Импульс, закон сохранения импульса

После пособия вы сможете

- выбирать систему тел и находить ось, вдоль которой сохраняется проекция импульса;
- разбирать короткую стадию — удар, выстрел, взрыв: какие силы ударные и какой импульс сохраняется;
- находить изменение импульса через импульс силы, в том числе для потока массы;
- связывать скорости тел законом сложения скоростей, а не подставлять относительную скорость вместо скорости относительно Земли.

Теория кратко

Определение 1

Импульс материальной точки — $\vec{p} = m\vec{v}$. Импульс системы — сумма импульсов её точек: $\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots = M\vec{v}_C$, где M — масса системы, $\vec{v}_C$ — скорость её центра масс.

Второй закон Ньютона в импульсной форме для точки в ИСО: $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{R}$, то есть $d\vec{p} = \vec{R}\,dt$ за малое время dt. Произведение $\vec{R}\,dt$ называют импульсом силы. За конечное время суммируем: при $\vec{R} = \text{const}$ получаем $\Delta\vec{p} = \vec{R}\,\Delta t$, а если сила меняется, Δp_x — площадь под графиком $R_x(t)$.

Для системы запишем такой закон для каждой точки и сложим. Внутренние силы по третьему закону Ньютона попарно равны и противоположны — в сумме они сокращаются.

Закон изменения импульса системы

В ИСО

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{R}_{\text{внеш}}, \qquad \Delta\vec{P} = \sum \vec{R}_{\text{внеш}}\,dt.$$

Факт 1

Импульс сохраняется в трёх случаях.

- $\vec{R}_{\text{внеш}} = \vec{0}$ — система замкнута, $\vec{P} = \text{const}$.
- $R_{\text{внеш}\,x} = 0$ — сохраняется только проекция: $P_x = \text{const}$.
- Взаимодействие короткое (удар, выстрел, взрыв, время τ мало), а внешние силы за это время резко не растут: $\Delta\vec{P} = \vec{R}_{\text{внеш ср}}\,\tau \to \vec{0}$. Внутренние силы при этом огромны — но они в $\Delta\vec{P}$ не входят.

Энергия при этом сохраняться не обязана: при выстреле её добавляет порох, при слипании часть уходит в теплоту. Импульс и энергия — два разных закона, каждый со своими условиями.

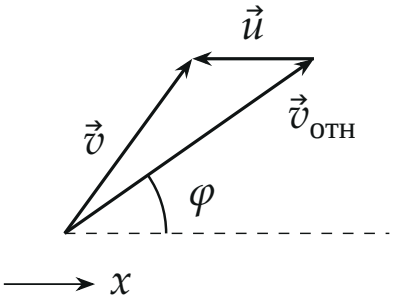
Методы

Метод 1

Сохранение импульса или его проекции. Когда применять: «гладкий стол», «лёд», «рельсы», лодка, тележка, человек прыгает, пушка стреляет — силы взаимодействия тел неизвестны и не нужны.

1. Выберите систему так, чтобы неизвестные силы стали внутренними.
2. Перечислите внешние силы и найдите ось x, на которую их проекция равна нулю.
3. Скорости в законе — относительно Земли (ИСО). Дана скорость относительно движущегося тела — переведите её законом сложения скоростей $\vec{v} = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{u}$.
4. Запишите P_x «было» $= P_x$ «стало», сначала векторно, потом в проекции.

Пример. Пушка массы M на гладких рельсах стреляет снарядом массы m, ствол наклонён под углом φ. Внешние силы — тяжесть и реакция рельсов — вертикальны, поэтому $0 = mv_x - Mu$. Вдоль ствола снаряд летит *относительно пушки*, а пушка откатывается назад: $\vec{v} = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{u}$, и снаряд вылетает круче, чем направлен ствол.



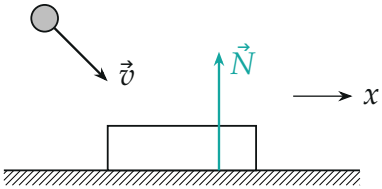
Скорость снаряда относительно Земли — сумма скорости относительно ствола и скорости пушки.

Метод 2

Короткая стадия: какие силы ударные. Когда применять: «удар», «выстрел», «взрыв», «застревает», «пробивает», «падает на доску», «прыгает в лодку».

1. Нарисуйте три состояния: было — взаимодействие — стало.
2. Найдите внешние ударные силы — те, что резко растут вместе с внутренними. Это реакция опоры, если удар вдавливает тело в опору; трение скольжения μN вместе с такой N; натяжение нити, если удар направлен вдоль нити. Тяжесть, пружина, сопротивление воздуха ударными не бывают.
3. Внешних ударных сил нет — импульс системы за удар сохраняется целиком.
4. Направление внешней ударной силы известно — проецируйте на ось, перпендикулярную ей.
5. Направление неизвестно, но $F_{\text{тр}} = \mu N$ — суммируйте по времени удара: $dp_x = -\mu N\,dt$, $dp_y = N\,dt$, сумма $\sum N\,dt$ в них одна и та же, поэтому $\Delta p_x = -\mu\,\Delta p_y$.

Пример. Пластилин падает на брусок, лежащий на гладком столе, под углом к горизонту и прилипает. Удар вдавливает брусок в стол, сила $\vec{N}$ резко растёт — полный импульс системы не сохраняется. Но $\vec{N}$ вертикальна: сохраняется P_x.



Метод 3

Закон изменения импульса: импульс силы и поток массы. Когда применять: «средняя сила», «за время удара», струя, град, лента транспортёра, пулемёт, силу дали графиком.

1. Выберите тело — или порцию массы Δm, которая за время Δt меняет скорость.
2. Запишите $\Delta\vec{p} = \vec{F}\,\Delta t$ векторно; нарисуйте $m\vec{v}_2$ и $-m\vec{v}_1$ и только потом переходите к длинам.
3. Для потока: Δm выразите через скорость потока и Δt, сила — $F = \dfrac{\Delta p}{\Delta t}$.
4. Сила дана графиком $F(t)$ — изменение импульса равно площади под ним.

Пример. Автомат делает n выстрелов в секунду пулями массы m со скоростью v. За 1 с пули получают импульс nmv — столько же получает автомат в обратную сторону, и средняя сила на плечо стрелка $F_{\text{ср}} = nmv$.

Частые ошибки

Частая ошибка

Сохранять полный импульс, когда есть внешняя ударная сила. Пуля бьёт в шар на нити снизу вверх под углом — натяжение нити резко растёт, и сохраняется лишь проекция импульса на горизонталь. Горизонтальная пуля в шар на вертикальной нити — натяжение не ударное, сохраняется весь импульс.

Частая ошибка

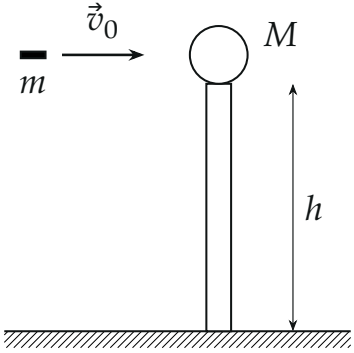
Подставлять в закон сохранения скорость относительно движущегося тела. Закон сохранения импульса пишется в ИСО — сначала закон сложения скоростей.

Частая ошибка

Терять знаки. Мяч отскочил с той же по модулю скоростью: $\Delta\vec{p} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$, и $|\Delta\vec{p}| = 2mv$, а не ноль. Векторное равенство сначала рисуем или проецируем.

Разобранные примеры

Пример 1. [Курчатов 2022/23, заключительный этап, 9 кл.] Шар массой $M = 0{,}2$ кг покоится на вертикальной колонне высотой $h = 5$ м. Пуля массой $m = 0{,}01$ кг, летящая горизонтально со скоростью $v_0 = 500$ м/с, проходит горизонтально через шар и летит дальше. Шар падает на землю на расстоянии $s = 20$ м от основания колонны. На каком расстоянии от основания колонны упадёт пуля? Какая часть кинетической энергии пули перешла в теплоту? Сопротивлением воздуха пренебречь, $g = 10\,\text{м/с}^2$.

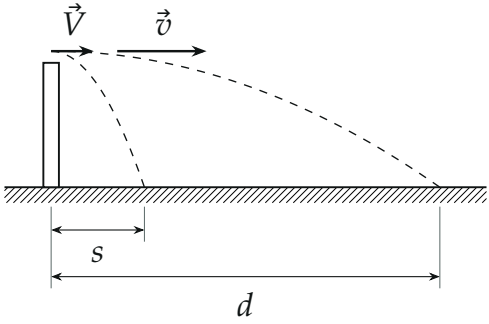


▲ **Решение. Что происходит.** Пуля проходит шар за очень короткое время — это короткая стадия (метод 2). Потом шар и пуля летят по параболам с одной и той же высоты. Дальности дают скорости после удара, а связь скоростей — закон сохранения импульса.

1. Удар. Система «пуля + шар». Внешние силы — тяжесть и реакция колонны. Пуля летит горизонтально и не вдавливает шар в колонну, поэтому реакция колонны не ударная: импульс системы за время удара сохраняется. Ось x — по $\vec{v}_0$; v и V — скорости пули и шара сразу после удара:

$$mv_0 = mv + MV.$$

2. Полёт. После удара обе скорости горизонтальны, по вертикали оба тела падают с высоты h без начальной скорости — одно и то же время $t = \sqrt{2h/g} = 1$ с. По горизонтали скорости не меняются: $s = Vt$, $d = vt$.



После удара: шар и пуля падают одно и то же время; масштаб по горизонтали не соблюдён.

3. Дальность пули. Из пункта 2 $V = s/t = 20$ м/с. Из закона сохранения импульса

$$v = v_0 - \frac{M}{m}V = 500 - 20 \cdot 20 = 100\,\text{м/с},$$

и пуля падает на расстоянии

$$d = vt = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}} - \frac{M}{m}s = 100\,\text{м}.$$

4. Теплота. Механическая энергия при ударе не сохраняется: внутренние силы трения пули о шар совершают отрицательную работу. Закон изменения механической энергии системы за время удара (высота не успевает измениться):

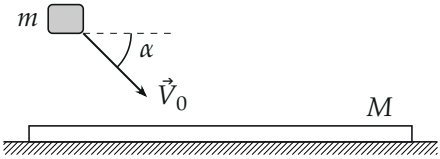
$$Q = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv^2}{2} - \frac{MV^2}{2} = 1250 - 50 - 40 = 1160\,\text{Дж}, \qquad \frac{Q}{mv_0^2/2} \approx 0{,}93.$$

Проверка. Размерность d: $v_0\sqrt{h/g}$ — метры, $\frac{M}{m}s$ — метры. Знак: $v = 100\,\text{м/с} > V = 20\,\text{м/с}$ — пуля после удара обгоняет шар, как и должно

быть, раз она прошла насквозь. Почти вся энергия пули ушла в нагрев: импульс шару передать «дёшево», энергию — нет.

Ответ. $d = v_0\sqrt{\dfrac{2h}{g}} - \dfrac{M}{m}s = 100$ м; в теплоту перешло $\approx 93\,\%$ кинетической энергии пули.

Пример 2. [Физтех 2025/26, отборочный этап, 10 кл.] Мешок с песком падает на длинную шероховатую доску, лежащую на гладкой горизонтальной поверхности, и безотрывно скользит по доске. Масса мешка в $n = 8$ раз меньше массы доски. Перед соударением мешок движется со скоростью $V_0 = 9$ м/с под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту. Коэффициент трения мешка о доску $\mu = 0{,}2$ и не зависит от скорости и силы давления. Через какое время T мешок остановится на доске? Действием силы тяжести во время соударения пренебречь, $g = 10\,\text{м/с}^2$. Доска и мешок движутся поступательно.



▲ **Решение. Что происходит.** Сначала короткий удар: мешок бьёт в доску, его вертикальная скорость гасится, и вместе с огромной силой N растёт трение скольжения μN — оно успевает заметно затормозить мешок. Потом мешок скользит по доске, пока их скорости не сравняются. «Остановится на доске» — остановится *относительно доски*.

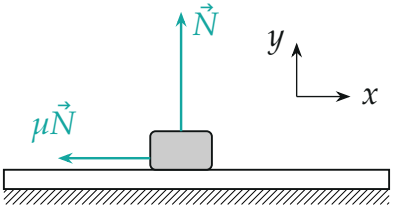
Обозначения и оси. m — масса мешка, $M = nm$ — доски. Ось x — горизонтально по движению мешка, y — вверх. v_1 — скорость мешка сразу после удара, u — общая скорость в конце.

1. Конечная скорость. Система «мешок + доска». Внешние силы — тяжесть и реакция гладкого пола. Реакция пола при ударе ударная, но вертикальна: от начала до конца сохраняется P_x (метод 1):

$$mV_0\cos\alpha = (m+M)u \;\Rightarrow\; u = \frac{V_0\cos\alpha}{n+1} \approx 0{,}71\,\text{м/с}.$$

2. Удар — мешок отдельно. Мешок всё время удара скользит вперёд относительно доски, трение на него — назад, $F_{\text{тр}} = \mu N$. Направление полной силы реакции доски заранее не очевидно — суммируем (метод 2, шаг 5). Закон изменения импульса мешка за малое dt:

$$dp_x = -\mu N\,dt, \qquad dp_y = N\,dt.$$



Ударные силы на мешок; трение по модулю μN на всём ударе.

Суммируем за время удара: сумма $\sum N\,dt$ в обеих строчках одна и та же, поэтому $\Delta p_x = -\mu\,\Delta p_y$. Вертикальный импульс мешка изменился от $-mV_0\sin\alpha$ до нуля:

$$mv_1 - mV_0\cos\alpha = -\mu m V_0\sin\alpha \;\Rightarrow\; v_1 = V_0(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) \approx 5{,}09\ \text{м/с}.$$

Доска после удара едет со скоростью $\mu V_0\sin\alpha/n \approx 0{,}16$ м/с $< v_1$ — предположение «мешок скользит весь удар» верно.

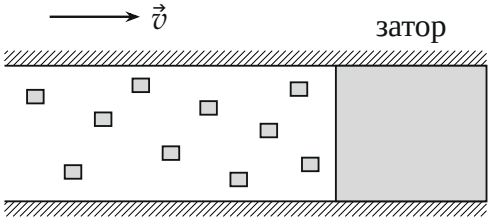
3. Скольжение. Теперь $N = mg$, трение на мешок μmg назад, ускорение мешка $-\mu g$. Скорость падает от v_1 до u:

$$T = \frac{v_1 - u}{\mu g} = \frac{V_0}{g}\left(\frac{n\cos\alpha}{\mu(n+1)} - \sin\alpha\right) \approx \frac{5{,}09 - 0{,}71}{2}\ \text{с} \approx 2{,}2\ \text{с}.$$

Проверка. Размерность: V_0/g — секунды. Предел $n \to \infty$ (доска неподвижна): $T = v_1/(\mu g)$ — мешок просто тормозит до нуля. Если бы мы забыли трение во время удара, вышло бы $T \approx 2{,}8$ с — удар отнимает у мешка заметную долю скорости.

Ответ. $T = \dfrac{V_0}{g}\left(\dfrac{n\cos\alpha}{\mu(n+1)} - \sin\alpha\right) \approx 2{,}2$ с.

Пример 3. [ВсОШ 1994/95, заключительный этап, 9 кл.] По реке со скоростью v плывут мелкие льдины, равномерно покрывая n-ю часть поверхности воды. В некотором месте образовался затор: в нём льдины полностью покрывают поверхность, не нагромождаясь друг на друга. С какой скоростью растёт граница сплошного льда? Какая сила действует на 1 м границы между водой и сплошным льдом со стороны останавливающихся льдин? Плотность льда $\rho = 0{,}91 \cdot 10^3$ кг/м^3, толщина $h = 20$ см, $v = 0{,}72$ км/ч, $n = 0{,}1$.



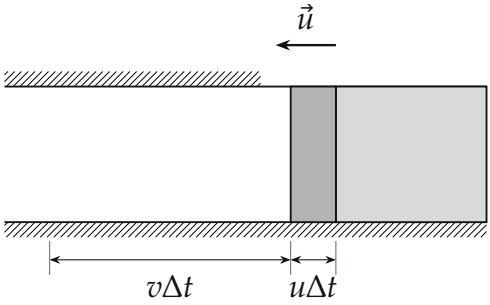
Вид сверху: льдины плывут к затору.

▲ **Решение. Что происходит.** Льдины подплывают к границе затора и останавливаются, а граница из-за этого ползёт навстречу течению. Скорость границы даёт подсчёт льда, а сила — закон изменения импульса для льдин, которые останавливаются за малое время Δt (метод 3).

Обозначения. u — скорость границы относительно берега, против течения. Всё считаем на 1 м ширины реки.

1. Скорость границы. За время Δt граница сдвинулась на $u\Delta t$ — столько сплошного льда прибавилось. Этот лёд собрали льдины с участка, который граница «прошла» навстречу им: относительно границы они плывут со скоростью $v + u$, участок длиной $(v + u)\Delta t$, льдом покрыта доля n:

$$n(v + u)\Delta t = u\Delta t \;\Rightarrow\; u = \frac{nv}{1 - n} = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}2}{0{,}9}\ \text{м/с} \approx 0{,}022\ \text{м/с}.$$



За Δt к затору присоединяется полоса $u\Delta t$ (темнее) — лёд с участка длиной $(v+u)\Delta t$.

2. Сила. За Δt останавливается лёд массы $\Delta m = \rho h\, u\Delta t$ (на 1 м границы). Его скорость относительно берега меняется от v до нуля. Закон изменения импульса для этой порции в проекции на течение: со стороны затора на неё действует сила F против течения,

$$0 - \Delta m\, v = -F\Delta t \;\Rightarrow\; F = \rho h u v = \frac{n}{1-n}\,\rho h v^2 \approx 0{,}8\ \text{Н/м}.$$

По третьему закону Ньютона с такой же силой останавливающиеся льдины давят на границу затора.

Проверка. Размерность: $\text{кг/м}^3 \cdot \text{м} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2 = \text{Н/м}$. Пределы: $n \to 0$ — льдин нет, $u \to 0$ и $F \to 0$; $n \to 1$ — река покрыта сплошь, и вся она останавливается разом: $u \to \infty$. Сила маленькая — льдины плывут медленно и редко.

Ответ. $u = \dfrac{nv}{1-n} \approx 0{,}022$ м/с; $F = \dfrac{n}{1-n}\,\rho h v^2 \approx 0{,}8$ Н на 1 м границы.

Как решать листок

Сложность 1–3 (тележка, лодка, отдача, разрыв снаряда) — метод 1. Пуля застревает или пробивает, тело падает на доску или в тележку — метод 2: сначала решите, какие силы ударные. Струи, ленты, «средняя сила» — метод 3. От сложности 6 — подвижные горки и клинья: закон сохранения проекции импульса вместе с законом сохранения энергии (пособие «Механическая энергия»).