Первый закон, работа газа

После пособия вы сможете

- находить работу газа как площадь под графиком $p(V)$ — со знаком;
- считать изменение внутренней энергии $\Delta U = \frac{i}{2}\nu R\Delta T = \frac{i}{2}\Delta(pV)$, не глядя на путь процесса;
- записывать первое начало термодинамики для каждого участка и находить теплоту в изопроцессах;
- отличать адиабату (медленно, $Q = 0$, $pV^\gamma = \text{const}$) от быстрого процесса без теплообмена.

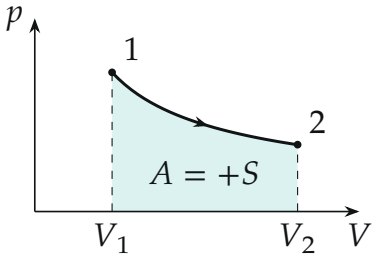
Теория кратко

Определение 1

Работа газа A — работа сил, с которыми газ действует на поршни. Если процесс равновесный (квазистатический: поршни движутся очень медленно, в каждый момент у газа есть p и T), то

$$A = \pm S_{\text{гр}}, \qquad \delta A = p\,dV,$$

где $S_{\text{гр}}$ — площадь под графиком $p(V)$; плюс — при расширении, минус — при сжатии, при $V = \text{const}$ работа равна нулю.



Расширение $1 \to 2$*: работа газа — площадь под графиком. Обратный путь* $2 \to 1$ *дал бы* $A = -S$.

Факт 1

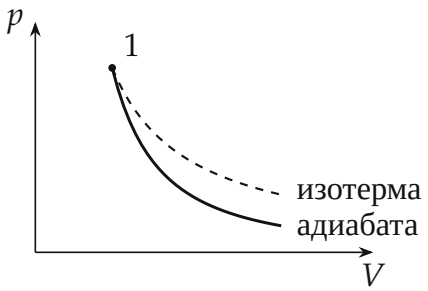
Внутренняя энергия идеального газа и первое начало термодинамики:

$$U = \frac{i}{2}\nu RT = \frac{i}{2}pV, \qquad Q = \Delta U + A.$$

$i = 3$ — одноатомный газ (гелий, аргон), $i = 5$ — двухатомный (N_2, O_2, воздух), $i = 6$ — многоатомный. $\Delta U = U_{\text{кон}} - U_{\text{нач}}$ зависит только от начального и конечного состояний, а Q и A — от пути. Q — *подведённая* теплота со знаком: $Q < 0$ значит, что газ на деле отдал $-Q$. Для малого участка $\delta Q = dU + p\,dV$.

Молярная теплоёмкость $c = \dfrac{\delta Q}{\nu\,dT}$ показывает, что происходит на малом участке: при $c\,dT > 0$ теплота подводится. В изопроцессах (ν = const) всё известно заранее:

- изохора: $A = 0$, $Q = \Delta U$, $c_V = \frac{i}{2}R$;
- изобара: $A = p\Delta V = \nu R\Delta T$, $Q = (\frac{i}{2} + 1)A$, $c_p = c_V + R$; у одноатомного $Q = \frac{5}{2}A$;
- изотерма: $\Delta U = 0$, $Q = A = \nu RT\ln(V_2/V_1)$, $c = \infty$;
- адиабата: $Q = 0$, $A = -\Delta U$, $c = 0$, уравнение $pV^\gamma = \text{const}$, $\gamma = c_p/c_V$ ($\frac{5}{3}$ у одноатомного, $\frac{7}{5}$ у двухатомного).



Адиабата идёт круче изотермы: при адиабатном расширении газ охлаждается, при сжатии — нагревается.

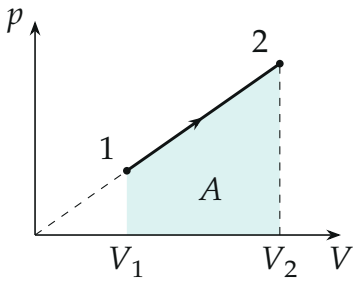
Методы

Метод 1

Работа, энергия, теплота — по участкам. Когда применять: процесс задан графиком или словами «сначала …, затем …», спрашивают теплоту, работу или их отношение.

1. Проверьте, что процесс равновесный («медленно», «квазистатически», дан график). Только тогда работа — площадь.
2. Для каждого состояния запишите уравнение Менделеева — Клапейрона $pV = \nu RT$: найдите недостающие p, V, T.
3. Для каждого участка: работа — площадь под графиком со знаком (прямоугольник, трапеция, треугольник); изменение энергии — $\Delta U = \frac{i}{2}(p_2V_2 - p_1V_1)$, так удобнее, чем через T.
4. Первое начало термодинамики на участке: $Q = \Delta U + A$. Для всего пути теплоты участков складываются со знаками.

Пример. Одноатомный газ расширяется по прямой $p \sim V$ (прямая через начало координат). Работа — площадь трапеции: $A = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(V_2 - V_1)$. Так как $p_1V_2 = p_2V_1$, это $A = \frac{1}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) = \frac{1}{2}\nu R\Delta T$. Значит, $\Delta U = \frac{3}{2}\nu R\Delta T = 3A$ и $Q = 4A$: газ на таком участке получает теплоту, $c = 2R$.



Процесс $p \sim V$: работа — площадь трапеции.

Метод 2

Узнать процесс по теплоте и работе. Когда применять: даны Q и A участков, график $A(Q)$ или $U(Q)$, «газ совершил работу …, получив теплоту …». Для одноатомного газа отношение Q/A называет процесс:

1. $A = 0$ — изохора, $Q = \Delta U$;
2. $Q = A, \Delta U = 0$ — изотерма (или любой участок, вернувший газ к прежней температуре);
3. $Q = \frac{5}{2}A$ — изобара, и $A = \nu R\Delta T = \frac{2}{5}Q$;
4. $Q = 0$ — адиабата, $A = -\Delta U$.

Смотрите на приращения на участке, а не на координаты точек от начала осей.

Метод 3

Без теплообмена: адиабата или быстрый процесс. Когда применять: «теплоизолированный сосуд», «быстро», «резко сняли груз», «пробка вылетает».

1. Первое начало при $Q = 0$ верно всегда: $\Delta U = -A$.
2. Процесс медленный — это адиабата, можно писать $pV^\gamma = \text{const}$ и рисовать график.
3. Процесс быстрый — он неравновесный: давления у газа по ходу нет, графика нет, pV^γ писать нельзя. Работу газа находим через поршень: если в начале и в конце поршень покоится, работа газа равна минус работе всех остальных сил на поршень (тяжести, атмосферы, пружины).

Частые ошибки

Частая ошибка

Путать знаки в первом начале. $Q = \Delta U + A$: Q — подведённая теплота, A — работа *газа*. Школьная запись $\Delta U = Q + A_{\text{над}}$ верна только тогда, когда работа над газом равна минус работе газа, — по сути, в равновесном процессе.

Частая ошибка

Писать $A = p\Delta V$ на любом участке. Давление выносится из суммы только на изобаре; на прямой — площадь трапеции, на изотерме — логарифм.

Частая ошибка

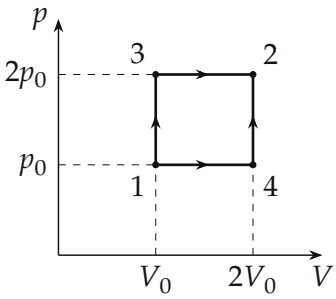
«Сосуд теплоизолирован — значит, $pV^\gamma = \text{const}$». Адиабата — это *квазистатический* процесс с $Q = 0$. Резко сняли гирю — теплообмена нет, но это не адиабата.

Частая ошибка

«Изотерма — значит, теплоты нет». Наоборот: на изотерме $\Delta U = 0$, и вся подведённая теплота уходит в работу, $Q = A$.

Разобранные примеры

Пример 1. [Всесоюзная 1974/75, заключительный этап, 10 кл.] Один киломоль идеального одноатомного газа, находящегося при нормальных условиях, переводят из состояния 1 в состояние 2 двумя способами: $1 \to 3 \to 2$ и $1 \to 4 \to 2$ (см. рисунок). Найти отношение количеств теплоты, которые необходимо сообщить газу в этих двух процессах.



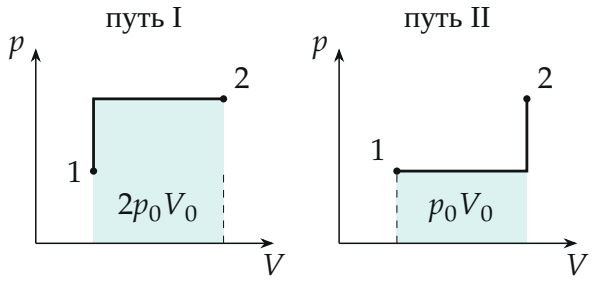
▲ **Решение. Что происходит.** Начало и конец у двух путей общие, поэтому изменение внутренней энергии одно и то же. Теплоты различаются только работой, а работа — это площадь под графиком (метод 1).

Обозначения. p_0, V_0 — давление и объём в состоянии 1; по графику в состоянии 2 давление $2p_0$ и объём $2V_0$. Путь $1 \to 3 \to 2$ назовём I, путь $1 \to 4 \to 2$ — II.

1. Изменение внутренней энергии. Для одноатомного газа $U = \frac{3}{2}pV$:

$$\Delta U = \frac{3}{2}(2p_0 \cdot 2V_0 - p_0V_0) = \frac{9}{2}p_0V_0.$$

2. Работа на каждом пути. На изохорах $1 \to 3$ и $4 \to 2$ работы нет. Остаются изобары: $A_{\text{I}} = 2p_0(2V_0 - V_0) = 2p_0V_0$, $A_{\text{II}} = p_0V_0$.



Работа газа на путях I и II — закрашенные площади.

3. Первое начало термодинамики для каждого пути:

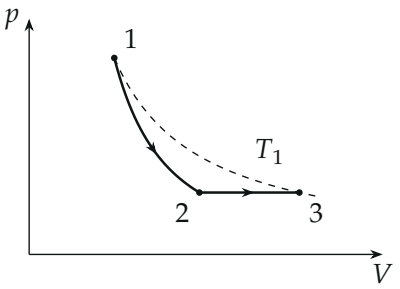
$$Q_{\text{I}} = \Delta U + A_{\text{I}} = \frac{13}{2}p_0V_0, \qquad Q_{\text{II}} = \Delta U + A_{\text{II}} = \frac{11}{2}p_0V_0,$$

откуда $Q_{\text{I}}/Q_{\text{II}} = 13/11 \approx 1{,}18$. При нормальных условиях $p_0V_0 = \nu RT_0 \approx 2{,}27 \cdot 10^6$ Дж, так что $Q_{\text{I}} \approx 1{,}5 \cdot 10^7$ Дж, $Q_{\text{II}} \approx 1{,}2 \cdot 10^7$ Дж.

Проверка. Отношение безразмерно. По пути I газ расширяется при большем давлении и совершает больше работы, поэтому ему нужно больше теплоты: $13/11 > 1$. Внутренняя энергия — функция состояния, теплота — нет.

Ответ. $\dfrac{Q_{1\to3\to2}}{Q_{1\to4\to2}} = \dfrac{13}{11} \approx 1{,}18.$

Пример 2. [«Покори Воробьёвы горы!» 2018/19, отборочный этап, 10–11 кл.] Постоянное количество гелия участвует в процессе, в котором гелий сначала расширяется адиабатически, а затем в изобарном процессе возвращается к исходной температуре. Во всём процессе гелий совершил работу 735 Дж. Найдите работу, совершённую гелием в адиабатическом процессе.



1 → 2 — *адиабата*, 2 → 3 — *изобара; пунктир — изотерма* T_1.

▲ **Решение. Что происходит.** Газ вернулся к исходной температуре — значит, его внутренняя энергия в начале и в конце одна и та же. На адиабате теплоты нет, вся теплота подведена на изобаре, а там отношение работы и теплоты известно (метод 2).

Обозначения. $A = 735$ Дж — работа за весь процесс, A_{12} и A_{23} — работы на адиабате и на изобаре.

1. Первое начало термодинамики для всего процесса $1 \to 3$. $T_3 = T_1$, поэтому $\Delta U_{13} = 0$ и $Q_{13} = A = 735$ Дж.

2. Где подведена теплота. На адиабате $Q_{12} = 0$, значит, $Q_{23} = Q_{13} = 735$ Дж.

3. Изобара. Для одноатомного газа $Q_{23} = \frac{5}{2}A_{23}$, откуда $A_{23} = \frac{2}{5} \cdot 735 = 294$ Дж. Неизвестным осталась только работа на адиабате:

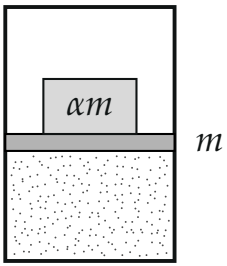
$$A_{12} = A - A_{23} = \frac{3}{5}A = 441\,\text{Дж}.$$

Проверка. Второй способ: на адиабате $A_{12} = -\Delta U_{12} = \frac{3}{2}\nu R(T_1 - T_2)$, на изобаре $A_{23} = \nu R(T_3 - T_2) = \nu R(T_1 - T_2)$. Отношение $A_{12}/A_{23} = 3/2$, и $441/294 = 1{,}5$ — сходится. Газ охладился на адиабате, совершая работу, а изобара вернула ему ровно эту энергию.

Ответ. $A_{12} = \frac{3}{5} \cdot 735\,\text{Дж} = 441$ Дж.

Пример 3. [ВсОШ 2006/07, окружной этап, 10 кл.] Гелий в количестве ν молей находится в теплоизолированном вертикальном сосуде под поршнем, на котором стоит гиря, масса которой в α раз больше массы поршня (рис.).

Над поршнем вакуум. Если к гелию медленно подвести теплоту Q, объём гелия увеличится на такую же величину, как если бы вместо подведения тепла гирю быстро сняли. Найдите изменение ΔT_2 температуры гелия во втором процессе. Гелий можно считать идеальным газом.



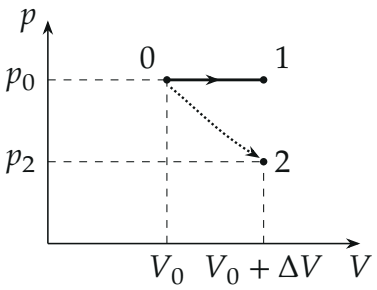
▲ **Решение. Что происходит.** Два разных процесса. Медленный нагрев с гирей — равновесный, давление не меняется: это изобара. Гирю сняли быстро — поршень подскочит, покачается и остановится; процесс неравновесный, теплообмена нет, но это *не* адиабата, pV^γ писать нельзя (метод 3). Связывает процессы одинаковое ΔV.

Обозначения. m — масса поршня, S — его площадь, p_0 — начальное давление, ΔV — приращение объёма, p_2 — давление после снятия гири.

1. Давления из равновесия поршня. Второй закон Ньютона для покоящегося поршня с гирей: $p_0 S = (\alpha+1)mg$. Без гири в конце: $p_2 S = mg$. Отсюда $p_2 = \dfrac{p_0}{\alpha+1}$.

2. Первый процесс — изобара. Первое начало термодинамики: $Q = \frac{3}{2}\nu R\Delta T_1 + p_0\Delta V$, а на изобаре $\nu R\Delta T_1 = p_0\Delta V$. Значит, $Q = \frac{5}{2}p_0\Delta V$ и $\Delta V = \dfrac{2Q}{5p_0}$.

3. Работа газа во втором процессе. Давления по ходу у газа нет, площадь не взять. Смотрим на поршень: в начале и в конце он покоится, сверху вакуум. Теорема о кинетической энергии для поршня: $0 = A_2 - mg\dfrac{\Delta V}{S}$, то есть $A_2 = p_2\Delta V$.



$0 \to 1$ — *медленный нагрев (изобара),* $0 \to 2$ — *гирю сняли: графика у процесса нет, точки — условная линия.*

4. Первое начало термодинамики для второго процесса. $Q = 0$: $\frac{3}{2}\nu R\Delta T_2 + p_2\Delta V = 0$. Подставляем p_2 и ΔV:

$$\Delta T_2 = -\frac{2p_2\Delta V}{3\nu R} = -\frac{2}{3\nu R}\cdot\frac{p_0}{\alpha+1}\cdot\frac{2Q}{5p_0} = -\frac{4Q}{15(\alpha+1)\nu R}.$$

Обратите внимание: работу считали не через $p\,dV$, а через силы на поршень — это единственный честный путь в неравновесном процессе.

Проверка. $Q/(\nu R)$ — в кельвинах. Знак минус: газ поднял поршень за счёт своей энергии и остыл. Предельные случаи: при $\alpha \to \infty$ поршень без гири почти невесом, $p_2 \to 0$, газу не на что тратить работу — $\Delta T_2 \to 0$; при $\alpha = 0$ (гири нет) $|\Delta U_2| = p_0\Delta V = \frac{2}{5}Q$, как и должно быть: это вся работа изобары при том же ΔV. Сравните с медленным процессом: там газ получил Q и нагрелся, здесь тепла нет и он только отдаёт энергию на подъём поршня.

Ответ. $\Delta T_2 = -\dfrac{4Q}{15(\alpha+1)\nu R}$ — гелий охладится.

Как решать листок

Сложность 1–3 (работа по графику, теплота в изопроцессе) — метод 1 и готовые формулы изопроцессов. Даны Q и A или график $A(Q)$ — метод 2. «Теплоизолированный», «быстро», «пробка вылетает», поршни с грузами (сложность 5–7) — метод 3: сначала решите, равновесный ли процесс, и только потом пишите уравнение адиабаты.