BOTAY

ОЛИМПИАДНАЯ ФИЗИКА

Глеб Орёл
Конспект

Занятие 3.5. Решаем задачи - Интеграл, первообразная

Теория, методы и разобранные задачи

BOTAY × Глеб Орёл

botay.pro • 2026

Занятие 3.5. Решаем задачи - Интеграл, первообразная

На этом занятии

Повторить смысл интеграла и научиться считать первообразные в порядке Глеба: линейность, таблица, дифференциал, замена переменной, затем разложение рациональной дроби. Здесь разобраны именно примеры этой записи; обещанные в конце интегрирование по частям и геометрические приложения не выдаются за проведённый материал.

1. Что повторяем перед задачами

Первообразная F для функции f на промежутке удовлетворяет $F' = f$. Неопределённый интеграл обозначает семейство первообразных:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Например, из $(x^2 + C)' = 2x$ следует $\int 2x\,dx = x^2 + C$. Константа не определяется по одной производной.

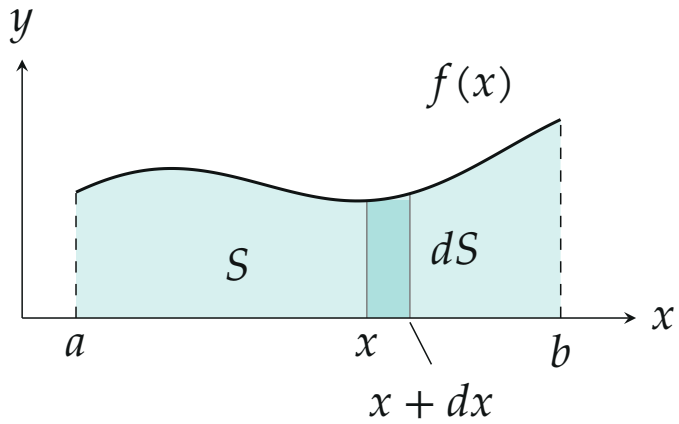
Другой взгляд Глеба — суммировать малые вклады. Для работы силы на траектории это

$$\delta A = (\vec{F}, d\vec{s}), \qquad A_{12} = \int_1^2 (\vec{F}, d\vec{s}).$$

В геометрическом примере $f(x) \geqslant 0$, поэтому сумма площадей тонких полосок даёт площадь:

$$dS = f(x)\,dx, \qquad S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Строго здесь подразумевается предел конечных сумм при стремлении максимальной ширины полосок к нулю. Это не сложение обычных нулей.



Площадь под положительным графиком и малый вклад полоски, как в повторении Глеба. Кривая иллюстративна.

Если $F' = f$ и f непрерывна на $[a, b]$, формула Ньютона — Лейбница даёт

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

При фиксированных a, b это число; C сокращается. Без условия $f \geqslant 0$ определённый интеграл складывает вклады со знаком, а геометрическая площадь при $a < b$ равна $\int_a^b |f(x)|\,dx$.

Итак, сначала ищем первообразную, затем при необходимости подставляем границы. Неопределённый интеграл не является просто «площадью с забытыми границами»: это семейство функций.

2. Линейность и таблица

Для постоянных α, β

$$\int (\alpha f + \beta g)\,dx = \alpha \int f\,dx + \beta \int g\,dx.$$

Константы из разных слагаемых объединяются в одну. Первый пример записи:

$$\int (5\sin x + \cos x)\,dx = 5\int \sin x\,dx + \int \cos x\,dx$$
$$= -5\cos x + \sin x + C.$$

Проверка производной возвращает $5\sin x + \cos x$.

Глеб восстанавливает таблицу по производным. Во всех строках ниже подразумевается $+C$:

$$\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad \alpha \neq -1,$$
$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x|, \quad x \neq 0,$$
$$\int e^{x}\,dx = e^{x},$$
$$\int a^{x}\,dx = \frac{a^{x}}{\ln a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

Для произвольной действительной степени удобно брать $x > 0$; для других степеней допустимые промежутки уточняются отдельно. Последняя строка получается из $a^{x} = e^{x\ln a}$: производная добавляет множитель $\ln a$, поэтому в первообразной на него делим.

$$\int \sin x\,dx = -\cos x, \qquad \int \cos x\,dx = \sin x,$$
$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x, \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x,$$
$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x.$$

Знаменатели должны быть ненулевыми; для последней строки $|x| < 1$. Для гиперболических функций

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2},$$
$$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x, \qquad \int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x.$$

В отличие от пары синус–косинус здесь при дифференцировании минус не возникает.

Во втором линейном примере таблица применяется так:

$$\int\left(\frac{5}{1+x^2}+6x^2+\frac{3}{x}\right)dx = 5\int\frac{dx}{1+x^2}+6\int x^2\,dx+3\int\frac{dx}{x}$$
$$= 5\arctan x + 2x^3 + 3\ln|x| + C.$$

Модуль сохраняем и при $x<0$: производная $\ln|x|$ равна $1/x$ на обоих промежутках, без дополнительного знака «плюс-минус». Сама функция в $x=0$ не определена.

3. Изменение и дифференциал

Перед заменой переменной Глеб подробно разбирает обозначение изменения:

$$\Delta x = x_{\text{кон}} - x_{\text{нач}}, \qquad x_{\text{кон}} = x + \Delta x,$$
$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x).$$

Например,

$$\Delta(\sin x) = \sin(x+\Delta x) - \sin x,$$
$$\Delta(x^2) = (x+\Delta x)^2 - x^2,$$
$$\Delta\sqrt{x+10} = \sqrt{x+\Delta x+10} - \sqrt{x+10}.$$

Также

$$\Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g, \qquad \Delta(\alpha f) = \alpha\Delta f, \qquad \Delta C = 0.$$

Поэтому $\Delta(5x+3) = 5\Delta x$ и $\Delta(x^2+5) = \Delta(x^2)$. Для произведения нельзя просто складывать изменения:

$$\Delta(x^2\sin x + 5) = (x+\Delta x)^2\sin(x+\Delta x) - x^2\sin x.$$

Уточнение неформальной записи доски. Дифференциал — линейная часть малого приращения:

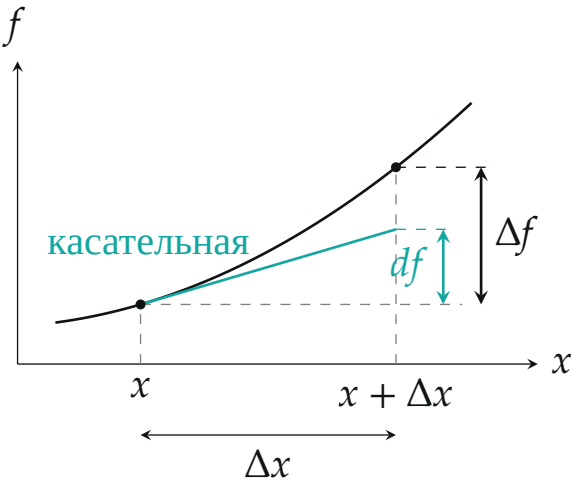
$$df = f'(x)\,dx.$$

Конечная разность и дифференциал для нелинейной функции не равны

точно. Например,

$$\Delta(x^3) = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3, \qquad d(x^3) = 3x^2\,dx.$$

В речи переход к малому изменению используется интуитивно; при преобразовании интегралов ниже пользуемся именно дифференциалом.



Разность значений функции и её линейная часть. Иллюстрация уточняет рисунок изменения на доске; при конечном шаге они различаются.

Для линейной функции остатка нет:

$$d(3x + 5) = 3\,dx, \qquad d(x + 5) = dx.$$

Линейность дифференциала даёт

$$d(5x^3 + \sin x) = 15x^2\,dx + \cos x\,dx.$$

Коэффициент 15 следует из $(5x^3)' = 15x^2$. Равенство $d(x + 5) = dx$ означает равенство изменений, а не $x + 5 = x$.

4. Как понимать замену переменной. Общую формулу Глеб сначала записывает, а затем объясняет примерами:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int f(\varphi)\,d\varphi, \qquad d\varphi = \varphi'(x)\,dx.$$

Можно сразу выбрать φ, а можно сначала заметить подходящий дифференциал. Буква t вместо φ ничего не меняет. Важно заменить согласованно и функцию, и дифференциал, а после интегрирования вернуться к x.

Пример 1. Сдвиг аргумента. Поскольку $d(x+5) = dx$,

$$\begin{aligned}\int \cos(x+5)\,dx &= \int \cos(x+5)\,d(x+5)\\ &= \int \cos\varphi\,d\varphi\\ &= \sin(x+5) + C.\end{aligned}$$

Пример 2. «Умная единица». Умножаем и делим на 3, чтобы получить $d(3x) = 3\,dx$:

$$\begin{aligned}\int \sin 3x\,dx &= \frac{1}{3}\int \sin 3x\,d(3x)\\ &= -\frac{1}{3}\cos 3x + C.\end{aligned}$$

Пример 3. Линейный знаменатель. Сначала выносим 3:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{3x+2} &= \frac{1}{3}\int \frac{d(x+2/3)}{x+2/3}\\ &= \frac{1}{3}\ln|x+2/3| + C.\end{aligned}$$

Второй путь Глеба: сразу $\varphi = 3x+2$, $d\varphi = 3\,dx$. Тогда ответ $\frac{1}{3}\ln|3x+2| + C$ отличается только константой. Обе записи верны на каждом промежутке, не содержащем $x = -2/3$; модуль нужен и слева от этой точки.

Пример 4. Видим производную синуса.

$$\begin{aligned}\int \sin x\cos x\,dx &= \int \sin x\,d(\sin x)\\ &= \int \varphi\,d\varphi\\ &= \frac{1}{2}\sin^2 x + C.\end{aligned}$$

Пример 5. Аргумент x^2. Здесь $d(x^2) = 2x\,dx$, поэтому

$$\int x\sin(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int \sin(x^2)\,d(x^2) = -\frac{1}{2}\cos(x^2) + C.$$

Замена $\varphi = x^2$ даёт $x\,dx = d\varphi/2$; делить отдельно на x не нужно.

Пример 6. Куб под корнем. Сначала $x^2\,dx = \frac{1}{3}d(x^3)$, затем константу можно внести под d:

$$\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx = \frac{1}{3}\int \sqrt{x^3+1}\,d(x^3+1) = \frac{1}{3}\int \varphi^{1/2}\,d\varphi = \frac{2}{9}(x^3+1)^{3/2} + C.$$

Второй путь: $t = x^3 + 1$, $dt = 3x^2\,dx$. Вещественный корень задан при $x \geqslant -1$; производную проверяем при $x > -1$.

Пример 7. Степень линейного выражения. При $\varphi = 3x - 5$, $d\varphi = 3\,dx$

$$\int (3x-5)^{10}\,dx = \frac{1}{3}\int \varphi^{10}\,d\varphi = \frac{(3x-5)^{11}}{33} + C.$$

Пример 8. Пятый корень. Это как раз тот пример, на начале которого оборвалось предыдущее видео. В этой записи он доведён до ответа:

$$\varphi = 5x^3 + 1, \qquad d\varphi = 15x^2\,dx,$$

$$\int x^2\sqrt[5]{5x^3+1}\,dx = \frac{1}{15}\int \varphi^{1/5}\,d\varphi = \frac{1}{15}\frac{\varphi^{6/5}}{6/5} + C = \frac{1}{18}(5x^3+1)^{6/5} + C.$$

Нечётный корень допускает отрицательный аргумент; степень $6/5$ озна-

чает шестую степень пятого корня.

Пример 9. Тангенс. Раскрываем тангенс как отношение и замечаем $d(\cos x) = -\sin x\,dx$:

$$\begin{aligned}\int \tan x\,dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx \\ &= -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} \\ &= -\ln|\cos x| + C.\end{aligned}$$

Рассматриваем промежутки с $\cos x \neq 0$.

Пример 10. Не заменяем весь знаменатель вслепую. В

$$\int \frac{x^7\,dx}{\sqrt{1-x^{16}}}$$

производная $1 - x^{16}$ не согласуется с числителем x^7. Зато

$$d(x^8) = 8x^7\,dx, \qquad x^{16} = (x^8)^2.$$

Поэтому $\varphi = x^8$ приводит к таблице:

$$\int \frac{x^7\,dx}{\sqrt{1-x^{16}}} = \frac{1}{8}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varphi^2}} = \frac{1}{8}\arcsin(x^8) + C.$$

Для исходного вещественного интеграла $|x| < 1$.

Пример 11. Половинный угол. Используем формулу

$$\sin x = 2\sin(x/2)\cos(x/2).$$

Тогда

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin x} &= \int \frac{d(x/2)}{\sin(x/2)\cos(x/2)} \\ &= \int \frac{d(x/2)}{\tan(x/2)\cos^2(x/2)}.\end{aligned}$$

Во втором переходе использовано $\sin(x/2) = \tan(x/2)\cos(x/2)$. Теперь

$$d\left(\tan\frac{x}{2}\right) = \frac{d(x/2)}{\cos^2(x/2)}.$$

Получаем

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{d\varphi}{\varphi} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.$$

Эта формула применяется на каждом промежутке между соседними нулями $\sin x$.

5. Рациональные дроби: схема метода

После перерыва Глеб рассматривает

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx,$$

где P, Q — многочлены. Нужна правильная дробь: $\deg P < \deg Q$. Иначе сначала делением выделяют многочлен и правильную дробь. В этом занятии разбираются знаменатели, разложимые на действительные линейные множители.

Если корни $x_1, \dots, x_n$ простые, дробь раскладывают в сумму

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \dots + \frac{A_n}{x - x_n}.$$

Коэффициенты определяются из тождества. Если в знаменателе есть $(x-a)^k$, этому множителю отвечает весь набор

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k}.$$

6. Рациональная дробь с простыми корнями

Нужно вычислить

$$J = \int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}.$$

Дробь правильная, все три корня простые. Пишем

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}.$$

Здесь A, B, C — временные коэффициенты разложения. После приведения к общему знаменателю получаем полиномиальное тождество

$$x = A(x+2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x+2).$$

Способ 1: коэффициенты одинаковых степеней. Правая часть раскрывается как

$$(A+B+C)x^2 + (5A+4B+3C)x + (6A+3B+2C).$$

Сопоставляем с $0x^2 + 1x + 0$:

$$\begin{aligned} A + B + C &= 0, \\ 5A + 4B + 3C &= 1, \\ 6A + 3B + 2C &= 0. \end{aligned}$$

Из третьего уравнения минус удвоенное первое: $B = -4A$. Из первого $C = 3A$. Подстановка во второе даёт $-2A = 1$, поэтому

$$A = -\frac{1}{2}, \qquad B = 2, \qquad C = -\frac{3}{2}.$$

Способ 2: удобные значения x. Подставляем корни в полиномиальное тождество, уже после устранения знаменателей:

$$\begin{aligned} x = -1: &\quad -1 = 2A, \\ x = -2: &\quad -2 = -B, \\ x = -3: &\quad -3 = 2C. \end{aligned}$$

Это допустимо для тождества многочленов; в исходную дробь нули знаменателя не подставляют. Получаем те же коэффициенты значительно быстрее.

Остаётся проинтегрировать три простые дроби:

$$J = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + 2\int \frac{dx}{x+2} - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x+3}$$
$$= -\frac{1}{2}\ln|x+1| + 2\ln|x+2| - \frac{3}{2}\ln|x+3| + C_0.$$

C_0 теперь обозначает произвольную константу первообразной. Формула действует отдельно на промежутках, не содержащих $-3, -2, -1$.

7. Рациональная дробь с кратными корнями

Второй пример:

$$J = \int \frac{x^4+1}{x^5+x^4-x^3-x^2}\,dx.$$

Сначала, как Глеб, раскладываем знаменатель:

$$Q(x) = x^2(x^3+x^2-x-1),$$
$$x^3+x^2-x-1 = x(x^2-1) + (x^2-1)$$
$$= (x-1)(x+1)^2.$$

Итак, $Q = x^2(x-1)(x+1)^2$. Корни 0 и -1 двойные, 1 простой. Поэтому

$$\frac{x^4+1}{x^2(x-1)(x+1)^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C_1}{x+1} + \frac{C_2}{(x+1)^2}.$$

После приведения к общему знаменателю:

$$x^4+1 = A_1x(x-1)(x+1)^2 + A_2(x-1)(x+1)^2 + Bx^2(x+1)^2 + C_1x^2(x-1)(x+1) + C_2x^2(x-1).$$

В записи Глеб сначала пропускает член с B, затем возвращает его. Здесь приведено полное тождество.

Подставляем удобные корни:

$$\begin{aligned} x=0: &\quad 1=-A_2 &&\Rightarrow A_2=-1,\\ x=1: &\quad 2=4B &&\Rightarrow B=\frac{1}{2},\\ x=-1: &\quad 2=-2C_2 &&\Rightarrow C_2=-1. \end{aligned}$$

Остаются A_1 и C_1. Вслед за Глебом сопоставляем коэффициент при x^4:

$$A_1+\frac{1}{2}+C_1=1 \quad\Rightarrow\quad 2A_1+2C_1=1.$$

Затем подставляем $x=2$ в полное тождество:

$$17=18A_1-9+18+12C_1-4,$$

$$3A_1+2C_1=2.$$

Вычитание двух уравнений даёт $A_1=1$, затем $C_1=-1/2$. Таким образом,

$$\frac{x^4+1}{x^2(x-1)(x+1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2(x-1)} -\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{(x+1)^2}.$$

Теперь интегрируем почленно. Важно не потерять два минуса:

$$\int x^{-2}\,dx=-\frac{1}{x}+C, \qquad \int (x+1)^{-2}\,dx=-\frac{1}{x+1}+C.$$

Окончательно

$$J=\ln|x|+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln|x-1| -\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+C.$$

Область исходной дроби: $x\neq -1,0,1$. На каждом из четырёх промежут-

ков константа может быть своей.

Оговорка к свёрнутому ответу на доске. Заменять разность логарифмов на корень без модулей можно не на всей области:

$$\frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|.$$

Если под корнем оставить просто $(x-1)/(x+1)$, для $-1 < x < 1$ получается отрицательное число, хотя исходная дробь там определена при $x \neq 0$. Кроме того, при $x < -1$ выражение $x\sqrt{(x-1)/(x+1)}$ отрицательно, и его вещественный логарифм без модуля не существует. Поэтому выше сохранена универсальная вещественная форма с отдельными логарифмами.

Главное

Проверяйте первообразную дифференцированием. В замене ищите согласованный дифференциал. Для рациональной дроби выделяйте правильную часть, раскладывайте знаменатель и учитывайте все кратности; коэффициенты находите из тождества.