BOTAY

ОЛИМПИАДНАЯ ФИЗИКА

Глеб Орёл
Конспект

Занятие 3. Интеграл, первообразная

Теория, методы и разобранные задачи

BOTAY × Глеб Орёл

botay.pro • 2026

Занятие 3. Интеграл, первообразная

На этом занятии

Познакомиться с интегралом в порядке Глеба: сумма малых вкладов, площадь под графиком, первообразная и формула Ньютона — Лейбница. Затем различить определённый и неопределённый интегралы, восстановить таблицу и научиться замене переменной на примерах записи.

1. Три взгляда на интеграл

Глеб начинает с трёх связанных идей. Интеграл можно воспринимать как действие, обратное дифференцированию; как суммирование малых вкладов; как площадь под графиком. Это вводная интуиция, которую дальше связывает вывод.

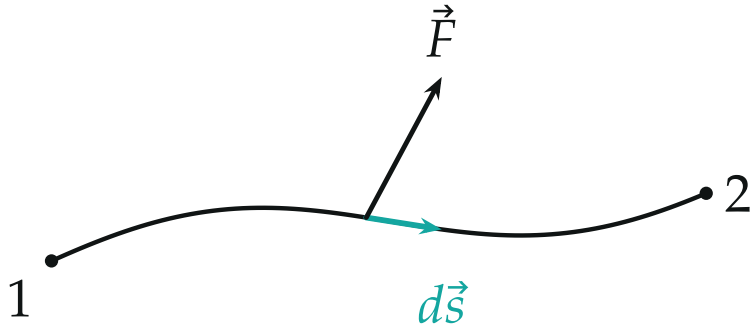
Например, работу переменной силы нельзя всегда считать как одно произведение силы на всё перемещение. Разобьём траекторию на малые участки. Для малого перемещения $\Delta\vec{s}_i$ вклад приблизительно равен

$$\Delta A_i \approx (\vec{F}_i, \Delta\vec{s}_i).$$

Суммарная работа получается сложением вкладов. При переходе к пределу эта запись становится

$$A_{12} = \int_1^2 (\vec{F}, d\vec{s}).$$

Скалярное произведение учитывает направление силы относительно движения. Интеграл сохраняет ту же идею «посчитать маленькие вклады и сложить».



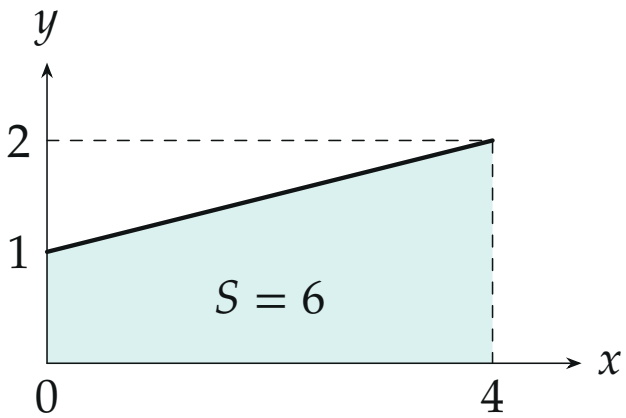
Суммирование работы по малым перемещениям вдоль траектории, как во вводном примере Глеба.

2. От знакомой трапеции к кривой

В первом геометрическом примере функция линейно растёт от 1 до 2, а ширина участка равна 4. Поэтому площадь под графиком — площадь трапеции:

$$S = \frac{1+2}{2} \cdot 4 = 6.$$

Если вместо отрезка дана кривая, готовой формулы для всей фигуры может не быть. Приём Глеба — разбить её на много тонких полосок, каждую приблизить простой фигурой и сложить площади.



Первый пример: основания трапеции равны 1 *и* 2*, расстояние между ними* 4*.*

Пока считаем $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a, b]$. Введём точки разбиения

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b.$$

Для i-й полоски, как на доске,

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \qquad y_i = f(x_i), \quad y_{i-1} = f(x_{i-1}).$$

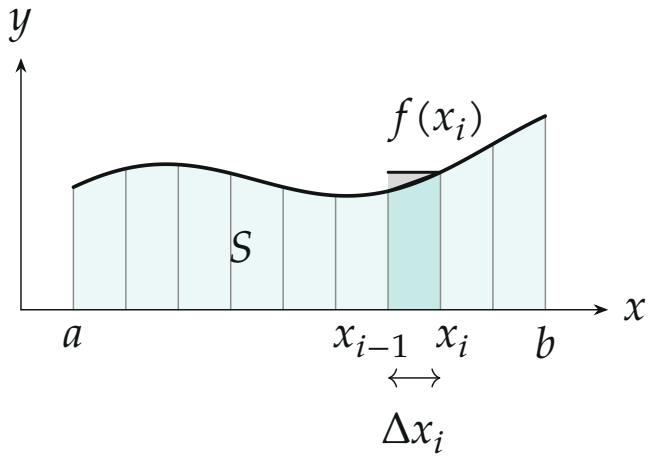
Заменим малый участок кривой отрезком. Площадь **заменяющей трапеции** равна

$$\Delta S_i^{\text{тр}} = \frac{y_i + y_{i-1}}{2} \Delta x_i.$$

Поскольку $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, можно переписать

$$\Delta S_i^{\text{тр}} = y_i \Delta x_i - \frac{1}{2} \Delta y_i \Delta x_i.$$

Это прямоугольник высоты y_i минус малый треугольный «довесок» для растущего участка. Если функция убывает, $\Delta y_i < 0$, и та же алгебраическая формула сама учитывает знак поправки.



Разбиение и правая прямоугольная сумма; кривая иллюстративна.

У тонких полосок суммарная ошибка приближения исчезает. Вместо суммы площадей трапеций можно брать сумму прямоугольников

$f(x_i)\Delta x_i$. В пределе получаем определённый интеграл:

$$S = \lim_{h\to 0} \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx,$$

где $h = \max_i \Delta x_i$ — мелкость разбиения.

Оговорка к словам «N бесконечно». Одного увеличения числа полосок недостаточно, если какая-то широкая полоса остаётся неразбитой. Нужно, чтобы **максимальная ширина стремилась к нулю**. При равномерном разбиении это автоматически следует из $N \to \infty$. Глеб обсуждает уточнение в ответе чату в конце записи; здесь оно включено сразу.

Запись $dS = f(x)dx$ передаёт идею элементарного вклада. Она не означает, что мы подставляем число $dx = 0$ и складываем обычные нули. Интеграл — предел конечных сумм.

Знак площади. Равенство с геометрической площадью выше использует $f \geq 0$. В общем случае определённый интеграл складывает вклады со знаком. Полная геометрическая площадь между графиком и осью равна $\int_a^b |f(x)|dx$ при $a < b$.

3. Первообразная и Ньютон — Лейбниц

Функция F называется первообразной для f на промежутке, если в каждой его точке

$$F'(x) = f(x).$$

Проверяем простые примеры обратным дифференцированием:

$$(x^2)' = 2x, \qquad (\sin x)' = \cos x, \qquad (-\cos x)' = \sin x.$$

К любой первообразной можно прибавить постоянную C: её производная равна нулю. На одном промежутке все первообразные одной функции отличаются константой.

Следующий шаг Глеба — переписать производную через дифференциал:

$$dF = f(x)\,dx.$$

Тогда интегрирование «складывает изменения F». Для конечного разбиения соседние разности сокращаются:

$$\sum_{i=1}^{N} (F(x_i) - F(x_{i-1})) = F(b) - F(a).$$

Эта идея приводит к формуле Ньютона — Лейбница. Для непрерывной f и её первообразной F

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Смысл площади или суммы вкладов сохраняется; разность первообразных — удобный способ вычислить результат. Добавленная к F константа сокращается: $(F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$.

4. Определённый и неопределённый интегралы

Определённый интеграл имеет пределы a, b и при фиксированных пределах даёт число. **Неопределённый** интеграл обозначает семейство первообразных:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

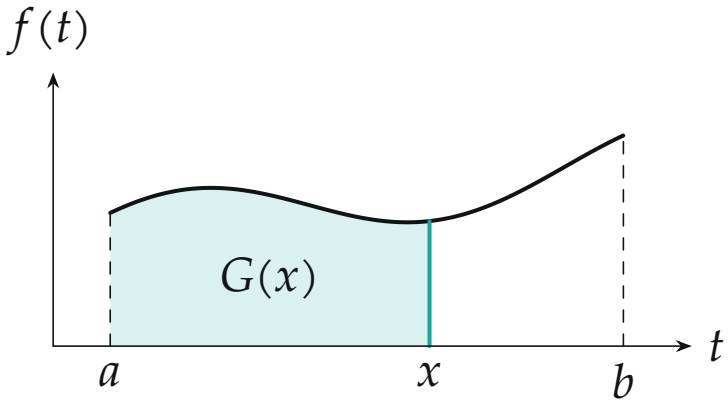
Чтобы не путаться в константах, дальше используем одну эту договорённость и пишем $+C$ в окончательном ответе.

Глеб связывает две записи через площадь с переменной верхней границей. При фиксированной начальной точке a положим

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Здесь t — переменная интегрирования, x — верхний предел. Для непрерывной f функция G сама является первообразной, $G'(x) = f(x)$, а

$$F(x) = G(x) + F(a).$$



Меняя верхнюю границу x, получаем функцию накопленной площади $G(x)$.

В речи встречается запись с одной буквой x и в пределе, и под интегралом; сам автор предлагает заменить внутреннюю букву на t. Здесь сразу использована эта ясная запись. Неопределённый интеграл не означает «неизвестное число площади»: это другой объект — семейство функций.

5. Таблица через таблицу производных

Как предлагает Глеб, каждую строку восстанавливаем проверкой производной. Везде подразумевается $+C$; формулы действуют на промежутках, где выражения определены.

$$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad \alpha \neq -1,$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x|, \quad x \neq 0,$$

$$\int e^{x}dx = e^{x},$$

$$\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a}, \quad a > 0,\ a \neq 1.$$

Для произвольной действительной степени удобно сначала рассматри-

вать $x > 0$; другие допустимые промежутки зависят от степени.

$$\int \sin x\,dx = -\cos x,$$
$$\int \cos x\,dx = \sin x,$$
$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x,$$
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x,$$
$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x,$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x, \qquad |x| < 1.$$

Две последние строки таблицы относятся к гиперболическим функциям:

$$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x, \qquad \int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x.$$

Здесь $\operatorname{sh} x = (e^x - e^{-x})/2$, $\operatorname{ch} x = (e^x + e^{-x})/2$.

6. Линейность и первый расчёт

Если α, β — постоянные, то первообразную суммы ищем по слагаемым:

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx.$$

В конце несколько постоянных объединяем в одну. Пример с доски:

$$\int \left(x^3 + 3\sin x - \frac{2}{1+x^2}\right) dx$$
$$= \int x^3 dx + 3\int \sin x\,dx - 2\int \frac{dx}{1+x^2}$$
$$= \frac{x^4}{4} - 3\cos x - 2\arctan x + C.$$

Проверка: производная результата возвращает подынтегральную функцию. Вспомогательные константы C_1, C_2, C_3 после учёта коэффициен-

тов всё равно дают одну произвольную константу.

7. Дифференциал и первые замены

Глеб сначала объясняет замену через привычное «изменение». Важно различать два объекта:

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x), \qquad df = f'(x)dx.$$

Дифференциал — линейная часть малого приращения. Для нелинейной функции конечная разность не равна ему точно. Например,

$$\Delta(3x^2) = 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2, \qquad d(3x^2) = 6x\,dx.$$

Так уточняем неформальную запись доски; в дальнейших преобразованиях используем именно дифференциал. Для линейной функции правила совпадают без дополнительного остатка:

$$d(x+5) = dx, \qquad d(3x) = 3dx,$$

$$d(\alpha f(x) + C) = \alpha\, df.$$

Равенство дифференциалов $d(x+5) = dx$ **не означает** $x+5 = x$. Это прямо обсуждается в записи.

Сдвиг аргумента.

$$\begin{aligned}\int \cos(x+5)dx &= \int \cos(x+5)d(x+5)\\ &= \int \cos\varphi\, d\varphi = \sin(x+5) + C.\end{aligned}$$

Здесь $\varphi = x+5$. Меняем и аргумент функции, и дифференциал на одну букву.

Множитель в аргументе. Домножаем и делим на 3:

$$\begin{aligned}\int \sin 3x\, dx &= \frac{1}{3}\int \sin 3x\, d(3x)\\ &= -\frac{1}{3}\cos 3x + C.\end{aligned}$$

Логарифмический пример.

$$\int \frac{dx}{1+5x} = \frac{1}{5}\int \frac{d(x+1/5)}{x+1/5} = \frac{1}{5}\ln|x+1/5| + C.$$

Можно записать $\frac{1}{5}\ln|1+5x|+C$: два вида отличаются лишь постоянной. Модуль нужен, чтобы охватить оба промежутка $x < -1/5$ и $x > -1/5$.

Степень линейного выражения. Автор меняет исходную третью степень на пятую; решаем окончательный пример:

$$\int (3x+1)^5 dx = \frac{1}{3}\int (3x+1)^5 d(3x+1) = \frac{(3x+1)^6}{18} + C.$$

Раскрывать пятую степень не требуется.

8. Общая формула замены переменной

По правилу дифференцирования сложной функции при $\varphi = \varphi(x)$

$$d\varphi = \varphi'(x)dx.$$

Поэтому согласованная замена записывается как

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi)d\varphi.$$

После табличного интегрирования возвращаемся к исходному x. Нельзя менять только аргумент, забывая множитель производной.

Нелинейная замена: $\varphi = \sin x$, $d\varphi = \cos x\, dx$. Тогда

$$\int \sin^2 x \cos x\, dx = \int \varphi^2 d\varphi = \frac{\varphi^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C,$$

где $\varphi = \sin x$.

Ещё один пример записи. Для $\int (3x-5)^{10}dx$ выбираем $\varphi = 3x-5$, $d\varphi = 3dx$, то есть $dx = d\varphi/3$:

$$\int (3x-5)^{10}dx = \frac{1}{3}\int \varphi^{10}d\varphi = \frac{(3x-5)^{11}}{33} + C.$$

Последний пример только начат. В конце данного ролика появляется

$$\int x^2\sqrt[5]{5x^3+1}\,dx.$$

Глеб предлагает $\varphi(x) = 5x^3+1$ и задаёт вопрос о $\varphi'(x)$. На этом запись обрывается. Полного решения этого примера в данном видео нет; здесь не приписываем ему продолжение из общего курсного PDF.

Главное

Интеграл суммирует малые вклады; первообразная позволяет их вычислять:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \qquad F' = f.$$

Неопределённый интеграл — семейство $F + C$. В замене переменной преобразуем одновременно функцию и дифференциал; результат удобно проверять обратным дифференцированием.