Упругие столкновения

После пособия вы сможете

- отличать упругий, неупругий и абсолютно неупругий удар по работе внутренних сил;
- решать лобовой упругий удар в системе центра масс: там скорости просто меняют знак;
- решать удар о массивное или движущееся тело в системе отсчёта этого тела;
- разбирать нелобовой удар гладких шаров: вдоль линии центров — как лобовой, поперёк — ничего не меняется.

Теория кратко

Во время удара тела действуют друг на друга огромными внутренними силами. Удары различают по суммарной работе этой пары сил — она зависит только от того, как точка приложения сместилась *относительно другого тела*.

Определение 1

Удар *упругий*, если суммарная работа внутренних сил взаимодействия равна нулю: тела восстановили форму. *Неупругий* — работа отрицательна, выделяется теплота Q. *Абсолютно неупругий* — теплота наибольшая: тела слипаются или пропадает составляющая относительной скорости по нормали к поверхности касания.

Если внешних ударных сил нет, за удар сохраняется импульс системы (пособие «Импульс»). Если к тому же удар упругий и внешние силы за время удара работы не совершают, сохраняется и кинетическая энергия системы.

Определение 2

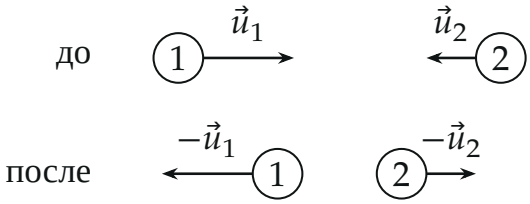
Система центра масс — инерциальная система отсчёта, движущаяся поступательно со скоростью центра масс $\vec{v}_C = \dfrac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$. В ней суммарный импульс равен нулю.

Докажем главный факт. В системе центра масс до удара импульсы тел

$\vec{p}$ и $-\vec{p}$, после — $\vec{p}\,'$ и $-\vec{p}\,'$. Энергия сохраняется:

$$\frac{p^2}{2m_1}+\frac{p^2}{2m_2}=\frac{p'^2}{2m_1}+\frac{p'^2}{2m_2}\ \Rightarrow\ p'=p.$$

Модули импульсов, а значит, и скоростей не изменились. При лобовом ударе всё на одной прямой, и $\vec{p}\,'=\vec{p}$ означало бы, что удара не было. Значит, $\vec{p}\,'=-\vec{p}$.



Упругий лобовой удар в системе центра масс: $m_1u_1=m_2u_2$, скорости меняют знак.

Факт 1

Упругий лобовой удар.

- В системе центра масс скорости меняют знак; в исходной системе $\vec{v}\,'=2\vec{v}_C-\vec{v}$ для каждого тела.
- То же другими словами: относительная скорость меняет знак, $\vec{v}_1\,'-\vec{v}_2\,'=-(\vec{v}_1-\vec{v}_2)$.
- Налетает на покоящееся: $v_1'=\dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_1$, $v_2'=\dfrac{2m_1}{m_1+m_2}v_1$; равные массы обмениваются скоростями.

Методы

Метод 1

Лобовой удар через систему центра масс. Когда применять: «упругий центральный удар», «лоб в лоб», шары на одной прямой, спрашивают скорости после удара или долю переданной энергии.

1. Найдите скорость центра масс v_C (проекции со знаком на ось удара).

2. Скорости в системе центра масс: $u = v - v_C$.
3. Меняйте знаки: $u' = -u$.
4. Возвращайтесь: $v' = u' + v_C = 2v_C - v$.

Второй путь — закон сохранения импульса и «отражение относительной скорости» $v_1' - v_2' = -(v_1 - v_2)$: два линейных уравнения вместо квадратного.

Пример. Шар m_1 налетает со скоростью v на покоящийся шар m_2. Какую долю энергии он передаст? Скорость второго шара после удара $v_2' = 2v_C = \frac{2m_1}{m_1+m_2}v$, и

$$\frac{m_2 v_2'^2/2}{m_1 v^2/2} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2}.$$

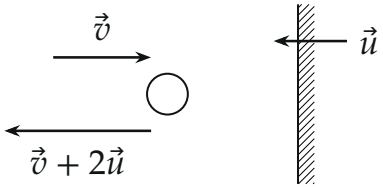
Выражение симметрично по массам: лёгкий шар на тяжёлый и тяжёлый на лёгкий передают одну и ту же долю. Всю энергию — только при равных массах. Поэтому в задачах «доля не изменилась, когда налетающий шар заменили» масса нового налетающего шара — m_2^2/m_1.

Метод 2

Удар о массивное или движущееся тело. Когда применять: «стенка движется», «ракетка», «плита», «масса много больше».

1. Перейдите в систему отсчёта тяжёлого тела. Она инерциальная, если его двигают с постоянной скоростью или $M \gg m$ — тогда его скорость при ударе почти не меняется.
2. Там тело неподвижно, и удар — как о неподвижную стенку: составляющая скорости по нормали меняет знак, касательная не меняется, угол падения равен углу отражения.
3. Вернитесь законом сложения скоростей — прибавьте скорость тяжёлого тела.

Пример. Ракетка движется навстречу мячу со скоростью u, мяч летит со скоростью v. В системе ракетки мяч налетает со скоростью $v + u$ и отскакивает с той же, а относительно Земли — со скоростью $v + 2u$. Энергия мяча выросла: ракетка за время удара сдвинулась, и её сила совершила положительную работу.

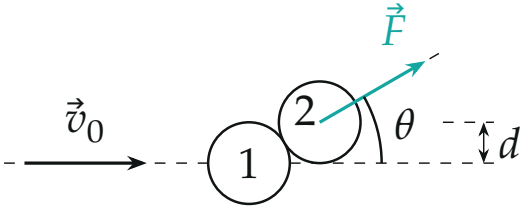


Мяч и движущаяся навстречу ракетка (стенка).

Метод 3

Нелобовой удар гладких шаров. Когда применять: «шайбы», «бильярд», «прицельный параметр», шары разлетаются под углом.

1. Шары гладкие — сила удара направлена по линии центров в момент касания. Найдите угол этой линии: $\sin\theta = \dfrac{d}{R_1 + R_2}$, где d — прицельный параметр.
2. Касательные к шарам составляющие скоростей не меняются.
3. Составляющие по линии центров меняются, как при лобовом ударе (метод 1).
4. Равные массы, второй шар покоился: $\vec{v}_0 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ и $v_0^2 = v_1^2 + v_2^2$ — по теореме Пифагора шары разлетаются под прямым углом.



Сила удара на шар 2 — по линии центров; d — расстояние от линии движения шара 1 до центра шара 2.

Частые ошибки

Частая ошибка

«Удар упругий — значит, энергия сохраняется» для одного тела или для системы, которую двигает внешняя сила. При ударе о движущуюся стенку энергия шарика меняется: $v' = v + 2u$, а не v.

Частая ошибка

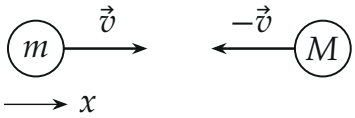
При нелобовом ударе «отражать» всю относительную скорость. Меняется только её составляющая по линии центров; касательная остаётся.

Частая ошибка

Считать абсолютно неупругий удар всегда слипанием. «Теряет вертикальную составляющую скорости», мешок едет по плите после падения — это тоже абсолютно неупругий удар.

Разобранные примеры

Пример 1. [Ведомственная 2010/11, заключительный этап, 10 кл.] Две шайбы скользят по гладкой поверхности навстречу друг другу с одинаковыми скоростями. После абсолютно упругого лобового столкновения одна из них, масса которой m, движется назад с вдвое уменьшившейся скоростью. Найдите массу второй шайбы.



▲ **Решение. Что происходит.** Лобовой упругий удар — в системе центра масс скорости шайб просто меняют знак (метод 1). Из того, что известно про шайбу m, найдём скорость центра масс, а из неё — M.

Обозначения. Ось x — по скорости шайбы m; до удара $v_{1x} = v$, $v_{2x} = -v$; после удара $v'_{1x} = -\frac{v}{2}$.

1. Скорость центра масс. Внешние силы вертикальны, импульс по x сохраняется, v_C за удар не меняется:

$$v_C = \frac{mv - Mv}{m + M}.$$

2. Отражение в системе центра масс. Для шайбы m:

$$v'_{1x} = 2v_C - v_{1x} \;\Rightarrow\; -\frac{v}{2} = 2v_C - v \;\Rightarrow\; v_C = \frac{v}{4}.$$

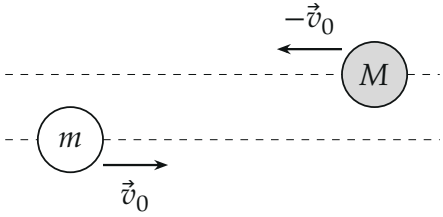
3. Масса. Приравниваем:

$$\frac{m-M}{m+M}=\frac{1}{4}\ \Rightarrow\ 4m-4M=m+M\ \Rightarrow\ M=\frac{3}{5}\,m.$$

Проверка. Второй способ — отражение относительной скорости: $v'_{1x}-v'_{2x}=-2v$, значит, $v'_{2x}=\frac{3}{2}v$. Импульс: $mv-Mv=-\frac{m}{2}v+\frac{3}{2}Mv$, снова $M=\frac{3}{5}m$. Энергия: $(m+M)v^2=\frac{m}{4}v^2+\frac{9}{4}Mv^2$ даёт то же. Шайба M легче — её и отбросило быстрее.

Ответ. $M=\dfrac{3}{5}\,m.$

Пример 2. [ВсОШ 2025/26, муниципальный этап, 9 кл.] Два одинаковых по размеру, но разных по массе гладких шара движутся навстречу друг другу с одинаковыми постоянными скоростями $v_0=5$ м/с так, что прямая, по которой движется центр одного шара, касается другого шара. Удар абсолютно упругий. Масса лёгкого шара намного меньше массы тяжёлого. Найдите скорость лёгкого шара в системе отсчёта тяжёлого до удара v_1 и после удара v_2, скорость лёгкого шара после удара в лабораторной системе v_3 и угол α, на который повернётся вектор его скорости.



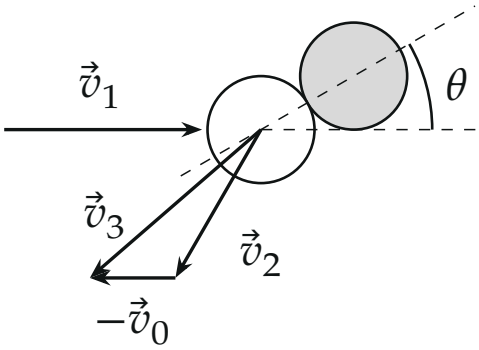
Пунктир — линии движения центров.

▲ **Решение. Что происходит.** Тяжёлый шар при ударе почти не меняет скорость — перейдём в его систему отсчёта (метод 2). В ней он стоит, и лёгкий шар отражается от него, как от стенки, перпендикулярной линии центров (метод 3). Потом вернёмся на Землю.

1. До удара. По закону сложения скоростей $\vec{v}_1=\vec{v}_0-(-\vec{v}_0)=2\vec{v}_0$, $v_1=2v_0=10$ м/с.

2. Геометрия. В момент касания расстояние между центрами $2R$, а между линиями их движения R. Линия центров наклонена к скорости на угол θ, $\sin\theta = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}$, $\theta = 30°$.

3. Отражение. Шары гладкие — сила удара по линии центров. Тяжёлый шар в своей системе неподвижен, удар упругий: модуль скорости сохраняется, $v_2 = 2v_0 = 10$ м/с. Составляющая по линии центров меняет знак, касательная остаётся — скорость поворачивается на $180° - 2\theta = 120°$.



В системе тяжёлого шара скорость повернулась на $120°$*;* $\vec{v}_3 = \vec{v}_2 + (-\vec{v}_0)$.

4. Возвращаемся. Закон сложения скоростей: $\vec{v}_3 = \vec{v}_2 + (-\vec{v}_0)$. Угол между $\vec{v}_2$ и $-\vec{v}_0$ равен $60°$, по теореме косинусов

$$v_3^2 = (2v_0)^2 + v_0^2 + 2 \cdot 2v_0 \cdot v_0 \cos 60° = 7v_0^2,$$

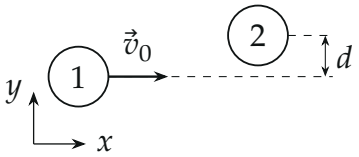
то есть $v_3 = \sqrt{7}\, v_0 \approx 13$ м/с. В проекциях на ось по $\vec{v}_0$ и перпендикулярную ей: $\vec{v}_3 = \left(-2v_0;\ -\sqrt{3}\, v_0\right)$, поэтому вектор скорости повернулся на угол

$$\alpha = 180° - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 139°.$$

Проверка. Скорости — в м/с, α — безразмерный. Энергия лёгкого шара выросла: $7v_0^2 > v_0^2$ — тяжёлый шар двигался навстречу и совершил над ним положительную работу, как ракетка. Лобовой удар ($\theta = 0$) дал бы $3v_0$ назад; здесь меньше, потому что удар скользящий.

Ответ. $v_1 = v_2 = 2v_0 = 10$ м/с; $v_3 = \sqrt{7}\,v_0 \approx 13$ м/с; $\alpha \approx 139°$.

Пример 3. [ВсОШ 2014/15, региональный этап, 10 кл.] На гладкой горизонтальной поверхности лежат две одинаковые гладкие шайбы радиуса R. Одной из них сообщают скорость v_0 вдоль оси x. При каком прицельном параметре d проекция на ось y скорости второй шайбы после абсолютно упругого удара максимальна?

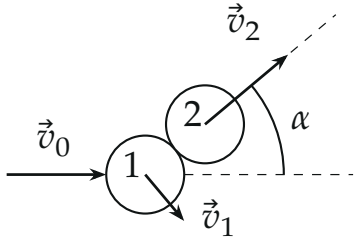


▲ **Решение. Что происходит.** Нелобовой упругий удар одинаковых гладких шайб (метод 3). Направление, в котором полетит вторая шайба, задаёт линия центров, а она — прицельным параметром. Найдём скорость второй шайбы как функцию угла и возьмём максимум.

Обозначения. α — угол между линией центров в момент удара и осью x. Центры тогда на расстоянии $2R$, поэтому $d = 2R\sin\alpha$.

1. Направление. Шайбы гладкие — сила удара на шайбу 2 направлена по линии центров. Шайба 2 покоилась, значит, она поедет вдоль линии центров, под углом α к оси x.

2. Модуль. Касательная составляющая скорости шайбы 1 ($v_0\sin\alpha$) не меняется. По линии центров удар как лобовой при равных массах — шайбы обмениваются этими составляющими: шайба 2 получает $v_0\cos\alpha$, а шайба 1 уходит перпендикулярно линии центров — разлёт под прямым углом.



Шайба 2 уходит по линии центров, шайба 1 — перпендикулярно ей.

3. Максимум. Проекция на ось y:

$$v_{2y} = v_0 \cos\alpha \sin\alpha = \frac{v_0}{2}\sin 2\alpha.$$

Наибольшая при $2\alpha = 90°$, $\alpha = 45°$, тогда $d = 2R\sin 45° = \sqrt{2}\,R$ и $v_{2y} = \frac{v_0}{2}$.

Проверка. Пределы: $d = 0$ — лобовой удар, шайба 2 уходит вдоль x, $v_{2y} = 0$; $d \to 2R$ — шайбы едва касаются, $v_2 \to 0$. Максимум между ними, как и должно быть. Ответ не зависит от v_0 — задача чисто геометрическая.

Ответ. $d = \sqrt{2}\,R$ (линия центров под 45° к оси x); при этом $v_{2y} = \dfrac{v_0}{2}$.

Как решать листок

Сложность 1–4 — лобовые удары: метод 1, считайте через v_C или через отражение относительной скорости. Стенки, ракетки, тяжёлые плиты — метод 2. Шайбы, бильярд, «под углом» — метод 3; при равных массах сразу вспоминайте разлёт под прямым углом. От сложности 6 — удары о подвижные клинья и цепочки ударов: на каждый удар — свои законы сохранения.