Плавление и кристаллизация

После пособия вы сможете

- находить теплоту плавления и кристаллизации и понимать, почему температура при этом не меняется;
- в задачах «лёд + вода» сначала выяснять, хватит ли тепла, и разбирать все возможные конечные состояния;
- читать график температуры от времени при постоянной мощности нагревателя;
- учитывать, что при плавлении масса сохраняется, а объём меняется.

Теория кратко

Кристаллическое тело плавится при определённой температуре $t_{пл}$ (лёд при нормальном давлении — при 0°C). Пока плавление не закончилось, есть обе фазы, твёрдая и жидкая, и температура стоит на месте, хотя теплоту подводят. Она идёт на разрушение кристалла: внутренняя энергия растёт.

Факт 1

Чтобы расплавить массу m, уже нагретую до $t_{пл}$, нужно

$$Q = \lambda m,$$

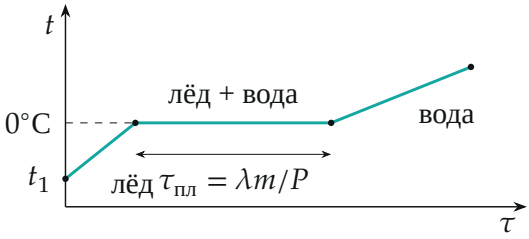
λ — удельная теплота плавления, Дж/кг. При кристаллизации той же массы столько же теплоты выделяется, при той же температуре. Нагрев и охлаждение без перехода — $Q = cm\Delta t$, с теплоёмкостью *текущей* фазы: у льда $c_л \approx 2{,}1$ кДж/(кг · °C), у воды $c_в \approx 4{,}2$ кДж/(кг · °C).

Определение 1

Лёд и вода вместе находятся в равновесии только при 0°C. Если в конечном состоянии есть и лёд, и вода, конечная температура известна сразу: $\theta = 0$°C, неизвестна — масса растаявшего (или замёрзшего).

Если нагреватель даёт постоянную мощность P и потерь нет, за время τ подводится $Q = P\tau$. График температуры от времени — тот же

график $t(Q)$, только в другом масштабе: наклон участка $\Delta t/\Delta\tau = P/C$, длительность площадки $\tau_{пл} = \lambda m/P$.



Лёд массы m греют нагревателем постоянной мощности P. Наклон: у льда $P/(c_л m)$, у воды вдвое меньше.

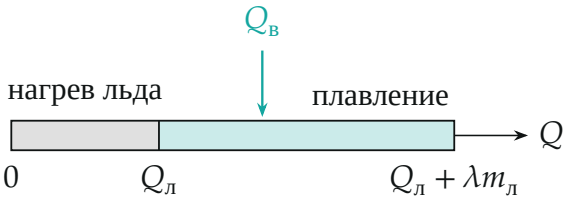
Масса при плавлении сохраняется, а объём — нет. Плотность льда $\rho_л = 900\,кг/м^3$ меньше плотности воды: талая вода занимает 0,9 объёма растаявшего льда, а замерзая, вода расширяется на $1/9$ — поэтому бутылку с водой в морозилке разрывает.

Методы

Метод 1

Хватит ли тепла? Избыток или недостаток при $0°C$. Когда применять: в калориметр с водой положили лёд, залили лёд водой, «найдите массу льда в конце», конечная температура не дана.

1. Мысленно доведём всё до $0°C$, ничего не плавя и не замораживая. Вода, остывая до нуля, отдаст $Q_в = c_в m_в t_в$; льду, чтобы нагреться до нуля, нужно $Q_л = c_л m_л |t_л|$.
2. Избыток $\Delta Q = Q_в - Q_л > 0$ пойдёт на плавление. $\Delta Q < \lambda m_л$ — растает $\Delta Q/\lambda$, конечная температура $0°C$. $\Delta Q \geq \lambda m_л$ — растает весь лёд, конечную температуру (выше нуля) даст уравнение баланса.
3. Недостаток $\Delta Q < 0$ покроет кристаллизация воды. $|\Delta Q| < \lambda m_в$ — замёрзнет $|\Delta Q|/\lambda$, конечная температура $0°C$. Иначе замёрзнет всё, и конечная температура ниже нуля.
4. Только для выбранного случая записывайте уравнение теплового баланса.



Куда попадает $Q_в$ — теплота, которую отдаст вода, остыв до нуля. Здесь в середину площадки: конечная температура $0°C$, растаяла часть льда.

Метод 2

График температуры от времени. Когда применять: «нагревают с постоянной мощностью», «через три минуты температура выросла на…», дан график $t(\tau)$ или его надо построить.

1. Разметьте участки по фазам: наклонный — нагрев одной фазы, горизонтальный — переход.
2. Для каждого участка: $P\Delta\tau = cm\Delta t$ на наклонном, $P\tau_{пл} = \lambda m$ на площадке.
3. Берите отношения участков: мощность и масса сокращаются. Например, лёд греется от $-20°C$ до нуля за τ_1 и плавится за τ_2: $\dfrac{\tau_2}{\tau_1} = \dfrac{\lambda}{c_л \cdot 20°} \approx 8.$
4. Момент, когда закончилось плавление, не измерен — продлите прямой наклонный участок до уровня площадки. При охлаждении всё так же, с мощностью отвода тепла.

Метод 3

Масса сохраняется, объём меняется. Когда применять: «лунка во льду», «уровень воды», «поршень поднялся», «сколько воды поместится».

1. Масса растаявшего льда равна массе талой воды: $\rho_л V_л = \rho_в V_{тв}$, и $V_{тв} < V_л$.
2. Выберите одну и ту же область пространства до и после процесса и приравняйте её объём, расписанный по частям.
3. Добавьте уравнение теплового баланса — оно связывает массу растаявшего льда с теплотой.

Частые ошибки

Частая ошибка

Сразу написать «весь лёд растаял». Конечная температура выходит ниже нуля или растаявшая масса больше всей массы льда — значит, случай другой. Сначала метод 1.

Частая ошибка

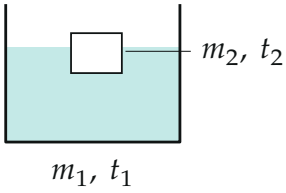
Забыть талую воду: после плавления её ещё греют от 0°C до θ, и с теплоёмкостью *воды*, а не льда. И обратное: лёд, взятый при 0°C, нагревать до плавления не нужно.

Частая ошибка

«На площадке температура не меняется — значит, тепло не идёт». Идёт: нагреватель работает, вся его теплота уходит на плавление. Внутренняя энергия растёт при постоянной температуре.

Разобранные примеры

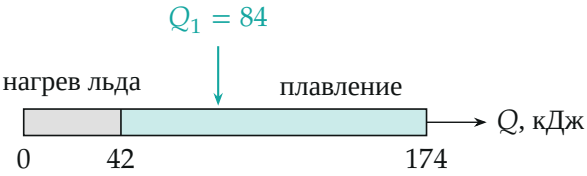
Пример 1. [Курчатов 2023/24, отборочный этап, 9 кл.] В калориметр, содержащий воду массой $m_1 = 1$ кг при температуре $t_1 = 20°C$, положили кусок льда массой $m_2 = 0{,}4$ кг при температуре $t_2 = -50°C$. Найдите массу M льда в калориметре после установления теплового равновесия. Удельная теплоёмкость воды $c_1 = 4{,}2$ кДж/(кг·°C), льда $c_2 = 2{,}1$ кДж/(кг·°C), удельная теплота плавления льда $\lambda = 0{,}33$ МДж/кг. Теплоёмкость калориметра не учитывайте.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Вода остывает, лёд нагревается. Растает ли лёд, замёрзнет ли вода — заранее неизвестно, поэтому сначала проверим, хватит ли тепла (метод 1).

1. Доводим всё до нуля. Вода, остывая до 0°C, может отдать $Q_1 = c_1 m_1 t_1 = 4{,}2 \cdot 1 \cdot 20 = 84$ кДж. Льду, чтобы нагреться до 0°C, нужно $Q_2 = c_2 m_2 |t_2| = 2{,}1 \cdot 0{,}4 \cdot 50 = 42$ кДж.

2. Избыток. $Q_1 > Q_2$: остаётся $\Delta Q = 42$ кДж на плавление. Чтобы расплавить весь лёд, нужно $\lambda m_2 = 132$ кДж — больше. Значит, в конце смесь льда и воды при 0°C, растаяла часть льда.



3. Уравнение теплового баланса. Вода отдала Q_1, лёд получил Q_2 на нагрев и $\lambda m_\text{п}$ на плавление массы $m_\text{п}$:

$$c_1 m_1 t_1 = c_2 m_2 |t_2| + \lambda m_\text{п} \quad \Rightarrow \quad m_\text{п} = \frac{84 - 42}{330} \approx 0{,}127 \text{ кг}.$$

Льда осталось

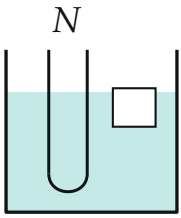
$$M = m_2 - m_\text{п} = m_2 - \frac{c_1 m_1 t_1 - c_2 m_2 |t_2|}{\lambda} \approx 0{,}27 \text{ кг}.$$

Проверка. Размерность: кДж делим на кДж/кг — кг. $0 < m_\text{п} < m_2$ — случай выбран верно. Если бы воды было вдвое меньше, $Q_1 = Q_2$ и лёд не растаял бы вовсе.

Ответ. $M \approx 0{,}27$ кг; в калориметре смесь льда и воды при 0°C.

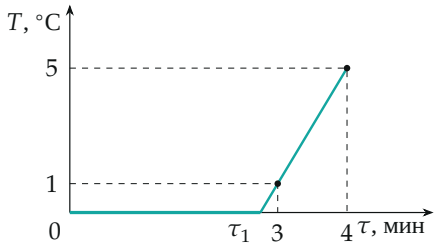
Пример 2. [Курчатов 2019/20, заключительный этап, 8 кл.] Электрокалориметр, наполненный некоторым количеством воды, нагревают с постоянной мощностью $N = 75$ Вт. В воду, имеющую температуру 0°C, опускают небольшое количество льда и начинают измерять температуру смеси. Через три минуты после помещения льда температура увеличивается на $\Delta T_1 = 1$°C, а к концу четвёртой минуты — ещё на $\Delta T_2 = 4$°C. Найдите изначальную массу воды в калориметре и массу добавленного льда.

Удельная теплота плавления льда $\lambda = 340$ Дж/г, удельная теплоёмкость воды $c = 4{,}2$ Дж/(г · °C).



▲ **Решение. Что происходит.** Пока тает лёд, температура стоит на 0°C. Когда он растает, нагреватель греет всю воду, и температура растёт равномерно. Измерения при 3 и 4 минутах — уже на этом участке: за последнюю минуту температура выросла на 4°, а от нуля до третьей минуты — лишь на 1°. Строим график (метод 2).

1. Когда растаял лёд. На наклонном участке температура растёт на 4°C в минуту. До 1°C она поднялась за 1/4 минуты, то есть начала расти в момент $\tau_1 = 3 - 0{,}25 = 2{,}75$ мин $= 165$ с. Это и есть конец плавления.



Площадка плавления на 0°C и прямая нагрева воды; продолжаем прямую до нуля и находим τ_1.

2. Масса льда. Всё время до τ_1 теплота нагревателя шла на плавление: $N\tau_1 = \lambda m$,

$$m = \frac{N\tau_1}{\lambda} = \frac{75 \cdot 165}{340} \approx 36\,\text{г}.$$

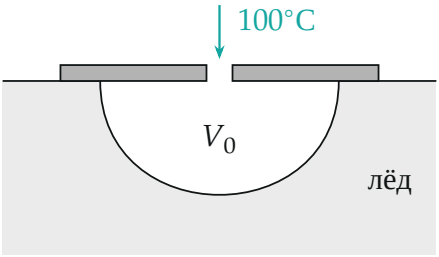
3. Масса воды. После плавления греется вся вода, $M + m$. За минуту она нагрелась на $\Delta T_2 = 4$°C: $N \cdot 60\,\text{с} = c(M + m)\Delta T_2$,

$$M + m = \frac{75 \cdot 60}{4{,}2 \cdot 4} \approx 268\,\text{г}, \qquad M \approx 232\,\text{г}.$$

Проверка. Размерность: Вт·с/(Дж/г) — граммы. Отношение времён $\tau_1/60\,\text{с} = \lambda m/(c(M+m)\cdot 4^\circ) = 2{,}75$ — сходится. Лёд действительно «небольшой»: в шесть с лишним раз меньше воды, а плавился почти три минуты — теплота плавления большая.

Ответ. Льда $m = N\tau_1/\lambda \approx 36$ г, воды $M = \dfrac{N\cdot 60\,\text{с}}{c\,\Delta T_2} - m \approx 232$ г.

Пример 3. [ВсОШ 2009/10, заключительный этап, 9 кл.] В большой плоской льдине, имеющей температуру 0°C, сделали лунку объёма $V_0 = 1000\,\text{см}^3$ и прикрыли её пенопластовой (теплоизолирующей) крышкой с небольшим отверстием. Какую максимальную массу m воды, имеющей температуру 100°C, можно постепенно влить через отверстие в лунку? Удельная теплоёмкость воды $c_0 = 4{,}19$ кДж/(кг · °C), плотность воды $\rho_0 = 1{,}00\cdot 10^3$ кг/м^3, плотность льда $\rho_л = 0{,}90\cdot 10^3$ кг/м^3, удельная теплота плавления льда $\lambda = 334$ кДж/кг.



▲ **Решение. Что происходит.** Кипяток остывает до 0°C и плавит стенки лунки — она растёт. Лёд при 0°C, его не нужно греть. Главная идея: талая вода занимает меньше места, чем лёд, из которого она получилась, поэтому в лунку войдёт больше литра. Нужны два уравнения: тепловой баланс и объёмы (метод 3).

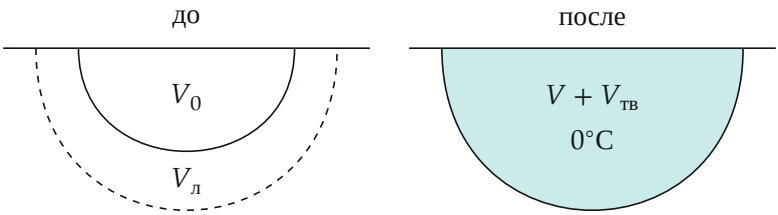
Обозначения. $m_л$ — масса растаявшего льда, $V_л = m_л/\rho_л$ — его объём до плавления, $V_{тв} = m_л/\rho_0$ — объём талой воды, $V = m/\rho_0$ — объём налитой. «Максимальная масса» — в конце жидкость заполняет лунку доверху.

1. Уравнение теплового баланса. Кипяток остывает от 100°C до 0°C, вся его теплота идёт на плавление:

$$c_0 m \cdot 100^\circ = \lambda m_л.$$

2. Одна и та же область. Возьмём область внутри конечной границы льда. До — в ней пустая лунка V_0 и лёд, который растает. После — налитая и талая вода:

$$V_0 + \frac{m_л}{\rho_л} = \frac{m}{\rho_0} + \frac{m_л}{\rho_0}.$$



Пунктир — граница льда в конце. Объём под ним до и после один и тот же.

3. Решаем. Из баланса $m_л = \dfrac{c_0 m \cdot 100^\circ}{\lambda}$; подставим в равенство объёмов:

$$V_0 = \frac{m}{\rho_0} - m_л\Big(\frac{1}{\rho_л} - \frac{1}{\rho_0}\Big) = m\Big[\frac{1}{\rho_0} - \frac{c_0 \cdot 100^\circ}{\lambda}\Big(\frac{1}{\rho_л} - \frac{1}{\rho_0}\Big)\Big],$$

$$m = \frac{\rho_0 V_0}{1 - \dfrac{c_0 \cdot 100^\circ}{\lambda}\Big(\dfrac{\rho_0}{\rho_л} - 1\Big)} = \frac{1\,\text{кг}}{1 - 1{,}254 \cdot 0{,}111} \approx 1{,}16\,\text{кг}.$$

Проверка. Знаменатель безразмерен, ответ в килограммах. Предел $\rho_л \to \rho_0$: объём при плавлении не меняется, и $m = \rho_0 V_0 = 1$ кг, ровно литр. Числа: растаяло $m_л \approx 1{,}46$ кг льда, он занимал 1,62 л, талая вода — 1,46 л; освободилось 0,16 л, как раз под лишние 160 г кипятка.

Ответ. $m \approx 1{,}16$ кг, то есть 1160 г: на 16 % больше, чем вмещает исходная лунка.

Как решать листок

Сложность 1–3 — один переход и одно уравнение баланса, но конечное состояние проверяйте всегда (метод 1). Нагреватель, «через минуту», график — метод 2. Лунки, уровни, поршни — метод 3 вместе с балансом.