергия: $v^2 = 2gl(\cos\varphi - \cos\varphi_0)$. Второй закон Ньютона вдоль нити: $\frac{mv^2}{l} = T - mg\cos\varphi$, отсюда $T = mg(3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0)$: наибольшее внизу, наименьшее в крайней точке.

Метод 4

Протяжённое тело. Когда применять: канат, верёвка, цепочка соскальзывают со стола, перекинуты через блок.

1. Разбейте тело на куски, у каждого $E_\text{п} = m_i g h_i$ по его центру масс.
2. Сравните «было» и «стало»: часто всё сводится к тому, что один кусок переложили с одного места на другое, а остальное не изменилось.
3. Все куски нерастяжимой верёвки движутся с одной скоростью: $E_\text{к} = \frac{mv^2}{2}$.

Частые ошибки

Частая ошибка

Считать работу трения через перемещение. Трение направлено про-

тив скорости, а не против перемещения: умножаем на путь. Шайба съехала и вернулась — перемещение ноль, а работа трения нет.

Частая ошибка

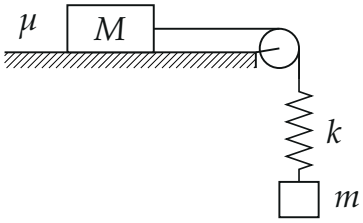
Отсчитывать деформацию пружины от положения равновесия или забыть потенциальную энергию тяжести. Энергия пружины $\frac{kx^2}{2}$ — только с x от недеформированной длины.

Частая ошибка

Писать закон сохранения энергии для одного тела на подвижной опоре. Клин уезжает — нормальная реакция на шайбу совершает работу. Энергия сохраняется для системы «шайба + клин»: там работы пары сил реакции в сумме дают ноль.

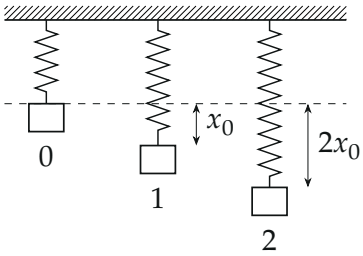
Разобранные примеры

Пример 1. [Ведомственная 2021/22, заключительный этап, 9 кл.] На горизонтальном столе покоится груз массы M, коэффициент трения груза о стол μ. К грузу привязана невесомая нерастяжимая нить, переброшенная через невесомый блок. К нити прикреплена невесомая пружина жёсткости k. Какой массы m груз надо прикрепить к свободному концу нерастянутой пружины, чтобы, падая, он смог сдвинуть груз M с места?



▲ **Решение.** **Что происходит.** Груз m отпускают у нерастянутой пружины. Он опускается, пружина растягивается, и натяжение нити растёт. Груз M сдвинется, если натяжение хоть раз превысит наибольшую силу трения покоя μMg. Сильнее всего пружина растянута в нижней точке, где груз m на миг останавливается.

Обозначения. x — растяжение пружины от недеформированной длины. Нить и пружина невесомы, блок лёгкий, поэтому натяжение нити у груза M равно силе упругости kx.



0 — старт, пружина не растянута; 1 — равновесие; 2 — нижняя точка.

1. Энергия. Пока груз M стоит, верхний конец пружины неподвижен, и натяжение нити на него работы не совершает. Остальные силы, действующие на систему «груз m + пружина», — тяжесть и упругость — потенциальны: механическая энергия сохраняется. Ноль потенциальной энергии тяжести — в начальном положении груза. От положения 0 до положения 2, скорости в обоих нулевые:

$$0 = -mgx_{\max} + \frac{kx_{\max}^2}{2} \;\Rightarrow\; x_{\max} = \frac{2mg}{k}.$$

Обратите внимание: это вдвое больше растяжения в равновесии $x_0 = \frac{mg}{k}$ — груз проскакивает положение равновесия по инерции.

2. Условие сдвига. Груз M сдвинется, если $kx_{\max} > \mu Mg$:

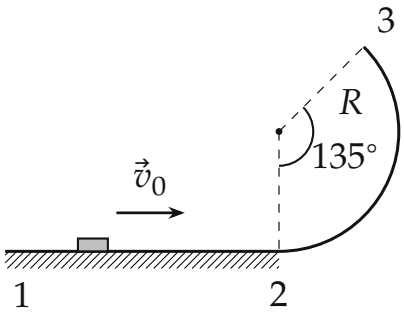
$$2mg > \mu Mg \;\Rightarrow\; m > \frac{\mu M}{2}.$$

Проверка. Размерность верна: масса через массу. Если опускать груз медленно, до равновесия, понадобилось бы $m > \mu M$ — падающий груз справляется с вдвое меньшей массой.

Ответ. $m > \dfrac{\mu M}{2}$.

Пример 2. [Физтех 2023/24, отборочный этап, 10 кл.] Гладкий жёлоб находится в вертикальной плоскости и состоит из горизонтальной части 1–2 и дуги 2–3

окружности радиусом $R = 0{,}5$ м. Угол раствора дуги 135°. Небольшая шайба скользит по горизонтальной части со скоростью $v_0 = 5$ м/с. Найдите максимальную высоту относительно горизонтальной части жёлоба, которую достигнет шайба за всё время движения, $g = 10\,\text{м/с}^2$. Сопротивлением воздуха пренебречь.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Шайба въезжает на дугу и поднимается. Либо она оторвётся от жёлоба раньше точки 3 — там, где прижимающая сила обратится в ноль, — либо доедет до точки 3 и вылетит. Дальше она летит свободно, и наибольшая высота — в верхней точке параболы. Метод 3.

Обозначения. φ — угол между радиусом к шайбе и вертикалью вниз, $0 \le \varphi \le 135°$; на этой высоте шайба поднялась на $R(1 - \cos\varphi)$.

1. Энергия на дуге. Жёлоб гладкий, $\vec{N} \perp \vec{v}$, $A_N = 0$ — механическая энергия сохраняется. Ноль — на уровне 1–2:

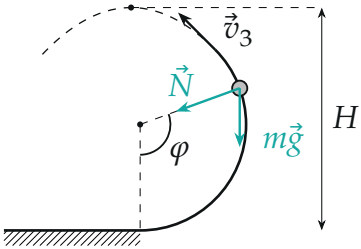
$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mgR(1 - \cos\varphi) \;\Rightarrow\; v^2 = v_0^2 - 2gR(1 - \cos\varphi).$$

2. Не оторвётся ли. Второй закон Ньютона в проекции на радиус к центру:

$$\frac{mv^2}{R} = N - mg\cos\varphi \;\Rightarrow\; N = m\left(\frac{v_0^2}{R} - 2g + 3g\cos\varphi\right).$$

С ростом φ сила N убывает, меньше всего она в точке 3, где $\cos\varphi =$

$-\frac{\sqrt{2}}{2}$: $N_3 = m\left(\frac{v_0^2}{R} - g\left(2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\right) \approx 8{,}8\,m$ м/с$^2 > 0$. Шайба доезжает до точки 3, не отрываясь.



Силы в произвольной точке дуги и полёт после точки 3.

3. Вылет. Точка 3 на высоте $R(1 - \cos 135°) = R\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Скорость там направлена по касательной — под 45° к горизонту, вверх и назад:

$$v_3^2 = v_0^2 - 2gR\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 7{,}9\,\text{м}^2/\text{с}^2.$$

4. Полёт. В полёте на шайбу действует только тяжесть, горизонтальная проекция скорости постоянна: $v_x = v_3 \cos 45°$, и в верхней точке скорость равна ей. Закон сохранения энергии от начала до верхней точки:

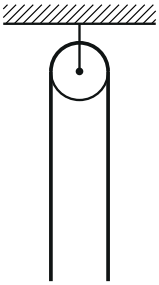
$$\frac{mv_0^2}{2} = mgH + \frac{mv_3^2}{4} \;\Rightarrow\; H = \frac{v_0^2}{4g} + \frac{(2+\sqrt{2})R}{4} \approx 1{,}05\,\text{м}.$$

Проверка. Размерность: оба слагаемых — метры. $H < \frac{v_0^2}{2g} = 1{,}25$ м: часть энергии осталась в горизонтальном движении. При $v_0 < \sqrt{gR\left(2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)} \approx 4{,}5$ м/с шайба оторвалась бы раньше точки 3, и ответ был бы другим — проверка $N \geq 0$ не формальность.

Ответ. $H = \frac{v_0^2}{4g} + \frac{(2+\sqrt{2})R}{4} \approx 1{,}05$ м, то есть 105 см.

Пример 3. [Физтех 2023/24, отборочный этап, 10 кл.] Однородная нерастяжимая верёвка длиной $l = 20$ м перекинута через гладкий блок и находится в по-

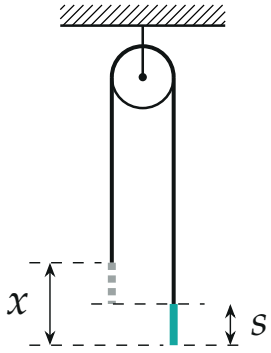
кое. После незначительного смещения из равновесия верёвка приходит в движение с нулевой начальной скоростью. Найдите скорость верёвки в тот момент, когда разность вертикальных координат её концов равна $x = 10$ см, $g = 10\,\text{м/с}^2$.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Верёвка в равновесии висит поровну. Чуть сдвинули — длинная сторона тяжелее, и верёвка разгоняется, всё быстрее. Силы меняются, поэтому вместо второго закона Ньютона — энергия (метод 4).

Обозначения. m — масса верёвки, $\frac{m}{l}$ — масса единицы длины. Блок мал по сравнению с длиной верёвки. Пусть одна сторона удлинилась на s, другая укоротилась на s; тогда разность координат концов $x = 2s$.

1. Почему энергия сохраняется. Блок гладкий: его сила на верёвку перпендикулярна скорости её кусков, работы нет. Верёвка нерастяжима — работа внутренних сил ноль. Остаётся тяжесть.



Кусок длины s с короткой стороны (серый пунктир) как будто переложили вниз на длинную (бирюзовый); пунктир — уровень концов в равновесии.

2. Изменение потенциальной энергии. Сравним «было» и «стало». Всё выглядит так, будто кусок длины s сняли с нижнего конца короткой стороны и подвесили под нижний конец длинной. Центр масс этого куска был на $\frac{s}{2}$ выше уровня концов в равновесии, стал на $\frac{s}{2}$ ниже — опустился на s:

$$\Delta E_{\text{п}} = -\frac{m}{l}s \cdot gs = -\frac{mgs^2}{l}.$$

3. Скорость. Все куски нерастяжимой верёвки движутся с одной скоростью v. Закон сохранения энергии от покоя до этого момента:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mgs^2}{l}, \qquad s = \frac{x}{2} \;\Rightarrow\; v = x\sqrt{\frac{g}{2l}} = 0{,}1 \cdot \sqrt{\frac{10}{40}}\ \text{м/с} = 5\ \text{см/с}.$$

Проверка. Размерность: $x\sqrt{g/l}$ — метр на обратную секунду. Скорость растёт пропорционально смещению — верёвка разгоняется всё сильнее, потому что перевес растёт. Масса верёвки сократилась, как и положено задаче, где действует только тяжесть.

Ответ. $v = x\sqrt{\frac{g}{2l}} = 5$ см/с.

Как решать листок

Сложность 1–3 (тело с горки, брошенный камень, работа силы) — метод 1. Пружины и жгуты — метод 2, нарисуйте все положения. «Давит», «натяжение», «оторвётся», петли и чаши — метод 3. Канаты и цепочки — метод 4. Если в задаче движутся два тела и одно скользит по другому — добавьте закон сохранения проекции импульса (пособие «Импульс»).