BOTAY

ОЛИМПИАДНАЯ ФИЗИКА

Глеб Орёл
Конспект

Занятие 2.5. Решаем задачи - Производная, формула Тейлора, дифференциал

Теория, методы и разобранные задачи

BOTAY × Глеб Орёл

botay.pro • 2026

Занятие 2.5. Решаем задачи - Производная, формула Тейлора, дифференциал

На этом занятии

Применить производную к четырём физическим задачам, действительно разобранным в записи: движению точки, зарядке конденсатора, подтягиванию тела нитью и параболическому зеркалу. В задаче с нитью сохранить оба способа Глеба — кинематический и последовательное дифференцирование геометрической связи.

1. Что повторяется перед задачами

Приращение всегда означает конечное минус начальное. Производная — конечный предел отношения приращений:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Геометрически это наклон касательной. Пользуемся таблицей и правилами

$$(f+g)' = f' + g', \qquad (fg)' = f'g + fg',$$
$$(f(g(x)))' = f'(g(x))\, g'(x).$$

Последнее автор называет «матрёшкой»: производные вложений перемножаются снаружи внутрь. Запись $dy = f'(x)\,dx$ относится к линейной части приращения; для конечного шага нельзя без остатка заменять Δy на dy.

При анализе графика нулевая производная лишь необходима для внутреннего гладкого экстремума. Нужна также проверка смены знака: $+ \to -$ даёт максимум, $- \to +$ — минимум. У строго возрастающей функции отдельная производная может быть нулевой, как у x^3 в нуле.

2. Задача 2. Закон движения задан

Материальная точка движется по прямой:

$$x(t) = At^2 - Bt^3, \qquad A = 6\,\text{м/с}^2, \quad B = 1\,\text{м/с}^3.$$

Найти скорость и ускорение, момент остановки после начала движения,

путь до него и момент нулевого ускорения. Рассматриваем $t \geq 0$.

Шаг 1. От вектора к проекции. По определению $\vec{v} = d\vec{S}/dt$. При фиксированном начале координат

$$S_x = x(t) - x(0), \qquad v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}.$$

Точка сверху означает производную по времени. Постоянное начальное положение при дифференцировании исчезает. Поэтому

$$v_x(t) = 2At - 3Bt^2 = t(2A - 3Bt).$$

Проекция может быть отрицательной. Модуль скорости:

$$v(t) = |v_x(t)|.$$

При $0 < t < 2A/(3B)$ движение направлено вдоль $+x$, после этого момента — против оси.

Шаг 2. Ещё одна производная.

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x = \ddot{x} = 2A - 6Bt = 2(A - 3Bt).$$

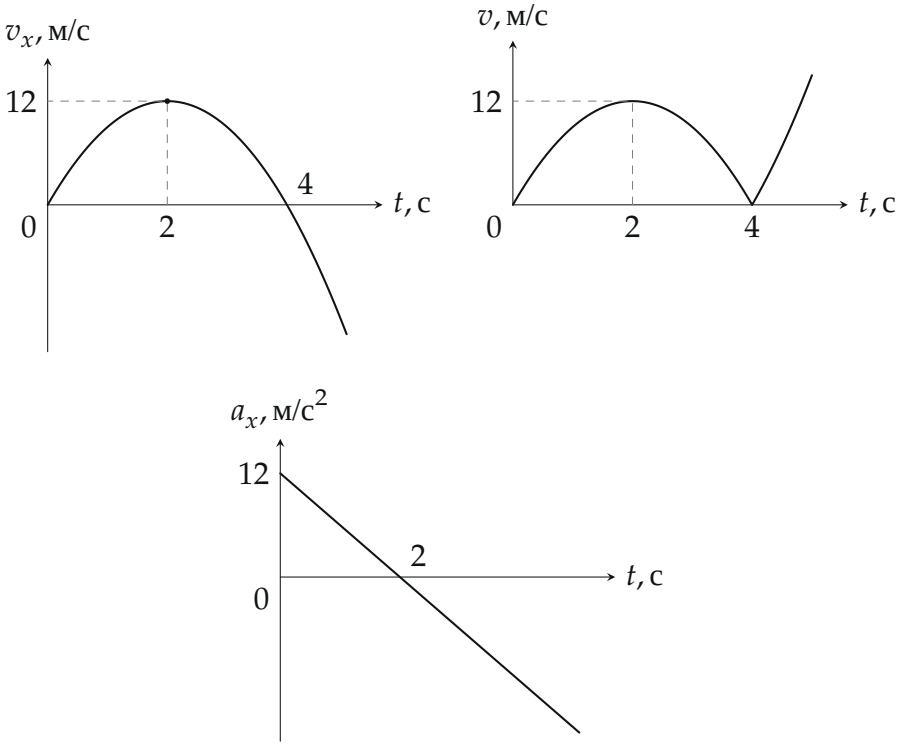
Отсюда

$$a_x(\tau) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{A}{3B} = 2\,\text{с}.$$

До τ производная v_x положительна, после — отрицательна. Значит, проекция скорости достигает максимума:

$$v_{x,\max} = \frac{A^2}{3B} = 12\,\text{м/с}.$$

Это не наибольший модуль скорости на всей полуоси времени: после разворота $|v_x|$ снова растёт и в данной математической модели не ограничен.



Три согласованных графика при числах из условия. При $t = 2$ с ускорение меняет знак; при $t = 4$ с проекция скорости пересекает ноль, а её модуль касается нуля. Вертикальные масштабы трёх панелей различны.

Шаг 3. Остановка и путь. Нули v_x — 0 и

$$t_{\text{ост}} = \frac{2A}{3B} = 4\,\text{с}.$$

В начальный момент тело уже покоится; здесь ищется следующая мгновенная остановка после движения. До неё знак скорости не меняется, поэтому путь равен изменению координаты:

$$s = x(t_{\text{ост}}) - x(0).$$

Глеб оставляет подстановку в исходный полином. Доведя её до числа,

получаем

$$s = \frac{4A^3}{27B^2} = 32\,\text{м}.$$

После $t_{\text{ост}}$ нельзя продолжать считать путь равным одной координате: произошло изменение направления.

3. Задача о зарядке конденсатора

Заряд одной положительной обкладки меняется по закону

$$q_C(t) = q_0(1 - e^{-t/\tau}), \qquad q_0 > 0, \quad \tau > 0.$$

Найти ток, его максимальное значение и время уменьшения вдвое.

Заряд конденсатора здесь — модуль заряда одной обкладки, а не сумма зарядов двух обкладок: их заряды $+q_C$ и $-q_C$.

Почему ток равен производной. Выбираем ток, направленный к положительной обкладке. За малое время прошедший по проводу заряд увеличивает её заряд:

$$dq_C = I_C\,dt, \qquad I_C = \frac{dq_C}{dt}.$$

Сила тока измеряет заряд за единицу времени; это не скорость движения отдельной частицы.

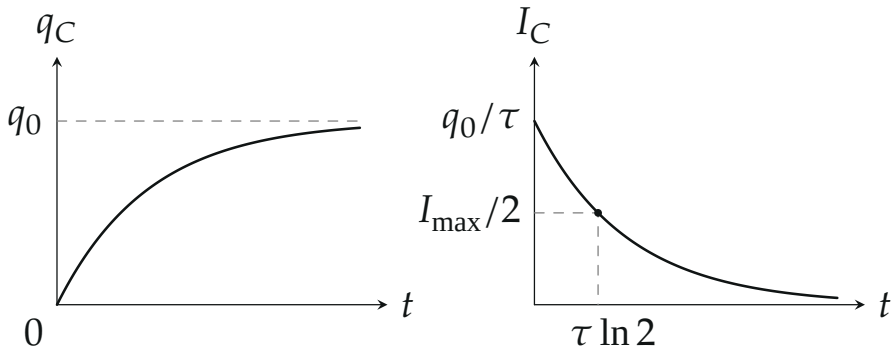
Используем сложную функцию. Для постоянного α

$$\frac{d}{dt}e^{\alpha t} = e^{\alpha t}\,\alpha.$$

При $\alpha = -1/\tau$:

$$I_C(t) = \dot{q}_C = -q_0\left(-\frac{1}{\tau}\right)e^{-t/\tau} = \frac{q_0}{\tau}e^{-t/\tau}.$$

Оба минуса дают плюс. Заряд растёт, но всё медленнее: положительная производная уменьшается.



Заряд приближается к q_0, ток убывает от q_0/τ к нулю. В момент $t_1 = \tau \ln 2$ ток равен половине начального.

Для $t \geq 0$ ток максимален в начале:

$$I_{\max} = I_C(0) = \frac{q_0}{\tau}.$$

Условие уменьшения вдвое:

$$\frac{q_0}{\tau} e^{-t_1/\tau} = \frac{1}{2}\frac{q_0}{\tau}.$$

Сокращаем положительный множитель, логарифмируем:

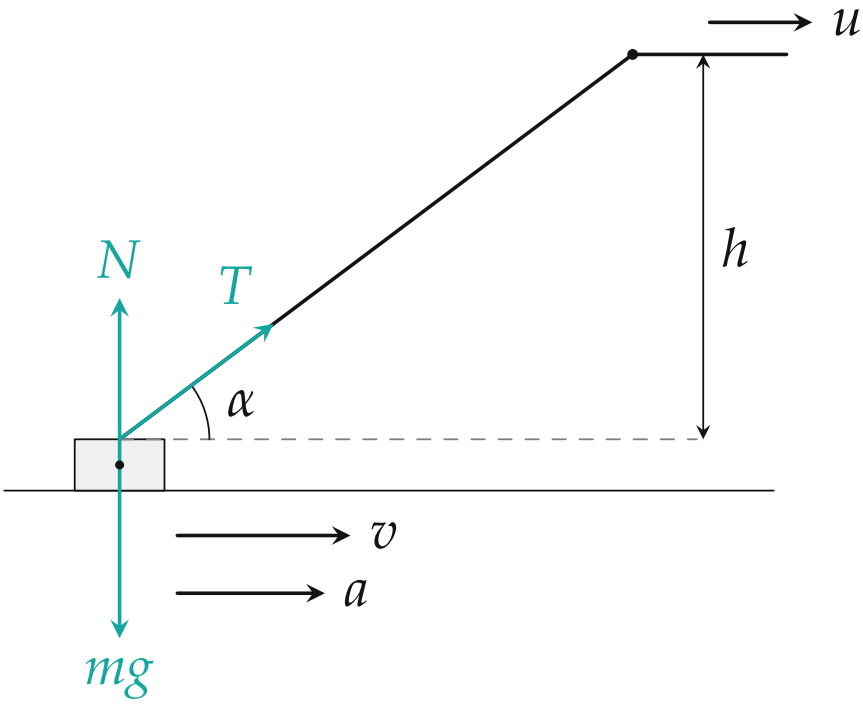
$$-\frac{t_1}{\tau} = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2, \qquad t_1 = \tau \ln 2.$$

Не путайте постоянную времени τ с искомым моментом t_1.

4. Задача 5. Тело подтягивают нитью

Исходно в брошюре лодку подтягивают к пристани через блок на высоте h. Глеб заменяет лодку бруском на гладкой горизонтальной опоре и дополнительно исследует силы. Нить нерастяжима, блок неподвижен; свободный конец выбирают с постоянной скоростью $u > 0$.

Угол наклонной нити с горизонтом — α, $0 < \alpha < \pi/2$. Высота h измеряется между блоком и уровнем крепления нити к телу. Ищем $v(\alpha)$ и $a(\alpha)$ до потери контакта с опорой.



Тело движется вправо без отрыва. Тяжесть выходит из центра масс, реакция вертикальна, натяжение направлено вдоль нити. Блок идеализирован точкой перегиба; скорость и ускорение тела горизонтальны.

Начинаем с физики. Пока контакт сохраняется, вертикального ускорения нет. Оси первого способа: x вправо, y вверх. Второй закон Ньютона:

$$N - mg + T\sin\alpha = 0, \qquad ma = T\cos\alpha.$$

Отсюда $N = mg - T\sin\alpha$. Реакция опоры здесь не равна mg: нить частично поддерживает тело.

Кинематическая связь. У неподвижного блока скорость нити по касательной равна u. Для двух точек прямого нерастяжимого участка проекции их скоростей на направление участка одинаковы: иначе расстояние между ними менялось бы. Это авторское «правило палочки»:

$$v\cos\alpha = u \quad \Rightarrow \quad v = \frac{u}{\cos\alpha}.$$

По мере приближения тела к блоку α растёт, $\cos\alpha$ уменьшается, поэтому v увеличивается, хотя нить выбирают равномерно.

5. Первый способ: угловая скорость и цепочка

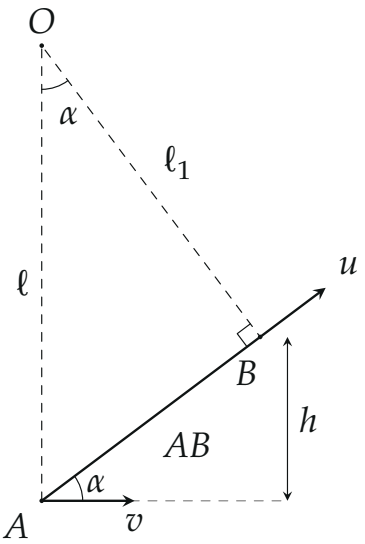
Скорость зависит от времени через $\alpha(t)$:

$$a = \dot{v} = u\,\frac{d}{dt}(\cos\alpha)^{-1}.$$

Раскрываем тройную «матрёшку»: обратная величина, косинус, угол от времени:

$$\frac{d}{dt}(\cos\alpha)^{-1} = -(\cos\alpha)^{-2}(-\sin\alpha)\dot{\alpha}$$
$$= \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\dot{\alpha}.$$

Остаётся найти $\dot{\alpha}$. Глеб использует мгновенный центр скоростей прямого участка нити. Это центр скоростей, а не центр масс; оговорку автор в речи исправляет.



Мгновенный центр O — пересечение перпендикуляров к скоростям в A, B. В A скорость горизонтальна; в B она направлена вдоль нити. Это мгновенная конструкция для прямого нерастяжимого участка.

Обозначим $OA = \ell$, $OB = \ell_1$. Из прямоугольной геометрии:

$$AB = \frac{h}{\sin\alpha}, \qquad \ell = \frac{h}{\sin^2\alpha},$$

$$\ell_1 = \frac{h\cos\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

Поэтому

$$\dot{\alpha} = \omega = \frac{v}{\ell} = \frac{u}{\ell_1} = \frac{u\sin^2\alpha}{h\cos\alpha}.$$

Подставляем в производную скорости:

$$a = u\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\frac{u\sin^2\alpha}{h\cos\alpha} = \frac{u^2}{h}\tan^3\alpha.$$

При заданной мгновенной длине наклонного участка $L > h$ это можно переписать:

$$v = \frac{uL}{\sqrt{L^2 - h^2}}, \qquad a = \frac{u^2h^2}{(L^2 - h^2)^{3/2}}.$$

Здесь $\sin\alpha = h/L$ и $\cos\alpha = \sqrt{L^2 - h^2}/L$.

Силы после нахождения ускорения.

$$T = \frac{ma}{\cos\alpha} = \frac{mu^2}{h\cos\alpha}\tan^3\alpha,$$

$$\begin{aligned} N &= mg - T\sin\alpha \\ &= m\left(g - \frac{u^2}{h}\tan^4\alpha\right). \end{aligned}$$

В последней подстановке на доске после верного $N = mg - T\sin\alpha$ потерян множитель $\sin\alpha$. Здесь он сохранён: $\tan^3\alpha\sin\alpha/\cos\alpha = \tan^4\alpha$.

Движение с прижатой опорой требует $N > 0$; предельный момент

отрыва соответствует $N = 0$:

$$\tan^4 \alpha = \frac{gh}{u^2}.$$

После отрыва прежняя горизонтальная кинематическая модель неприменима.

6. Второй способ: дважды дифференцируем связь

Теперь Глеб меняет ось: начало под блоком, положительное направление x влево, к телу. Координата $x(t) > 0$ уменьшается при движении. Высота постоянна:

$$L^2 = h^2 + x^2, \qquad \dot{L} = -u, \qquad \ddot{L} = 0.$$

Знак минус возникает потому, что свободный наклонный участок укорачивается. На этой оси $v_x = -v$.

Первая производная геометрической связи:

$$2L\dot{L} = 2x\dot{x}, \qquad v_x = \dot{x} = \frac{L\dot{L}}{x}.$$

Поскольку $x = L\cos\alpha$:

$$v_x = -\frac{uL}{x} = -\frac{u}{\cos\alpha}.$$

Это тот же модуль скорости, что в первом способе, с противоположным знаком проекции из-за новой оси.

Дифференцируем $L\dot{L} = x\dot{x}$ ещё раз, используя правило произведения:

$$\dot{L}^2 + L\ddot{L} = \dot{x}^2 + x\ddot{x}.$$

Подставляем $\dot{L} = -u$, $\ddot{L} = 0$, $\dot{x} = v_x$, $\ddot{x} = a_x$:

$$u^2 = v_x^2 + xa_x \quad \Rightarrow \quad a_x = \frac{u^2 - v_x^2}{x}.$$

Важно: $(-u)^2 = +u^2$. Через геометрию

$$a_x = \frac{u^2 - u^2/\cos^2\alpha}{L\cos\alpha} = -\frac{u^2\sin^2\alpha}{L\cos^3\alpha} = -\frac{u^2}{h}\tan^3\alpha.$$

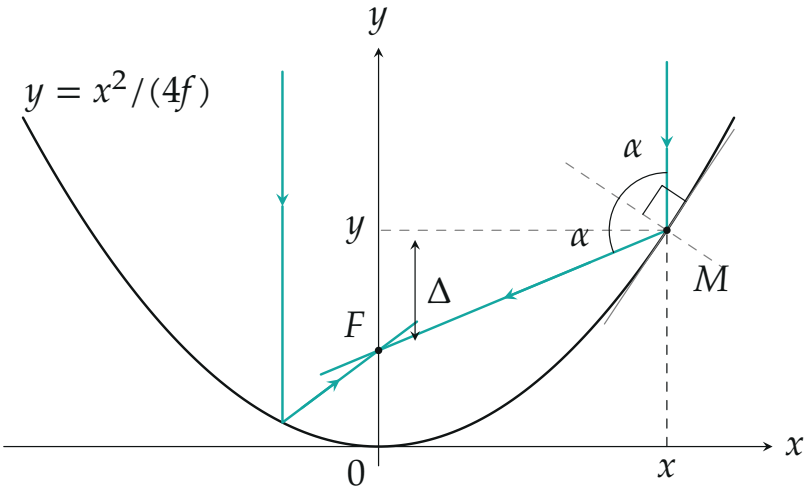
Минус означает ускорение вправо, против новой оси x. Модуль совпал с первым способом. При постоянном u нулевое $\ddot{L}$ вовсе не означает нулевое ускорение тела: меняется направление нити.

7. Задача 8. Параболическое зеркало

Меридиональное сечение зеркала:

$$y = \frac{x^2}{4f}, \qquad f > 0.$$

Лучи падают вертикально вниз, параллельно оси y. Доказать, что отражённый луч из любой точки проходит через $(0, f)$. В брошюре параметр обозначен F; здесь используем строчное f, а точку фокуса называем F.



Два осевых луча отражаются через $F = (0, f)$. Углы падения и отражения отсчитываются от нормали.

Шаг 1. Касательная через производную. Для точки падения $M = (x, y)$ с $x > 0$ наклон касательной:

$$\tan\alpha = y'(x) = \frac{x}{2f}.$$

Перпендикулярная ей нормаль задаёт закон отражения: угол падения равен углу отражения. Из авторского чертежа угол касательной с горизонтом также равен α.

Шаг 2. Геометрия пересечения с осью. Пусть отражённый луч пересекает ось на высоте h. Для нарисованного случая $y > h$ обозначаем

$$\Delta = y - h, \qquad \varphi = \pi - 2\alpha.$$

У прямоугольного треугольника горизонтальный катет x, вертикальный Δ:

$$\tan\varphi = \frac{x}{\Delta}, \qquad \Delta = -\frac{x}{\tan 2\alpha}.$$

Шаг 3. Двойной угол.

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \frac{4xf}{4f^2 - x^2}.$$

В записи появляется лишняя двойка в знаменателе; Глеб её сам находит и исправляет. Сохраняем окончательный исправленный результат:

$$\Delta = -x\frac{4f^2 - x^2}{4xf} = -f + \frac{x^2}{4f}.$$

Тогда

$$h = y - \Delta = \frac{x^2}{4f} - \left(-f + \frac{x^2}{4f}\right) = f.$$

Высота не зависит от точки падения.

Граница применимости вспомогательного треугольника. На доске точка M выше фокуса. Если $0 < x < 2f$, величину $\Delta = y - h$ следует считать знаковой: она отрицательна. При $x = 2f$ отражённый луч гори-

зонтален, $\Delta = 0$; деление на $\tan 2\alpha$ заменяется выражением

$$\Delta = -x\,\frac{1-\tan^2\alpha}{2\tan\alpha},$$

которое там определено. Для $x < 0$ действует зеркальная симметрия. При $x = 0$ нормаль вертикальна, луч отражается обратно вдоль оси и также проходит через фокус. Так авторский вывод охватывает все лучи, а не только выбранный на рисунке.

Общий вывод: производная даёт касательную, касательная — нормаль, а нормаль вместе с законом отражения — траекторию луча. Параболическое зеркало действительно собирает осевой параллельный пучок в фокус.

8. Что остаётся за рамками записи

В брошюре показан значительно больший набор, но решены именно эти четыре задачи; задача13 только объявлена и не разобрана. Полного вывода формулы Тейлора здесь нет. Условия получения файлов и расписание будущих эфиров относятся к историческим объявлениям в конце записи.

Главное

Прежде чем дифференцировать, назовите физическую величину и выберите ось. Скорость — производная координаты, ток — производная заряда. Неизвестную зависимость иногда проще найти из производных геометрической связи. В оптике сначала строят точную касательную и нормаль, затем отражают луч.