BOTAY

ОЛИМПИАДНАЯ ФИЗИКА

Глеб Орёл
Конспект

# Занятие 5. Дивергенция, ротор, набла, Остроградский-Гаусс и теорема Стокса

*Теория, методы и разобранные задачи*

BOTAY × Глеб Орёл

botay.pro • 2026

# Занятие 5. Дивергенция, ротор, набла, Остроградский-Гаусс и теорема Стокса

**На этом занятии**

Понять дивергенцию через поток векторного поля. Пройти путь Глеба: плоская площадка, произвольная поверхность, малый параллелепипед, плотность потока и теорема Остроградского–Гаусса. Затем разобрать все три примера записи. Ротор, набла и Стокс здесь только намечены на продолжение.

**1. Формула, смысл которой предстоит получить**

Для векторного поля

$$\vec{E}(x,y,z) = (E_x(x,y,z), E_y(x,y,z), E_z(x,y,z))$$

в декартовом ортонормированном базисе

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Суммируются три соответствующие частные производные: проекция по $x$ дифференцируется по $x$ и так далее. Дивергенция — скаляр, хотя исходное поле векторное.

Автор сначала даёт формулу, затем объясняет её происхождение. Рассматриваем достаточно гладкие поля и кусочно гладкие ориентируемые поверхности. При переходе от малого конечного элемента к дифференциалу понимаем предельный переход; конечная разность не тождественна производной, умноженной на произвольный шаг.

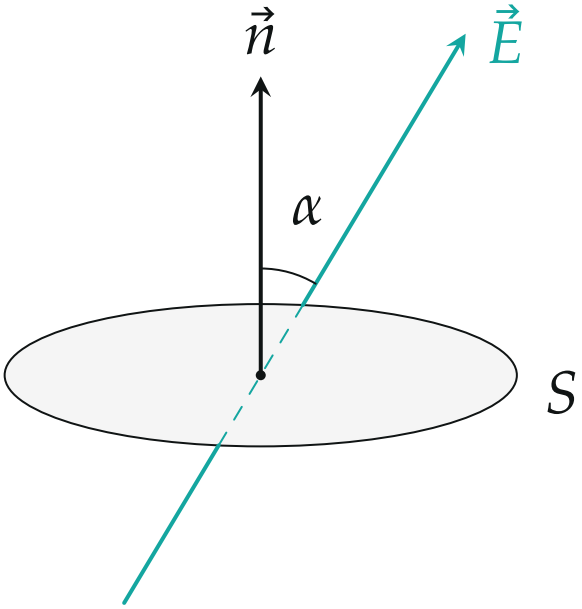
**2. Поток через плоскую площадку**

Начинаем с однородного поля: в каждой точке один и тот же вектор $\vec{E}$. Площадка плоская, площадь $S$. Выберем единичную нормаль $\vec{n}$:

$$|\vec{n}| = 1, \qquad \vec{n} \perp S.$$

Для незамкнутой поверхности сторону нормали выбираем сами. Выбор нормали согласуется с направлением обхода границы по правилу пра-

вой руки: большой палец вдоль $\vec{n}$, согнутые пальцы указывают положительный обход.




*Угол $\alpha$ берётся между полем и нормалью к площадке. Штриховой участок лишь показывает прохождение через условно изображённую поверхность.*

Поток:

$$\Phi = (\vec{E} \cdot \vec{n})S = ES\cos\alpha.$$

Введём вектор площади:

$$\vec{S} = \vec{n}S, \qquad |\vec{S}| = S, \qquad \Phi = \vec{E} \cdot \vec{S}.$$

Он направлен вдоль выбранной нормали, а его длина численно равна площади.

Аналогия Глеба — дождь и ведро: больше всего воды пересекает отверстие, когда оно перпендикулярно дождю. При наклоне вклад уменьшается; если дождь идёт параллельно плоскости отверстия, поток равен нулю.

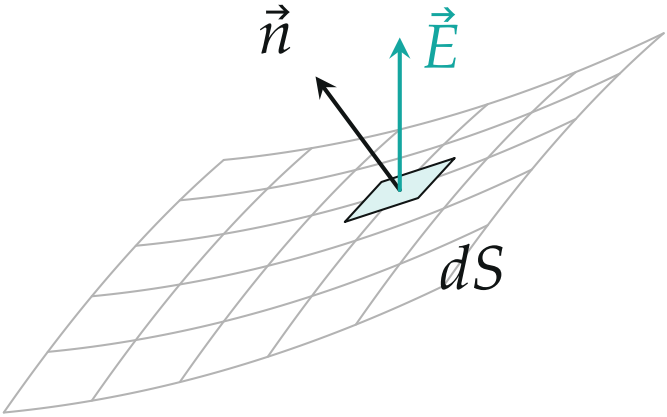
У математического потока есть знак. При сонаправленности поля и нормали он положителен; при противоположном направлении отрицателен. Смена нормали меняет знак потока. Это ориентированный вклад, а не абсолютное количество пересечений.

**3. Произвольная поверхность и неоднородное поле**

Разбиваем поверхность на много малых участков. Каждый достаточно малый участок приближённо плоский, а поле в его пределах приближённо однородно. Для него

$$\Delta\Phi \approx \vec{E}\cdot\vec{n}\,\Delta S = \vec{E}\cdot\Delta\vec{S}.$$

Нормали выбираем согласованно. На искривлённой поверхности они не обязаны быть параллельными: согласованность означает непрерывный выбор одной стороны, а не требование «все строго вверх».




*Кривая поверхность разбивается на малые участки. У выделенного касательного элемента своя нормаль; проекция трёхмерного рисунка не обязана сохранять прямой угол на бумаге.*

Складываем потоки по всем участкам и уменьшаем их размеры:

$$\Phi = \iint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}, \qquad d\vec{S} = \vec{n}\,dS.$$

В записи автора иногда используется один знак интеграла. Здесь $\iint_S$ под-

чёркивает интегрирование по поверхности; смысл тот же — предел суммы элементарных потоков.

**Замкнутая поверхность.** Её Глеб называет поверхностью «картошки»: она целиком ограничивает объём $V$. Нормаль по принятому правилу направлена наружу. Полный поток

$$\Phi = \oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S}.$$

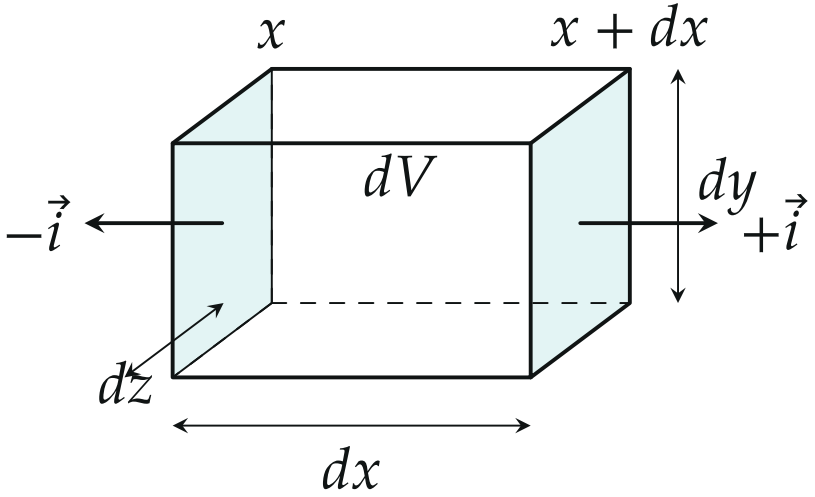
Кружок означает замкнутость, а $\partial V$ — поверхность, ограничивающую $V$. Несмотря на один знак, здесь интеграл поверхностный, а не обход по линии. Выходящий вклад положителен, входящий отрицателен.

**4. Малый параллелепипед: три пары граней**

Рассматриваем прямоугольный малый параллелепипед со сторонами $dx, dy, dz > 0$:

$$dV = dx\, dy\, dz.$$

Нужно найти поток через всю его замкнутую поверхность. Разбиваем шесть граней на три противоположные пары, перпендикулярные осям $x, y, z$.




*Выделены две противоположные грани, перпендикулярные $x$. Их наружные нормали $-\vec{i}$ и $+\vec{i}$, площади одинаковы: $dS_x = dy\, dz$. Вертикаль*

*соответствует $y$, наклонное направление — $z$, как на доске.*

**Пара, перпендикулярная $x$.** У левой грани нормаль $-\vec{i}$, у правой $+\vec{i}$, где $\vec{i}$ — единичный вектор оси $x$. Площади:

$$dS_1 = dS_2 = dS_x = dy\,dz.$$

Скалярное произведение с $\vec{i}$ выбирает соответствующую проекцию поля. В главном приближении для малых граней:

$$d\Phi_1 = -E_x(x, y, z)\,dS_x,$$

$$d\Phi_2 = E_x(x + dx, y, z)\,dS_x.$$

Поэтому

$$d\Phi_x = [E_x(x + dx, y, z) - E_x(x, y, z)]\,dy\,dz.$$

В предельном линейном порядке разность равна $(\partial E_x/\partial x)dx$:

$$d\Phi_x = \frac{\partial E_x}{\partial x}\,dV.$$

**Оставшиеся пары.** Аналогично,

$$dS_y = dx\,dz, \qquad d\Phi_y = \frac{\partial E_y}{\partial y}\,dV,$$

$$dS_z = dx\,dy, \qquad d\Phi_z = \frac{\partial E_z}{\partial z}\,dV.$$

В площади грани отсутствует именно тот дифференциал, вдоль которого изменяется поле между двумя гранями. Умножение на этот недостающий размер даёт объём.

Суммируем:

$$\begin{aligned} d\Phi &= d\Phi_x + d\Phi_y + d\Phi_z \\ &= \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) dV. \end{aligned}$$

Так естественно возникает названная в начале комбинация:

$$d\Phi = \operatorname{div}\vec{E}\, dV.$$

Для малого конечного объёма это главный член; точный локальный смысл задаётся пределом отношения полного наружного потока к объёму.

**5. Дивергенция как объёмная плотность потока**

Глеб сравнивает отношение $d\Phi/dV$ с плотностью массы $dm/dV$ или заряда $dq/dV$. По смыслу

$$\operatorname{div}\vec{E}(P) = \lim_{V\to P}\frac{1}{|V|}\oint_{\partial V}\vec{E}\cdot d\vec{S}.$$

Здесь малые подобные объёмы стягиваются к точке $P$; $|V|$ — их объём. У гладкого поля получается та же сумма частных производных.

Это плотность **полного ориентированного наружного** потока, а не плотность потока через одну открытую площадку. Положительное значение означает локальный избыток выхода, отрицательное — входа. Ноль не означает отсутствия самого поля: входящий и выходящий вклады могут компенсироваться.

**6. Теорема Остроградского–Гаусса**

Один и тот же полный поток через поверхность объёма можно вычислить двумя способами.

Первый — сложить вклады по малым площадкам на внешней поверхности:

$$\Phi = \oint_{\partial V}\vec{E}\cdot d\vec{S}.$$

Второй — разбить сам объём на малые параллелепипеды. У каждого локальный поток выражается через дивергенцию. Суммируем по объёмам:

$$\Phi = \iiint_V \operatorname{div}\vec{E}\, dV.$$

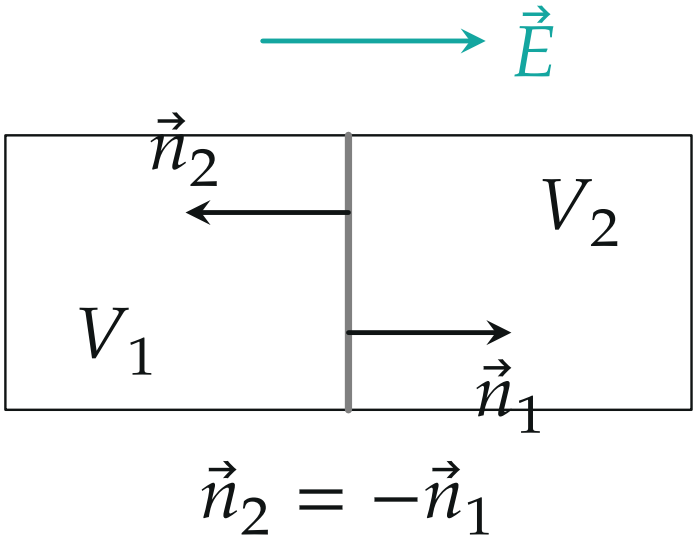
**Почему внутренние грани исчезают.** У общей грани двух соседних

ячеек одно и то же поле, но противоположные наружные нормали:

$$\vec{n}_2 = -\vec{n}_1.$$

Поэтому два учёта этой грани дают

$$\vec{E} \cdot \vec{n}_1 \, dS + \vec{E} \cdot \vec{n}_2 \, dS = 0.$$




*Схематическое сечение двух соседних объёмов. Одна общая грань входит в их потоки с противоположными нормалями. При сложении остаются внешние грани объединения.*

Компенсируются **парные вклады общей грани**. В речи появляется сокращение, будто полный поток каждого внутреннего кубика сам по себе нулевой. Это в общем случае неверно: он может быть $\operatorname{div} \vec{E} \, dV \neq 0$. Для компенсации надо сложить потоки всех ячеек; на общей грани поле одно и то же, нормали противоположны.

После сложения всех ячеек внутренние грани учитываются дважды с

разными знаками, а внешние остаются один раз. Получаем

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{E}\, dV.$$

Это связь поверхностного и объёмного интегралов. Вывод проведён на принятом автором физическом уровне строгости. Для обычной теоремы поле должно быть достаточно гладким во всём рассматриваемом объёме; сингулярность внутри нельзя просто проигнорировать.

**7. Пример 1. Дивергенция радиус-вектора**

$$\vec{r} = (x, y, z).$$

Компоненты $r_x = x$, $r_y = y$, $r_z = z$. Следовательно,

$$\operatorname{div} \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Получен результат именно для трёхмерного пространства. Дивергенция здесь постоянная и ненулевая, в том числе для малого кубика, находящегося внутри большого объёма.

**8. Пример 2. Поле $\vec{r}/r^3$**

$$\vec{E} = \frac{\vec{r}}{r^3}, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > 0.$$

Компоненты:

$$E_x = \frac{x}{r^3}, \quad E_y = \frac{y}{r^3}, \quad E_z = \frac{z}{r^3}.$$

Сначала подробно считаем производную первой:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(x r^{-3}) \\ &= \frac{1}{r^3} - \frac{3x}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x}. \end{aligned}$$

Здесь применены и правило произведения, и правило сложной функции.

**Два способа найти** $\partial r/\partial x$**.** Прямое дифференцирование корня:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r}.$$

Предпочитаемый автором короткий способ — сначала возвести в квадрат:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$2r\frac{\partial r}{\partial x} = 2x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}.$$

Другие координаты фиксируются при частном дифференцировании.

Подставляем:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}.$$

По аналогии

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}.$$

Складываем:

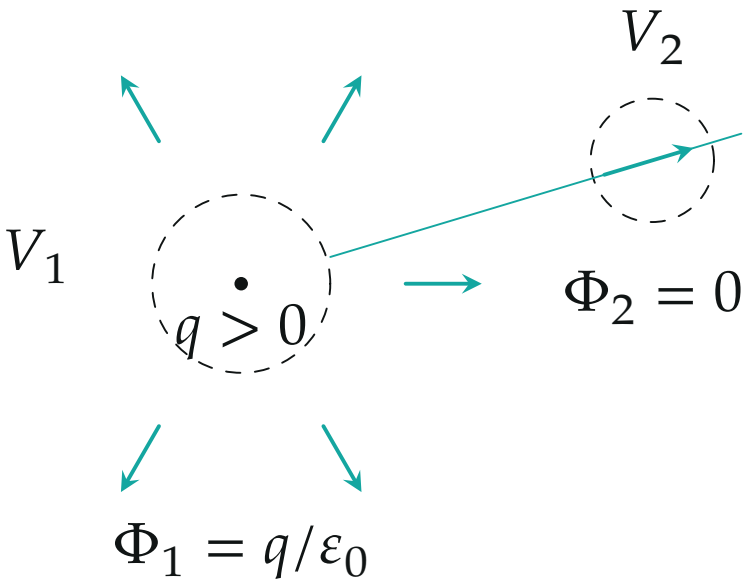
$$\operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^5}(x^2+y^2+z^2)$$

$$= \frac{3}{r^3} - \frac{3r^2}{r^5} = 0, \qquad r > 0.$$

**Физическая проверка.** С точностью до постоянного множителя это поле точечного заряда:

$$\vec{E} = \frac{kq}{r^3}\vec{r}.$$

Малый объём около точки с $r > 0$ не содержит заряд. По электростатической теореме Гаусса его полный поток нулевой, поэтому и дивергенция нулевая. Сам вектор поля при этом не обязан быть нулём.




*Объём $V_2$ не содержит заряда: полный поток равен нулю. Объём $V_1$ содержит заряд: поток $q/\varepsilon_0$. Формула нулевой дивергенции действует вне точки $q$, где поле гладкое.*

Точка $r = 0$ исключена из вычисления. Нельзя подставить нулевую дивергенцию во всём объёме, включающем заряд, и получить нулевой поток через окружающую его поверхность: условие гладкости там нарушено.

**9. Пример 3. Электростатика и плотность заряда**

Автор отдельно принимает без вывода физическую теорему Гаусса в СИ:

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{внутри}}}{\varepsilon_0}.$$

При нескольких зарядах справа их **алгебраическая сумма**, а не количество частиц. Это физический закон, отличающийся по содержанию от математической теоремы Остроградского–Гаусса.

Для малого элемента со гладкой объёмной плотностью заряда $\rho$:

$$dq = \rho\, dV.$$

С одной стороны,

$$d\Phi = \frac{\rho\, dV}{\varepsilon_0}.$$

С другой стороны, из локального смысла дивергенции:

$$d\Phi = \operatorname{div}\vec{E}\, dV.$$

Сравниваем и сокращаем объём:

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Это дифференциальная форма закона Гаусса. Именно она уточняет слова «плотность источников» для электрического поля: учитываются знак заряда и множитель $1/\varepsilon_0$.

Таким образом, у точечного заряда вне самого заряда $\rho = 0$ и $\operatorname{div}\vec{E} = 0$, что согласуется со вторым примером. Утверждение о гладкой плотности в данном выводе не переносится буквально в сингулярную точку.

**Что в этой записи не разбиралось**

Поверхностные интегралы объяснены как суммы малых потоков, но общей техники их вычисления на задачах здесь нет. Ротор, операции с набла, циркуляция и теорема Стокса объявлены на будущее; показанные страницы пособия с примерами ротора не означают, что эти примеры решались в речи.

**Главное**

Поток — ориентированная сумма нормальных составляющих поля по поверхности. Дивергенция показывает локальную объёмную плотность полного наружного потока. В теореме Остроградского–Гаусса внутренние общие грани взаимно компенсируются, поэтому объёмная сумма дивергенции равна внешнему поверхностному потоку.