BOTAY

ОЛИМПИАДНАЯ ФИЗИКА

Глеб Орёл

Конспект

Занятие 2. Производная, формула Тейлора, дифференциал, экстремум, приближённые вычисления

Теория, методы и разобранные задачи

BOTAY × Глеб Орёл

botay.pro • 2026

Занятие 2. Производная, формула Тейлора, дифференциал, экстремум, приближённые вычисления

На этом занятии

Понять производную через секущую, касательную и скорость изменения. Затем в порядке Глеба разобрать знаки, экстремумы, вычисления по определению, таблицу и правила дифференцирования, после чего решить все десять примеров записи. Формула Тейлора и большой набор физических задач здесь анонсированы, но отложены на продолжение.

1. От приращения к производной

Вопрос автора: как числом описать, насколько быстро растёт функция около точки? На глаз это связано с наклоном касательной. Чтобы получить наклон из самой функции, начинаем с двух точек:

$$A = (x, y), \qquad B = (x + \Delta x, y + \Delta y),$$

$$y = f(x), \qquad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Знак Δ означает конечное минус начальное. Отсюда $x_1 = x + \Delta x$, $y_1 = y + \Delta y$.

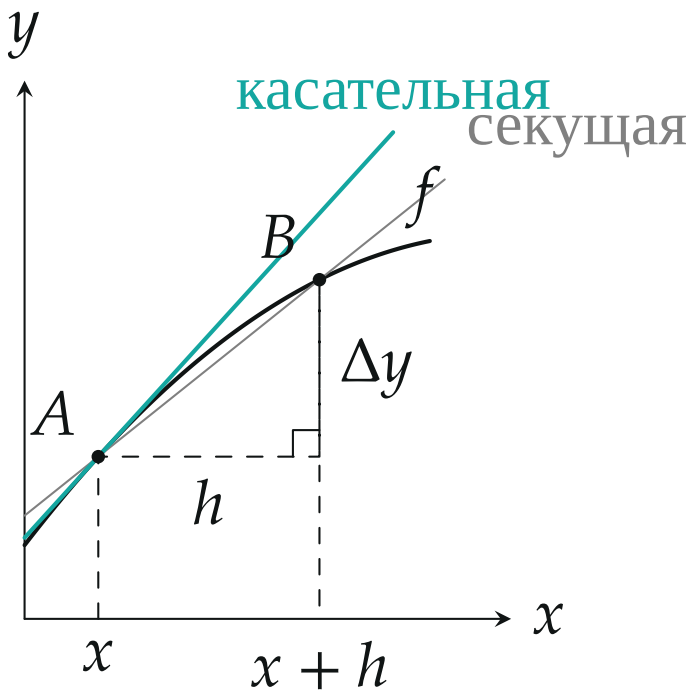
Проводим секущую через A, B. Её угловой коэффициент

$$\tan \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Приближаем B к A. Если существует конечный предел этого отношения, секущая переходит в касательную:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}, \qquad h = \Delta x \neq 0.$$

Это и есть производная в точке x. Точку x фиксируем, а к нулю стремим именно h.



Секущая соединяет две точки графика; в пределе её наклон становится наклоном касательной в A. Иллюстративная кривая вогнута вниз, как на доске.

Числитель и знаменатель могут стремиться к нулю одновременно, а отношение — к ненулевому числу. Например, $\frac{10^{-n}}{10\cdot 10^{-n}} = \frac{1}{10}$ при любом n. Но из одного вида «$0/0$» существование конечного предела не следует: условие существования производной существенно.

Геометрический смысл:

$$f'(x) = \tan \alpha_0,$$

где α_0 — угол наклона касательной к положительному направлению горизонтальной оси при одинаковом масштабе единиц по осям.

Автор вводит запись dy/dx как удобный язык малых изменений. В точной записи

$$dy = f'(x)\,dx, \qquad \frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Дифференциал dy — линейная часть приращения; конечная Δy не обязана точно совпадать с ним. В приведённом определении предел берётся с обеих сторон; движение вправо с $h > 0$ на доске — выбранная иллюстрация.

2. Рост, убывание и знак угла

При малом положительном шаге вправо растущая ветвь даёт положительное приращение функции, убывающая — отрицательное. Для дифференцируемой функции на промежутке:

$$f'(x) > 0 \text{ везде} \quad \Rightarrow \quad f \text{ строго возрастает},$$

$$f'(x) < 0 \text{ везде} \quad \Rightarrow \quad f \text{ строго убывает}.$$

Обратное утверждение со строгим знаком в каждой точке неверно: возрастающая x^3 имеет нулевую производную в 0. Не следует заменять признаки монотонности строгим равенством понятий «рост» и «положительная производная».

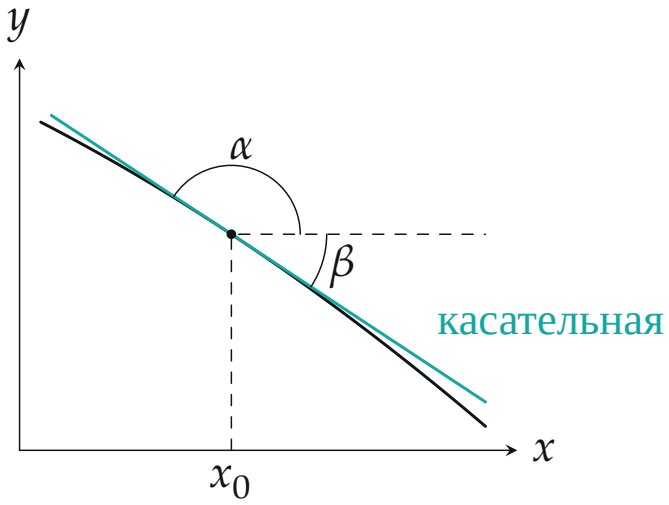
Для убывающей ветви Глеб предлагает две согласованные записи угла:

$$f'(x) = \tan\alpha < 0, \qquad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi,$$

или

$$f'(x) = -\tan\beta, \qquad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}.$$

Здесь $\alpha = \pi - \beta$, поэтому $\tan\alpha = -\tan\beta$. Нельзя брать острый угол снизу и одновременно писать положительный тангенс для убывающей ветви.



Для одной убывающей касательной верхний угол α тупой, нижний β острый. Формулы $\tan\alpha$ и $-\tan\beta$ дают один отрицательный наклон.

3. Экстремум и наибольшее значение

На гладкой вершине касательная горизонтальна, поэтому во внутренней точке локального экстремума, если производная существует,

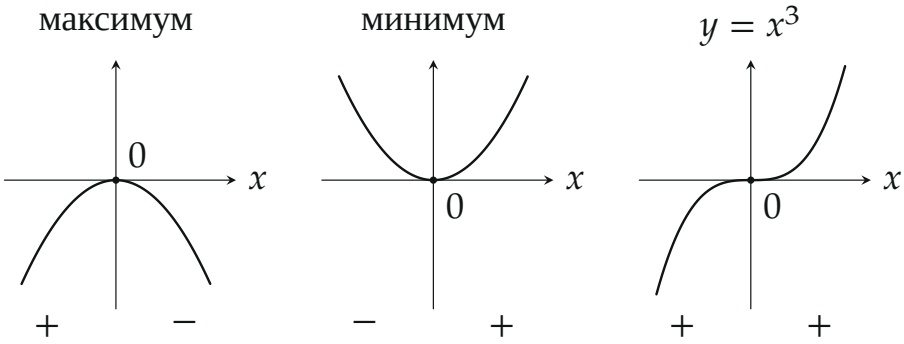
$$f'(x_0) = 0.$$

Это необходимое условие, а не достаточное. В обычных случаях смены знака:

$+ \longrightarrow -$: локальный максимум,

$- \longrightarrow +$: локальный минимум.

На доске в итоговой строке для максимума знаки до и после A перепутаны. Сам рисунок и предыдущее объяснение показывают рост слева и убывание справа; правильный порядок — $+, 0, -$.



Максимум, минимум и стационарная точка без экстремума. Знаки относятся к производной слева и справа от отмеченной точки.

Контрпример автора:

$$f(x) = x^3, \qquad f'(x) = 3x^2, \qquad f'(0) = 0.$$

Функция растёт и слева, и справа от нуля, поэтому экстремума там нет.

Отдельно различаем локальные экстремумы и наибольшее/наименьшее значение на рассматриваемом отрезке. Последние могут достигаться на границе. В занятии слово «экстремум» используется для внутренних локальных точек; граничные значения проверяют отдельно. Теорема о нулевой производной не применяется к границе как к внутренней точке.

4. Четыре шага вычисления по определению

Повторяющийся алгоритм Глеба:

1. фиксируем ненулевой шаг h;
2. $\Delta y = f(x+h) - f(x)$;
3. находим $\Delta y / h$;
4. устремляем $h \to 0$.

Константа. Для $y = 4$ приращение равно $4 - 4 = 0$, поэтому производная нулевая. В общем случае

$$(C)' = 0, \qquad C = \text{const}.$$

Линейная функция. При $y = 5x + 2$

$$\Delta y = 5(x + h) + 2 - (5x + 2) = 5h,$$

$$\frac{\Delta y}{h} = 5 \quad \Rightarrow \quad y' = 5.$$

Касательная совпадает с самой прямой. Для $y = kx + b$ получаем $y' = k$.

Квадрат.

$$\Delta y = (x + h)^2 - x^2 = 2xh + h^2,$$

$$\frac{\Delta y}{h} = 2x + h \longrightarrow 2x.$$

Следовательно, $(x^2)' = 2x$. При предельном переходе x не изменяется.

Куб.

$$\Delta y = (x + h)^3 - x^3 = 3x^2h + 3xh^2 + h^3,$$

$$\frac{\Delta y}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2 \longrightarrow 3x^2.$$

Поэтому $(x^3)' = 3x^2$. Аналогично, для натуральной степени, раскрывая бином Ньютона,

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

В таблице правило используют и для других действительных степеней на промежутках, где соответствующая функция определена и дифференцируема.

5. Производная синуса и таблица

По тому же алгоритму

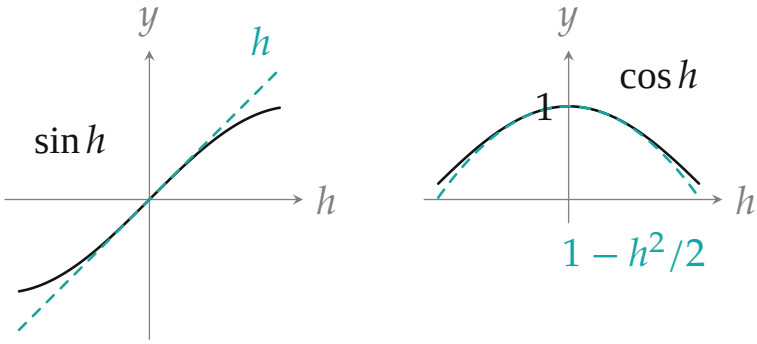
$$\begin{aligned}\Delta y &= \sin(x + h) - \sin x \\ &= \sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h.\end{aligned}$$

Затем

$$\frac{\Delta y}{h} = \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h}.$$

Глеб принимает без доказательства малые углы в радианах:

$$\sin h \approx h, \qquad \cos h \approx 1 - \frac{h^2}{2}, \qquad |h| \ll 1.$$



Вблизи нуля $\sin h$ *приближается к* h*, а* $\cos h$ *— к* $1 - h^2/2$*. Чёрные кривые точные, бирюзовые пунктиры — приближения. Аргумент в радианах.*

Подстановка показывает предельные вклады:

$$\sin x \, \frac{\cos h - 1}{h} \approx -\frac{h}{2} \sin x \;\longrightarrow\; 0,$$

$$\cos x \, \frac{\sin h}{h} \;\longrightarrow\; \cos x.$$

Итак,

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Не теряем минус в первом малом слагаемом. Для строгого предела используются соответствующие предельные соотношения; полная формула Тейлора здесь ещё не выводится. Именно пределы $\sin h/h \to 1$ и $(\cos h - 1)/h \to 0$ обосновывают полученный результат.

Другие нужные производные собраны в таблице:

$$(C)' = 0, \qquad (x^n)' = nx^{n-1},$$
$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x,$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \qquad (e^x)' = e^x,$$
$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x},$$
$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2},$$
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Для $\ln x$ требуется $x > 0$; для тангенса $\cos x \neq 0$; формула конечной производной арксинуса действует при $|x| < 1$. $e \approx 2{,}72$. Последние три строки затем разбираются в примерах.

6. Линейность и произведение

Для дифференцируемых f, g

$$(f+g)' = f' + g'.$$

Идея вывода: разность значений суммы равна сумме разностей:

$$\frac{\Delta(f+g)}{h} = \frac{\Delta f}{h} + \frac{\Delta g}{h}.$$

После перехода к пределу получаем сумму производных.

Для произведения используем

$$(f+\Delta f)(g+\Delta g) - fg = f\Delta g + g\Delta f + \Delta f \Delta g.$$

Делим на h:

$$\frac{\Delta(fg)}{h} = f\frac{\Delta g}{h} + g\frac{\Delta f}{h} + \frac{\Delta f}{h}\Delta g.$$

Последнее слагаемое стремится к нулю, поскольку $\Delta f / h$ имеет конечный предел, а $\Delta g \to 0$. Так сохраняется авторский вывод без буквально-

го приравнивания конечной разности к дифференциалу:

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Следствие при постоянной C:

$$(Cf)' = C'f + Cf' = Cf'.$$

В сумме и произведении важно различать $f'g + fg'$ и ошибочное $f'g'$.

7. Сложная функция — «матрёшка»

Если $y = f(g(x))$, сначала дифференцируем внешнюю функцию по её аргументу, затем умножаем на производную внутренней:

$$\frac{dy}{dx} = f'(g(x))\,g'(x).$$

Глеб поясняет это записью

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}.$$

Сокращение dg здесь мнемоника правила; само правило не требует $g'(x) \neq 0$ и не является делением на обычное нулевое число.

Пробный пример перед нумерованными задачами:

$$(\sin(x^2))' = \cos(x^2) \cdot 2x.$$

Это отличается от $(\sin x)^2$: в одном случае квадрат внутри синуса, в другом — снаружи.

8. Примеры 1–4

1. Сумма и произведение.

$$\begin{aligned}(x^3 + x^2 \sin x)' &= (x^3)' + (x^2)' \sin x + x^2 (\sin x)' \\ &= 3x^2 + 2x \sin x + x^2 \cos x.\end{aligned}$$

2. Постоянные множители.

$$(2\ln x + 8 + 9\cos x)' = 2(\ln x)' + 0 + 9(\cos x)' = \frac{2}{x} - 9\sin x, \qquad x > 0.$$

3. Синус линейного аргумента. При $g = 5x + 2$

$$(\sin(5x + 2))' = \cos g \cdot g' = 5\cos(5x + 2).$$

4. Квадрат синуса. Теперь $g = \sin x$, внешняя функция — квадрат:

$$((\sin x)^2)' = 2g \cdot g' = 2\sin x \cos x.$$

В этом примере порядок вложений обратный по сравнению с $\sin(x^2)$.

9. Примеры 5–6: несколько вложений

5. Обратный квадрат. Переписываем

$$y = \frac{1}{(5x^2 + 2)^2} = (5x^2 + 2)^{-2} = g^{-2}, \qquad g = 5x^2 + 2.$$

Тогда

$$y' = (-2)g^{-3} \cdot 10x = -\frac{20x}{(5x^2 + 2)^3}.$$

В последнем знаменателе доски потеряна степень 3, хотя непосредственно перед ним правильно стоит $-20xg^{-3}$. Куб восстановлен по этой же промежуточной строке и правилу производной степени.

6. Обратный синус квадрата. Здесь три уровня:

$$h = x^2, \qquad g = \sin h, \qquad f = g^{-1}.$$

Последовательно:

$$y' = (-g^{-2}) \cdot \cos h \cdot 2x = -\frac{2x\cos(x^2)}{\sin^2(x^2)}.$$

Исходная функция $y = 1/\sin(x^2)$ требует $\sin(x^2) \neq 0$. Каждый из трёх

множителей в производной отвечает своему уровню «матрёшки».

10. Примеры 7–8: тангенс

7. Вывод табличной производной. Сначала $\tan x = \sin x (\cos x)^{-1}$. По правилу произведения

$$(\tan x)' = \cos x (\cos x)^{-1} + \sin x \, ((\cos x)^{-1})'.$$

Отдельно дифференцируем второе вложение:

$$((\cos x)^{-1})' = -(\cos x)^{-2}(-\sin x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

Оба минуса дают плюс — автор отдельно исправляет промежуточный знак. Подставляем:

$$\begin{aligned}(\tan x)' &= 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.\end{aligned}$$

8. Тангенс квадрата аргумента.

$$(\tan(x^2))' = \frac{1}{\cos^2(x^2)} \cdot 2x = \frac{2x}{\cos^2(x^2)}.$$

Требуется $\cos(x^2) \neq 0$.

11. Примеры 9–10: обратные функции

9. Арктангенс. Пусть $y = \arctan x$. Тогда $\tan y = x$. Дифференцируем обе части по x:

$$\frac{1}{\cos^2 y} y' = 1 \quad \Rightarrow \quad y' = \cos^2 y.$$

Чтобы выразить результат через x, используем

$$1 + \tan^2 y = \frac{1}{\cos^2 y}, \qquad \tan y = x.$$

Следовательно,

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

10. Арксинус. Пусть $y = \arcsin x$. Тогда $\sin y = x$:

$$\cos y \cdot y' = 1 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{\cos y}.$$

Из $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ получаем $\cos^2 y = 1 - x^2$. Для $|x| < 1$ значение y лежит строго между $-\pi/2$ и $\pi/2$, поэтому $\cos y > 0$ и нужен положительный корень:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

В точках $x = \pm 1$ эта формула не задаёт конечной производной.

В конце автор напоминает практический смысл: например, производная координаты по времени даёт соответствующую компоненту скорости. Полноценные физические задачи, вторая производная и формула Тейлора остаются для продолжения; показанные страницы будущего задания не означают, что их решения уже разобраны.

Главное

Производная — предел отношения приращений и наклон касательной. Нулевой производной недостаточно для экстремума: исследуйте смену знака. При вычислении сложной функции раскрывайте «матрёшку» снаружи внутрь и умножайте все производные.