BOTAY

ОЛИМПИАДНАЯ ФИЗИКА

Глеб Орёл
Конспект

Как найти натяжение нити, не вычисляя страшную сумму?

Теория, методы и разобранные задачи

BOTAY × Глеб Орёл

botay.pro • 2026

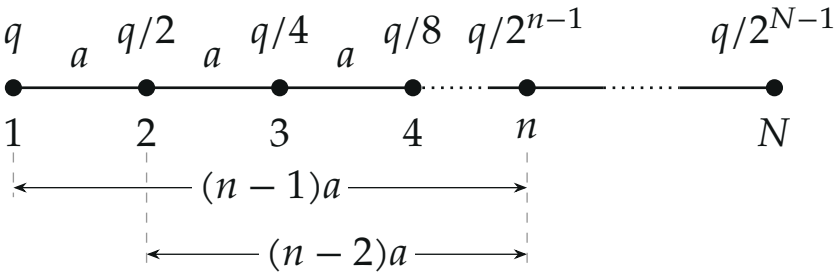
Как найти натяжение нити, не вычисляя страшную сумму?

На этом занятии

Найти натяжение нити между вторым и третьим зарядами длинной цепочки, не вычисляя сумму, которая возникает при записи равновесия:

- расписать силы на заряд 1 и увидеть сумму, которую посчитать нельзя;
- расписать силы на заряд 2 и получить вторую сумму такого же вида;
- сдвинуть индекс, чтобы суммы совпали, и выразить одну через другую с помощью T.

Пример 1. N точечных зарядов q, $q/2$, $q/4$, …, $q/2^{N-1}$ связаны нитями длины a. Натяжение нити между зарядами 1 и 2 равно T. Найдите натяжение T_{23} нити между зарядами 2 и 3.

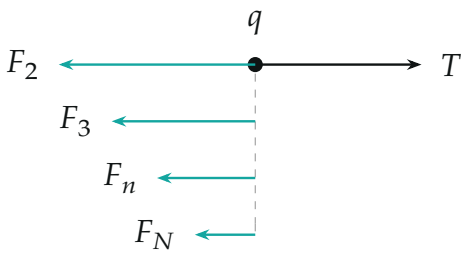


Заряды на нити: заряд n несёт $q/2^{n-1}$. От заряда 1 до заряда n расстояние $(n-1)a$, от заряда 2 — $(n-2)a$.

▲ **Решение. Что известно и чего ждать.** Все заряды одноимённые и положительные, поэтому каждая пара отталкивается с силой Кулона: прямо пропорционально произведению зарядов и обратно пропорционально квадрату расстояния. Число N может быть любым, значит, прямо считать силы от всех зарядов не выйдет, и действовать надо общей формулой для произвольного n.

План: сначала записать всё для заряда 1, потом для заряда 2 — вдруг задача решится сама.

1. Заряд 1.



Силы на заряд 1*: нить тянет вправо, все остальные заряды отталкивают влево.*

Вправо — сила натяжения нити T. Влево — кулоновские силы F_2, F_3, … , F_N со стороны остальных зарядов. До заряда 2 расстояние a, до третьего $2a$, до четвёртого $3a$, до n-го — $(n-1)a$.

$$F_2 = \frac{k\,q\cdot\frac{q}{2}}{a^2} = \frac{kq^2}{2a^2}, \qquad F_3 = \frac{k\,q\cdot\frac{q}{4}}{(2a)^2} = \frac{kq^2}{4(2a)^2}.$$

Для произвольного n заряд равен $q/2^{n-1}$, и

$$F_n = \frac{k\,q\cdot\frac{q}{2^{n-1}}}{(n-1)^2a^2} = \frac{kq^2}{a^2}\cdot\frac{1}{2^{n-1}(n-1)^2}.$$

Подставляя вместо n двойку, тройку и так далее, получаем каждую из сил.

Заряд в равновесии: сумма сил влево равна силе вправо.

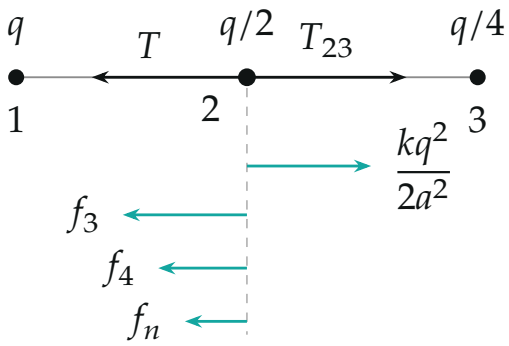
$$T = F_2 + F_3 + \cdots + F_N = \sum_{n=2}^{N} F_n = \frac{kq^2}{a^2}\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{2^{n-1}(n-1)^2}.$$

Постоянный множитель вынесен за знак суммы.

Идея 1

Сумма страшная, и считать её не нужно. Если задача дана, у неё есть решение; значит, T дано не зря: оно уже содержит эту сумму в зашифрованном виде. Искать выход надо так: выразить эту сумму двумя способами — один записан выше, второй появится при расчёте для T_{23}.

2. Заряд 2.



Силы на заряд 2 *(заряд* $q/2$*): натяжения* T *слева и* T_{23} *справа; от заряда* 1 *— сила вправо, от зарядов* $3, 4, \dots, n$ *— силы влево.*

Слева действует известное T, справа — искомое T_{23}. Заряд 1 отталкивает заряд 2 вправо с силой $\dfrac{kq^2}{2a^2}$ (заряды q и $q/2$, расстояние a). Остальные заряды отталкивают его влево; обозначим эти силы строчной f.

До n-го заряда от второго расстояние на a меньше, чем от первого: $(n-2)a$. Для заряда с номером n

$$f_n = \frac{k \cdot \frac{q}{2} \cdot \frac{q}{2^{n-1}}}{(n-2)^2 a^2} = \frac{kq^2}{a^2} \cdot \frac{1}{2^n (n-2)^2}, \qquad n = 3, \dots, N.$$

Равновесие: сумма сил вправо равна сумме сил влево.

$$T_{23} + \frac{kq^2}{2a^2} = T + \sum_{n=3}^{N} f_n.$$

Здесь тоже стоит сумма, которой мы не знаем, и она отличается от преж-

ней: 2^n вместо 2^{n-1} и $(n-2)^2$ вместо $(n-1)^2$. Но это кажущееся различие — нужно привести её к виду из пункта 1.

3. Сдвигаем индекс. Положим $\ell = n-1$. Тогда $n-2 = \ell-1$ и $n = \ell+1$. Пределы: при $n = 3$ получаем $\ell = 2$, при $n = N$ получаем $\ell = N-1$; значит, ℓ пробегает значения $2, 3, \ldots, N-1$. Это только переобозначение, и никакого секретного смысла в нём нет.

$$\sum_{n=3}^{N} f_n = \frac{kq^2}{a^2} \sum_{\ell=2}^{N-1} \frac{1}{2^{\ell+1}(\ell-1)^2} = \frac{kq^2}{4a^2} \sum_{\ell=2}^{N-1} \frac{1}{2^{\ell-1}(\ell-1)^2}.$$

Двойка в степени $\ell+1$ превратилась в $4 \cdot 2^{\ell-1}$, четвёрка вынесена вперёд. Теперь слагаемые устроены так же, как в сумме для T. Различие остаётся только в пределе: там сумма идёт до N, здесь до $N-1$.

4. Две одинаковые суммы. Выделим из суммы для T последнее слагаемое, с $n = N$:

$$T = \frac{kq^2}{a^2} \cdot \frac{1}{2^{N-1}(N-1)^2} + \frac{kq^2}{a^2} \sum_{\alpha=2}^{N-1} \frac{1}{2^{\alpha-1}(\alpha-1)^2}.$$

Остаток — сумма с тем же слагаемым и теми же пределами $2, \ldots, N-1$, что и в предыдущем пункте. Какой буквой обозначен индекс суммирования — n, ℓ или α, — значения не меняет. Поэтому

$$\frac{kq^2}{a^2} \sum_{\alpha=2}^{N-1} \frac{1}{2^{\alpha-1}(\alpha-1)^2} = T - \frac{kq^2}{a^2} \cdot \frac{1}{2^{N-1}(N-1)^2},$$

а искомая сумма из пункта 2 в четыре раза меньше:

$$\sum_{n=3}^{N} f_n = \frac{1}{4} T - \frac{kq^2}{4a^2} \cdot \frac{1}{2^{N-1}(N-1)^2}.$$

Сумму мы не считали: она выражена через известное T.

Ответ из равновесия заряда 2.

$$T_{23} = T + \sum_{n=3}^{N} f_n - \frac{kq^2}{2a^2} = \frac{5}{4}T - \frac{kq^2}{2a^2} - \frac{kq^2}{a^2}\cdot\frac{1}{2^{N+1}(N-1)^2}.$$

Здесь $4\cdot 2^{N-1} = 2^{N+1}$.

Ответ.

$$T_{23} = \frac{5}{4}T - \frac{kq^2}{2a^2} - \frac{kq^2}{a^2}\cdot\frac{1}{2^{N+1}(N-1)^2}.$$

Нить натянута, только если эта величина положительна: иначе заряды не могли бы находиться в равновесии на нитях. Предполагается, что в численных данных задачи это выполнено. Проверка при $N = 3$: $T = \frac{9kq^2}{16a^2}$, откуда $T_{23} = \frac{3kq^2}{16a^2}$, что совпадает с прямым расчётом для крайнего заряда.

Главное

Силы на заряд n от заряда m: $\frac{k\,q_n q_m}{(m-n)^2a^2}$, $q_n = \frac{q}{2^{n-1}}$. Страшную сумму не считают: ищут второе равенство, где она появится, и выражают её через данное T. Для этого меняют индекс ($\ell = n-1$), пересчитывают пределы и выделяют лишнее слагаемое. Название индекса значения суммы не меняет. Итог: $T_{23} = \frac{5}{4}T - \frac{kq^2}{2a^2} - \frac{kq^2}{a^2}\cdot\frac{1}{2^{N+1}(N-1)^2}$.