BOTAY

ОЛИМПИАДНАЯ ФИЗИКА

Глеб Орёл

Конспект

Занятие 4. Функции многих переменных, частные производные, градиент, набла

Теория, методы и разобранные задачи

BOTAY × Глеб Орёл

botay.pro • 2026

Занятие 4. Функции многих переменных, частные производные, градиент, набла

На этом занятии

Перейти от одной переменной к нескольким: частные производные, полный дифференциал, градиент и производная по направлению. В порядке Глеба разобрать все примеры, понять линии уровня и получить кулоновское поле из радиального потенциала.

1. Зачем физику несколько переменных

В каждой точке комнаты своя температура: $T = T(x, y, z)$. Потенциал также является скалярной функцией пространства, $\varphi = \varphi(x, y, z)$. Для фиксированного количества идеального газа

$$p(V, T) = \frac{\nu R T}{V}.$$

Здесь два независимых аргумента: объём и температура. Наконец,

$$\vec{E}(x, y, z) = (E_x(x, y, z), E_y(x, y, z), E_z(x, y, z))$$

сопоставляет точке вектор. В декартовых координатах это три скалярные функции.

Автор сразу ограничивает формализм: рассматриваем достаточно гладкие функции. Существования отдельных частных производных вообще недостаточно для дифференцируемости. В наших примерах гладкость проверяют на области, где формулы определены; делить на ноль и брать логарифм неположительного аргумента нельзя.

График $z = f(x, y)$ — поверхность в трёхмерном пространстве. Глеб сравнивает её с поднятым за края одеялом. Точке (x, y) сопоставляется высота z. Для графика скалярной функции трёх переменных понадобилась бы уже четвёртая координата; поэтому основное объяснение ведётся для двух.

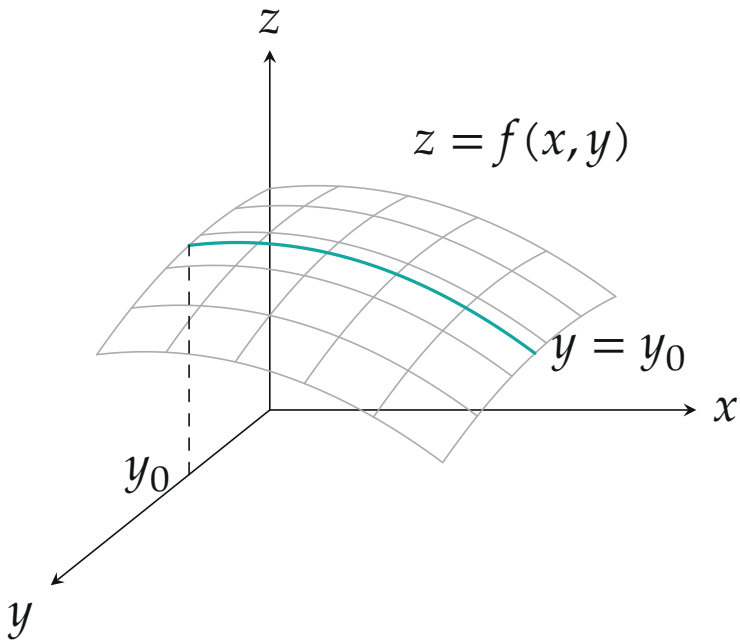


График как гладкое «одеяло». Выделено сечение при $y = y_0$: вдоль него меняется только x. Поверхность редакционная, иллюстрирует построение с доски.

2. Частная производная: другой аргумент фиксируем

Чтобы найти скорость изменения по x, фиксируем y и рассматриваем обычную функцию одного аргумента:

$$f'_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}.$$

Знак ∂ подчёркивает, что производная частная. Аналогично

$$f'_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}.$$

В первом случае y при вычислении ведёт себя как постоянная, во втором — x. Геометрически получаем наклон касательной к соответствующему сечению графика.

Пример 1. Полином.

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

При дифференцировании по x:

$$f'_x = 3x^2 + 0 - 3y.$$

При дифференцировании по y:

$$f'_y = 0 + 3y^2 - 3x.$$

Производная константы равна нулю, даже если эта константа записана буквой другого аргумента.

Пример 2. Корень в знаменателе.

$$f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad (x,y) \neq (0,0).$$

Сначала по y: вынесем постоянное x и раскроем сложную функцию:

$$\begin{aligned} f'_y &= x\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+y^2)^{-3/2} \cdot 2y \\ &= -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Теперь по x: здесь уже произведение двух переменных функций:

$$\begin{aligned} f'_x &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ &= \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Внешняя степень в исходной функции $-1/2$, после дифференцирования — $-3/2$. Оговорки при её записи автор исправляет.

Пример 3. Сложный аргумент синуса.

$$f(x,y) = \sin(x^2y^3).$$

Внутри синуса именно произведение x^2y^3:

$$f'_x = 2xy^3\cos(x^2y^3),$$

$$f'_y = 3x^2y^2\cos(x^2y^3).$$

Степень y во втором ответе равна 2; замечание из чата автор подтверждает.

Пример 4. Три аргумента и вторые производные.

$$f(x,y,z) = xy + yz + zx.$$

$$f'_x = y + z, \qquad f'_y = x + z, \qquad f'_z = y + x.$$

Частные производные сами являются функциями, их можно дифференцировать снова. В этом примере

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

Это свойство данного полинома, а не общее равенство всех вторых производных.

Глеб затем уточняет, что хотел обратить внимание на смешанные производные. Запишем порядок операций явно:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 1, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 1.$$

Для достаточно гладкой функции, например с непрерывными частными производными второго порядка в окрестности, эти два порядка совпадают. Без условий гладкости такое равенство автоматически не утверждается. Одного существования обеих смешанных производных в отдельной точке недостаточно, чтобы менять порядок операций.

3. Полный дифференциал: учесть оба изменения

Теперь сдвигаем сразу оба аргумента:

$$\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Это конечное приращение. Для дифференцируемой функции его линейная часть:

$$df = f'_x\, dx + f'_y\, dy.$$

В трёхмерном случае добавляется $f'_z\, dz$. Производные вычисляются в начальной точке.

В записи df неформально называется бесконечно малым приращением. Чтобы не смешивать его с точной конечной разностью, при $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ имеем

$$\Delta f = df + \text{остаток},$$

причём отношение остатка к длине $(\Delta x, \Delta y)$ стремится к нулю при уменьшении шага. Так уточняется смысл авторской «физической точности».

Вывод через «умный ноль». Прибавляем и вычитаем $f(x + \Delta x, y)$:

$$\Delta f = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)] + [f(x + \Delta x, y) - f(x, y)].$$

В первых скобках меняется только y, во вторых — только x. В первом порядке

$$\Delta f \approx f'_y(x + \Delta x, y)\Delta y + f'_x(x, y)\Delta x.$$

Непрерывность частных производных позволяет заменить смещённый аргумент на начальный в главной линейной части. Получаем $df = f'_x dx + f'_y dy$. Равенство конечных разностей производным без остатка здесь не требуется.

Пример 1. Дифференциал в точке.

$$f(x, y) = x + y^2 + \ln(x + y^2), \qquad x + y^2 > 0.$$

По правилу сложной функции

$$f'_x = 1 + \frac{1}{x + y^2}, \qquad f'_y = 2y + \frac{2y}{x + y^2}.$$

Поэтому

$$df = \left(1 + \frac{1}{x + y^2}\right) dx + \left(2y + \frac{2y}{x + y^2}\right) dy.$$

В точке $(0, 1)$:

$$f'_x(0,1) = 2, \qquad f'_y(0,1) = 2 + \frac{2}{0 + 1} = 4,$$

$$df\,(0,1) = 2\,dx + 4\,dy.$$

На доске сначала получается 3 вместо 4 во втором коэффициенте. После замечания зрителя автор исправляет подстановку: в знаменателе $0 + 1$, а не $1 + 1$.

Пример 2. Изменение объёма цилиндра.

$$V(r, h) = \pi r^2 h, \qquad r = h = 1\ \text{м}.$$

Пусть радиус и высота увеличились на 1 мм:

$$dr = dh = 10^{-3}\ \text{м}.$$

Это малые конечные изменения; используем линейное приближение:

$$V'_r = 2\pi r h, \qquad V'_h = \pi r^2,$$

$$dV = 2\pi r h\,dr + \pi r^2\,dh = 3\pi \cdot 10^{-3}\ \text{м}^3.$$

То есть $\Delta V \approx dV \approx 9{,}42$ л. Глеб округляет результат до 10 л и сравнивает с исходными $\pi\ \text{м}^3 \approx 3140$ л.

Для проверки точности здесь можно сохранить конечные изменения:

$$\Delta V = \pi[(1{,}001)^3 - 1]\,\text{м}^3 \approx 9{,}4342\,\text{л}.$$

Отличие линейного результата примерно 0,00943 л: отброшены произведения малых изменений. Последняя проверка уточняет приближение, а не заменяет авторский способ прямым перемножением.

4. Градиент и оператор

В декартовом ортонормированном базисе вводим

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

Для $f(x, y)$ оставляем две компоненты. Оператор grad принимает скалярную функцию и выдаёт векторное поле. Та же запись через набла:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right), \qquad \operatorname{grad} f = \nabla f.$$

В этой лекции оператор вводится лишь в связи с градиентом; дивергенция и ротор перенесены на продолжение.

Полный дифференциал удобно записывается скалярным произведением:

$$d\vec{r} = (dx, dy, dz), \qquad df = \operatorname{grad} f \cdot d\vec{r}.$$

Если векторы представлены столбцами, это $(\operatorname{grad} f)^{\mathrm{T}} d\vec{r}$. Попарное умножение компонент и сложение дают прежнюю формулу.

В речи упомянуты ковекторы. Точное различие: df — линейная форма на перемещениях, а градиент — соответствующий ей вектор после выбора евклидова скалярного произведения. В используемых ортонормированных координатах их компоненты численно совпадают; называть сам градиент ковектором без этого уточнения не следует.

5. Производная по направлению

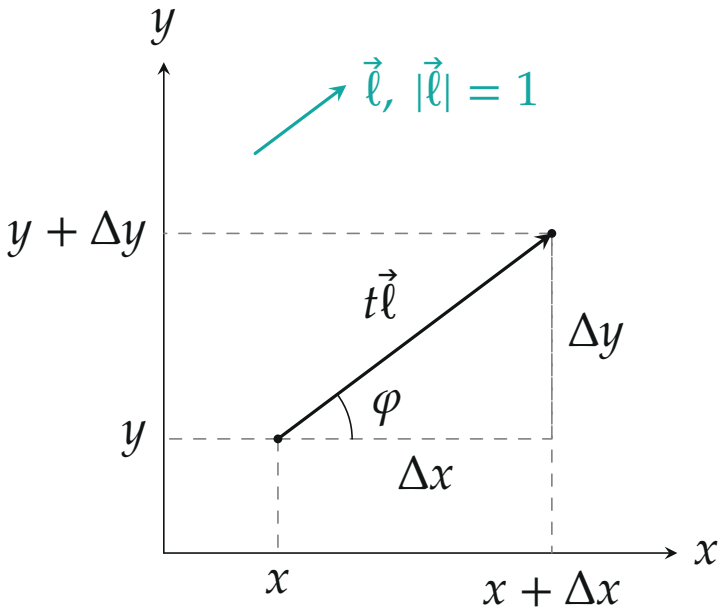
Фиксируем единичный вектор направления $\vec{\ell}$, $|\vec{\ell}| = 1$. В плоскости

$$\vec{\ell} = (\cos\varphi, \sin\varphi).$$

Он показывает, куда двигаться. Величину смещения задаёт отдельное число t:

$$\Delta\vec{r} = t\vec{\ell}, \qquad \Delta x = t\cos\varphi, \quad \Delta y = t\sin\varphi.$$

Для $t > 0$ длина смещения равна t. Здесь t — параметр расстояния вдоль направления, не обязательно физическое время.



Вектор $\vec{\ell}$ задаёт направление, а t — длину перемещения. Проекции перемещения: $\Delta x = t\cos\varphi$, $\Delta y = t\sin\varphi$. Отдельная стрелка единичного направления параллельна перемещению.

При уменьшении шага, как у автора $t \to +0$, получаем скорость изменения значения функции на единицу пути:

$$D_{\vec{\ell}} f(\vec{r}) = \lim_{t \to +0} \frac{f(\vec{r} + t\vec{\ell}) - f(\vec{r})}{t}.$$

Для наших гладких функций двусторонний предел даёт тот же результат. В записи Глеба эта величина обозначается также $\partial f / \partial \vec{\ell}$. Это название направленной производной, а не буквальное деление скаляра на вектор.

Подставляя $d\vec{r} = \vec{\ell}\,dt$ в линейную часть, получаем

$$D_{\vec{\ell}} f = \operatorname{grad} f \cdot \vec{\ell}.$$

Частные производные — случаи направлений $(1,0)$ и $(0,1)$.

6. Первое свойство: наискорейший рост

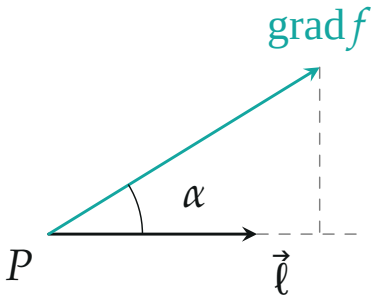
В данной точке градиент фиксирован, а направление $\vec{\ell}$ можно менять. Если α — угол между ними, то

$$D_{\vec{\ell}} f = |\operatorname{grad} f| \cos\alpha.$$

При ненулевом градиенте максимум достигается при $\alpha = 0$:

$$\vec{\ell}_{\max} = \frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|}, \qquad \max D_{\vec{\ell}} f = |\operatorname{grad} f|.$$

Противоположное направление даёт наискорейшее убывание и производную $-|\operatorname{grad} f|$.



$$D_{\vec{\ell}} f = |\operatorname{grad} f| \cos\alpha$$

Сравниваем направления в одной фиксированной точке. Проекция градиента на единичное направление определяет направленную производную; при нулевом угле она наибольшая.

Если градиент равен нулю, все направленные производные первого

порядка равны нулю; выделенного направления роста эта формула не даёт.

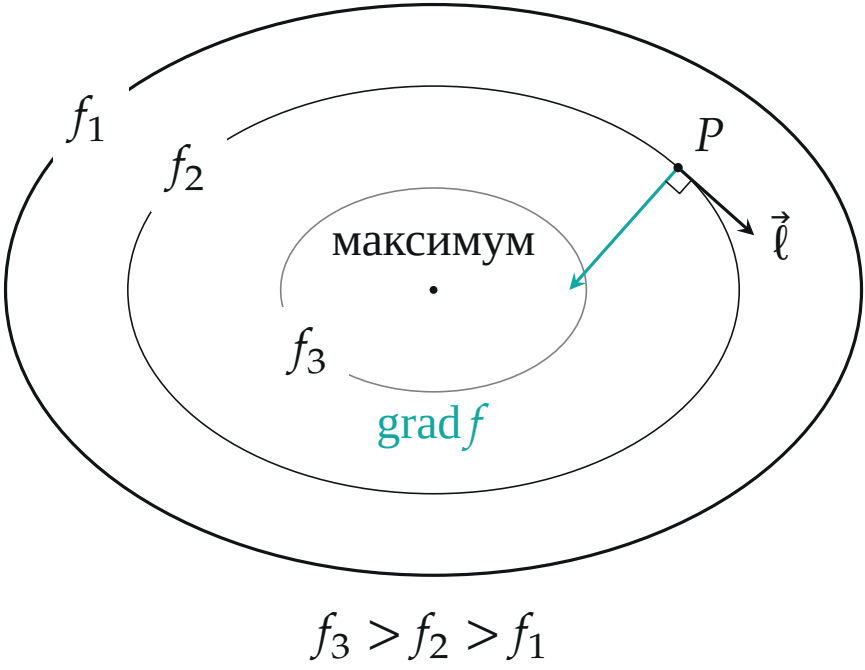
Смысл свойства локальный: речь о малом шаге из данной точки. Фраза о «наискорейшем приходе в максимум» служит интуицией, но сама по себе не гарантирует ни кратчайшего пути, ни нахождения глобального максимума.

7. Второе свойство: линии и поверхности уровня

Линия уровня функции $f(x,y)$ задаётся равенством

$$f(x,y) = C.$$

Вдоль линии значение постоянно, как высота вдоль горизонтали на карте. Для функции трёх переменных аналогично говорят о поверхности уровня.



Линии уровня «горки», вид сверху. Градиент направлен к большим значениям и перпендикулярен касательному направлению $\vec{\ell}$ в выбранной точке. Увеличение функции показано внутрь, как у автора.

Пусть $\vec{r}(s)$ движется по гладкой линии уровня. Тогда $f(\vec{r}(s)) = C$ и по правилу цепочки

$$\operatorname{grad} f \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} = 0.$$

При ненулевом градиенте он перпендикулярен касательной; в пространстве — касательной плоскости регулярной поверхности уровня.

Это точный смысл авторского рассуждения через нулевую производную. Конечный прямой шаг по касательной обычно уводит с кривой уровня; неизменность функции требуется вдоль самой кривой, а линейное изменение по её касательной равно нулю.

Электростатический пример:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi.$$

Поле направлено к наискорейшему убыванию потенциала и перпендикулярно эквипотенциальным поверхностям там, где поле ненулевое.

8. Пример: градиент расстояния

На плоскости

$$f(x, y) = r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

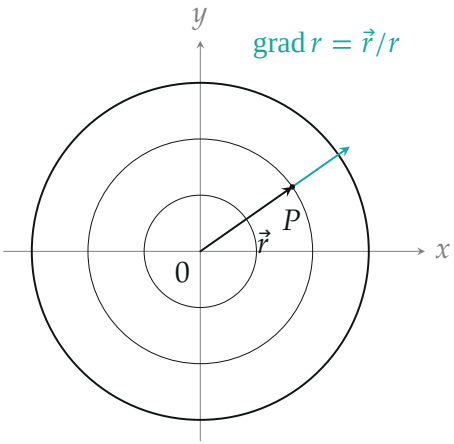
При $r > 0$ по правилу сложной функции

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r}, \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}.$$

Объединяем:

$$\operatorname{grad} r = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right) = \frac{\vec{r}}{r}.$$

Это единичный радиальный вектор. Линии уровня — окружности, поэтому градиент направлен наружу перпендикулярно им. Максимальная скорость роста расстояния равна 1.



Для $f = r$ значения увеличиваются наружу. Радиус-вектор идёт из начала в точку, а градиент в этой точке — единичная стрелка наружу.

В начале координат r имеет минимум, но не дифференцируется; формулу $\vec{r}/r$ там применять нельзя. «Максимума на бесконечности» как достигнутого значения нет: функция r просто не ограничена сверху.

9. Радиальная функция и кулоновский потенциал

Теперь $f = f(r)$ зависит только от расстояния. Снова раскрываем «матрёшку»:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} = f'(r)\frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f'(r)\frac{y}{r}.$$

Производная df/dr обычная, потому что внешняя f имеет один аргумент; производные самого $r(x,y)$ частные. Поэтому

$$\operatorname{grad} f(r) = f'(r)\frac{\vec{r}}{r}, \qquad r > 0.$$

Тот же вывод в трёхмерном пространстве добавляет компоненту z/r.

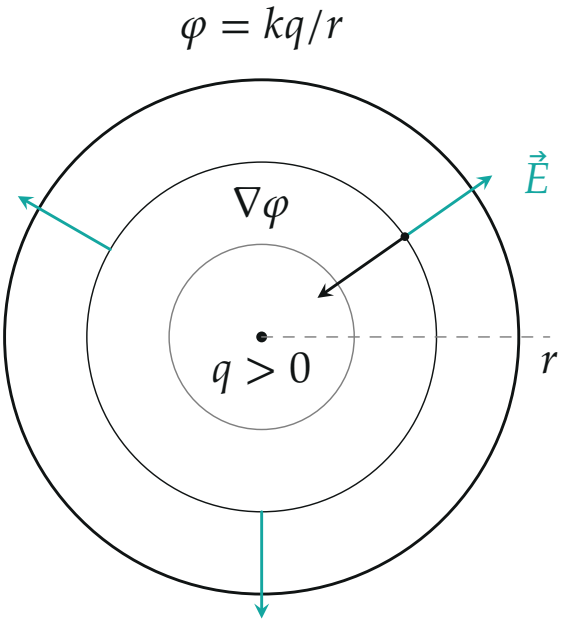
Подставляем потенциал точечного заряда:

$$\varphi(r) = \frac{kq}{r}, \qquad \varphi'(r) = -\frac{kq}{r^2}.$$

Получаем

$$\operatorname{grad}\varphi = -\frac{kq}{r^3}\vec{r}, \qquad \vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi = \frac{kq}{r^3}\vec{r}.$$

Так из потенциала восстанавливается знакомое кулоновское поле.



Положительный точечный заряд: потенциал растёт к центру. Градиент потенциала направлен внутрь, поле — наружу, перпендикулярно окружностям сечения эквипотенциальных сфер.

В последней картинке автора $q > 0$: ближе к заряду потенциал больше, градиент внутрь, $\vec{E}$ наружу. Для отрицательного заряда направления меняются согласно той же формуле. Точка $r = 0$ исключена: идеальный кулоновский потенциал там сингулярен, конечный максимум в этой точке не задаётся.

На рисунках двух переменных градиент лежит в плоскости аргументов (x, y), а не вдоль вертикальной оси значений f. Для настоящего трёхмерного поля у градиента три пространственные компоненты.

Прошли частные производные, дифференциал, градиент, направления и радиальные примеры. Дивергенция, ротор, поток и интегральные

теоремы в показанном пособии относятся к будущему материалу и здесь не разобраны. Рекламные условия получения пособия и даты следующих эфиров — исторические объявления записи.

Главное

В частной производной меняется один аргумент. Полный дифференциал собирает линейные вклады всех аргументов. Градиент превращает их в скалярное произведение с перемещением; его проекция на единичное направление даёт производную по направлению. Ненулевой градиент указывает локальный наискорейший рост и нормаль к регулярному уровню.