BOTAY

ОЛИМПИАДНАЯ ФИЗИКА

Глеб Орёл
Конспект

Занятие 1. Аналитическая геометрия - Векторное произведение, кривые второго порядка

Теория, методы и разобранные задачи

BOTAY × Глеб Орёл

botay.pro • 2026

Занятие 1. Аналитическая геометрия - Векторное произведение, кривые второго порядка

На этом занятии

Пройти обзор аналитической геометрии в порядке Глеба: произведения векторов, проекции, прямая и плоскость, расстояния, затем эллипс, гипербола и парабола. Это вводный обзор, а не полный курс: часть формул автор сообщает без доказательства, отдельные планы на будущие занятия здесь не подменяют проведённый материал.

1. Скалярное произведение

Для ненулевых векторов, приведённых к общему началу,

$$(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi.$$

Берём меньший угол между направлениями, а не случайный угол между отрезками с разными началами. Если один вектор нулевой, произведение равно нулю; угол с нулевым вектором не определяем.

Скалярное произведение даёт число и линейно:

$$(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b},\vec{c}) = \alpha(\vec{a},\vec{c}) + \beta(\vec{b},\vec{c}).$$

Также $(\vec{a},\vec{b}) = (\vec{b},\vec{a})$, $(\vec{a},\vec{a}) = |\vec{a}|^2$. Для ненулевых векторов

$$(\vec{a},\vec{b}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b},$$

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}.$$

2. Координаты в ортонормированном базисе

Глеб работает в прямоугольной декартовой системе координат — ПДСК. Базисные векторы $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ взаимно перпендикулярны и имеют длину 1. Любой вектор выражается через них:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}.$$

Их линейная независимость означает, что такое разложение единственно. Числа a_x, a_y, a_z — координаты; в ортонормированном базисе они совпадают с числовыми проекциями на соответствующие направления.

Чтобы получить скалярное произведение в координатах, раскрываем скобки для двух разложений. При первом слагаемом, например,

$$a_x b_x(\vec{i},\vec{i}) + a_x b_y(\vec{i},\vec{j}) + a_x b_z(\vec{i},\vec{k}).$$

Шесть смешанных слагаемых зануляются из-за перпендикулярности; три оставшихся содержат $(\vec{i},\vec{i}) = (\vec{j},\vec{j}) = (\vec{k},\vec{k}) = 1$. Поэтому

$$(\vec{a},\vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

$$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Ортонормированность здесь существенна. Для этой скалярной формулы правая ориентация базиса не обязательна; для обычной формулы векторного произведения ниже выбираем именно правый базис.

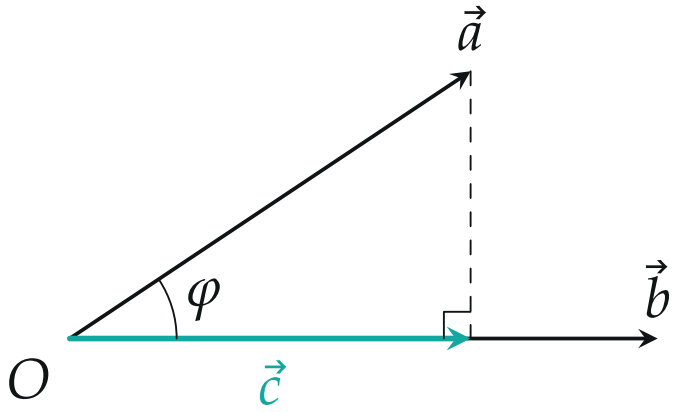
3. Векторная и числовая проекции

Нужно спроецировать $\vec{a}$ на направление ненулевого $\vec{b}$. Единичный вектор вдоль него равен $\vec{b}/|\vec{b}|$. Умножаем его на числовую проекцию:

$$a_b = |\vec{a}|\cos\varphi = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{b}|}.$$

Векторная проекция получается так:

$$\vec{c} = \mathrm{pr}_{\vec{b}}\,\vec{a} = a_b\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{b}|^2}\vec{b}.$$



Векторная проекция в остром угле, как на доске. Разность $\vec{a} - \vec{c}$ перпендикулярна $\vec{b}$.

На рисунке автора угол острый, поэтому $a_b = |\vec{c}|$. При тупом угле $a_b < 0$, и $\vec{c}$ направлен против $\vec{b}$. В общем случае длина проекции равна $|\vec{c}| = |a_b|$, а числовая проекция сохраняет знак. Это уточняет промежуточную запись доски $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cos\varphi$.

4. Векторное произведение

Обозначение Глеба:

$$\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}].$$

Это вектор, длина которого

$$|\vec{c}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\alpha,$$

а направление перпендикулярно обоим сомножителям. Правило правой руки: четыре пальца поворачиваем от первого вектора ко второму по меньшему углу, большой палец задаёт направление $\vec{c}$.

Произведение линейно по каждому аргументу, но перестановка меняет знак:

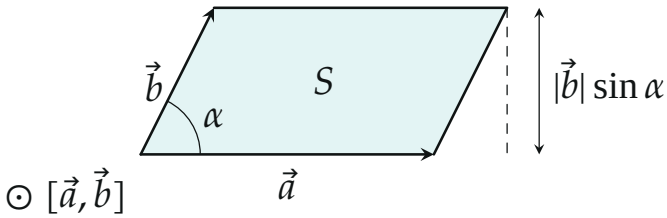
$$[\beta\vec{a} + \varphi\vec{b}, \vec{c}] = \beta[\vec{a}, \vec{c}] + \varphi[\vec{b}, \vec{c}],$$

$$[\vec{b}, \vec{a}] = -[\vec{a}, \vec{b}].$$

Для ненулевых векторов

$$[\vec{a},\vec{b}] = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{a} \parallel \vec{b}.$$

Это следует из $\sin\alpha = 0$ при $\alpha = 0, \pi$. Если один сомножитель нулевой, результат также нулевой.



Модуль векторного произведения — площадь параллелограмма на $\vec{a}, \vec{b}$. При показанном повороте направление произведения — к читателю, знак $\odot$.

Высота параллелограмма равна $|\vec{b}|\sin\alpha$, поэтому

$$S_{\text{пар}} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\alpha = |[\vec{a},\vec{b}]|.$$

5. Координатная формула и определитель

Раскрываем два базисных разложения: получается девять слагаемых $a_\mu b_\nu [\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu]$. Три произведения одинаковых базисных векторов нулевые. Для правого ортонормированного базиса

$$[\vec{i},\vec{j}] = \vec{k}, \qquad [\vec{j},\vec{k}] = \vec{i}, \qquad [\vec{k},\vec{i}] = \vec{j}.$$

При обратном порядке возникает минус. В частности, $[\vec{j},\vec{i}] = -\vec{k}$: этот знак Глеб исправляет по ходу объяснения.

После группировки:

$$\begin{aligned}[\vec{a},\vec{b}] = {}& \vec{i}(a_y b_z - a_z b_y) \\ & - \vec{j}(a_x b_z - a_z b_x) \\ & + \vec{k}(a_x b_y - a_y b_x).\end{aligned}$$

Сначала автор сокращает запись определителями второго порядка:

$$\begin{vmatrix} u & v \\ w & z \end{vmatrix} = uz - vw,$$

затем собирает в одну формальную запись:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Алгоритм: идём по первой строке; для каждого базисного вектора вычёркиваем его строку и столбец и берём оставшийся определитель 2×2. Знаки по первой строке: $+, -, +$. Эта запись с векторной первой строкой является удобным правилом вычисления вектора.

Ещё одно важное тождество автор сообщает без вывода:

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}).$$

Мнемоника Глеба — «бац минус цаб». Вложенное векторное произведение нельзя перегруппировывать как обычное ассоциативное умножение.

6. Смешанное произведение

Три вектора приводим к общему началу. Их смешанное произведение — число:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]).$$

Его модуль равен объёму параллелепипеда:

$$V = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|.$$

Правая тройка даёт положительный знак, левая — отрицательный. Линейность сохраняется по каждому аргументу.

При циклическом сдвиге знак не меняется:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}).$$

Перестановка любых двух аргументов меняет знак. Например,

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = -(\vec{a},\vec{c},\vec{b}).$$

Критерий компланарности:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{a},\vec{b},\vec{c} \text{ лежат в одной плоскости.}$$

Здесь речь о свободных векторах с общим началом. Критерий верен и при нулевом векторе; отдельное требование ненулевости не нужно.

В правом ортонормированном базисе

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Пример: применяем «бац минус цаб». Берём первым внешним аргументом $[\vec{a},\vec{b}]$:

$$\begin{aligned} [[\vec{a},\vec{b}],[\vec{c},\vec{d}]] &= \vec{c}([\vec{a},\vec{b}],\vec{d}) \\ &\quad - \vec{d}([\vec{a},\vec{b}],\vec{c}) \\ &= \vec{c}(\vec{a},\vec{b},\vec{d}) - \vec{d}(\vec{a},\vec{b},\vec{c}). \end{aligned}$$

В последней строке использован циклический сдвиг смешанного произведения. Это конкретное тождество, доказанное в записи.

7. Прямая через направляющий вектор

Пусть $\vec{a} \neq \vec{0}$ параллелен прямой ℓ, а M_0 — фиксированная точка на ней с радиус-вектором $\vec{r}_0$. Конец переменного $\vec{r}$ лежит на прямой тогда и только тогда, когда $\vec{r} - \vec{r}_0$ коллинеарен $\vec{a}$:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}\,t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Эквивалентная запись через векторное произведение:

$$[\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{a}] = \vec{0},$$

$$[\vec{r},\vec{a}]=\vec{b},\qquad \vec{b}=[\vec{r}_0,\vec{a}]=\text{const}.$$

Здесь константа $\vec{b}$ — вектор, а не число. Если задавать $\vec{b}$ независимо, необходимо $(\vec{a},\vec{b})=0$; в авторском построении это автоматически следует из определения $\vec{b}$.

8. Плоскость через два вектора и нормаль

Выбираем на плоскости фиксированную точку с радиус-вектором $\vec{r}_0$ и два неколлинеарных вектора $\vec{a},\vec{b}$, параллельных плоскости. Тогда

$$(\vec{r}-\vec{r}_0,\vec{a},\vec{b})=0$$

или, эквивалентно,

$$\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{a}\,t+\vec{b}\,k,\qquad t,k\in\mathbb{R}.$$

Вектор $\vec{n}=[\vec{a},\vec{b}]\neq\vec{0}$ перпендикулярен плоскости и называется нормалью; единичная длина ему не требуется. Поэтому

$$(\vec{r}-\vec{r}_0,\vec{n})=0,$$

$$(\vec{r},\vec{n})=D,\qquad D=(\vec{r}_0,\vec{n}).$$

В отличие от векторной константы прямой здесь D — число.

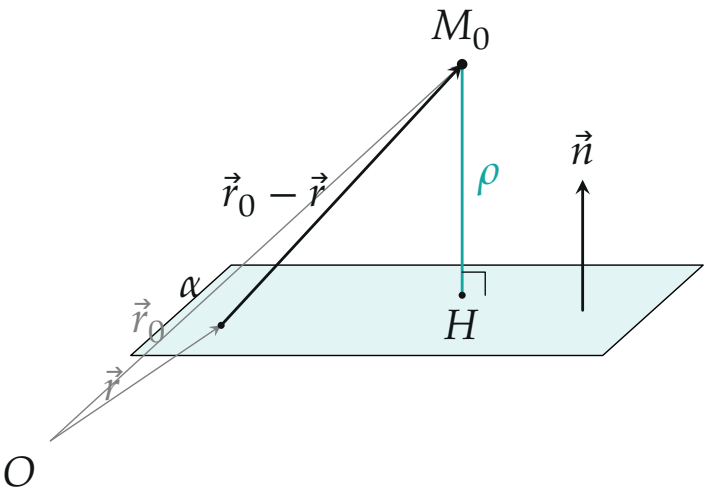
9. От точки до плоскости

Плоскость задана $(\vec{r},\vec{n})=D$, $\vec{n}\neq\vec{0}$. Данную внешнюю точку M_0 теперь обозначаем радиус-вектором $\vec{r}_0$. Берём любую точку плоскости с радиус-вектором $\vec{r}$. Расстояние — длина проекции $\vec{r}_0-\vec{r}$ на нормаль:

$$\begin{aligned}\rho&=\left|\frac{(\vec{r}_0-\vec{r},\vec{n})}{|\vec{n}|^2}\vec{n}\right|\\&=\frac{|(\vec{r}_0-\vec{r},\vec{n})|}{|\vec{n}|}\\&=\frac{|(\vec{r}_0,\vec{n})-D|}{|\vec{n}|}.\end{aligned}$$

Модуль необходим: расстояние не зависит от выбора направления нор-

мали.



Вектор от точки плоскости к M_0 проецируется на нормаль; длина проекции равна перпендикуляру ρ. Пространственный рисунок показан в проекции.

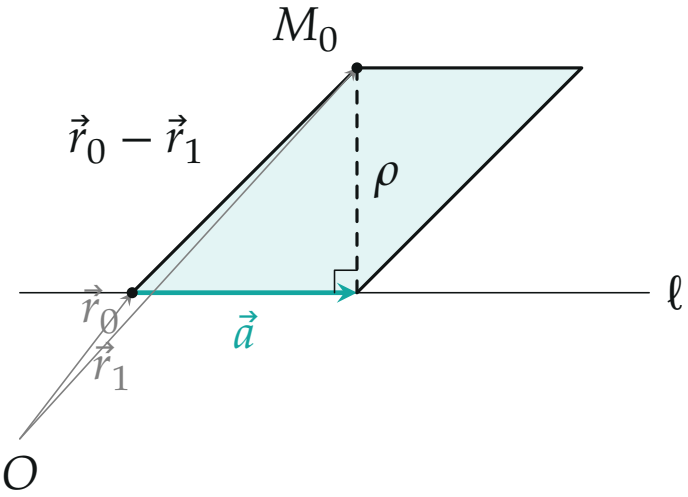
10. От точки до прямой

Прямая задана $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}\,t$, $\vec{a} \neq \vec{0}$. Точка вне неё имеет радиус-вектор $\vec{r}_0$. Строим параллелограмм на $\vec{r}_0 - \vec{r}_1$ и $\vec{a}$:

$$S = |[\vec{r}_0 - \vec{r}_1, \vec{a}]|.$$

С другой стороны, $S = |\vec{a}|\rho$, где ρ — высота к основанию вдоль прямой. Следовательно,

$$\rho = \frac{|[\vec{r}_0 - \vec{r}_1, \vec{a}]|}{|\vec{a}|}.$$



Расстояние до прямой получается из площади параллелограмма. Основание — $|\vec{a}|$, высота — ρ.

Расстояние между скрещивающимися прямыми автор собирается обсудить, но в итоге откладывает. Его формула в этом видео не выводится.

11. Эллипс: полуоси и фокусы

Далее идёт обзор трёх основных коник без полной классификации и без всех доказательств. Для эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a \geqslant b > 0.$$

Большая полуось равна a, малая — b. Фокусы

$$F_1 = (-c, 0), \qquad F_2 = (c, 0), \qquad c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Для любой точки M эллипса

$$MF_1 + MF_2 = 2a.$$

Это позволяет построить эллипс натянутой нитью между двумя фокусами. На вершине $(0, b)$ обе длины равны a, поэтому по теореме Пифагора $a^2 = b^2 + c^2$.

Эксцентриситет

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \qquad 0 \leqslant \varepsilon < 1.$$

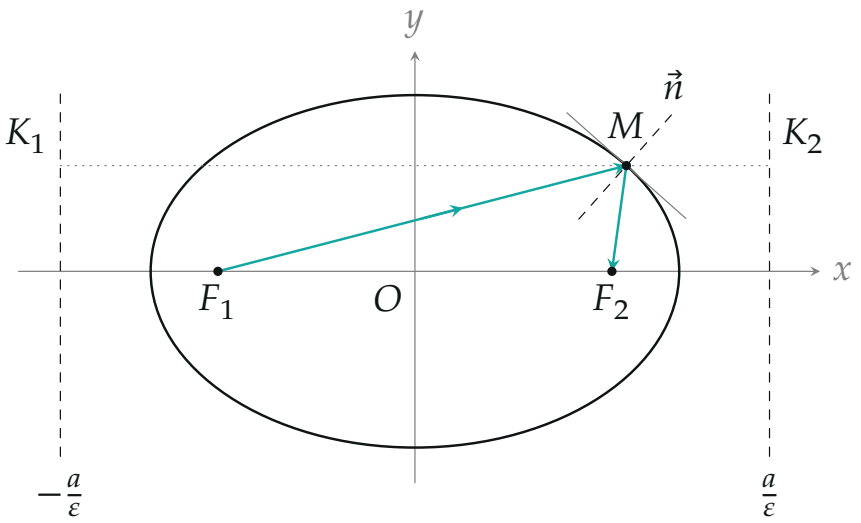
При $\varepsilon = 0$ имеем окружность: фокусы совпадают в центре. Для невырожденного эллипса с $c > 0$ директрисы:

$$x = -\frac{a}{\varepsilon}, \qquad x = \frac{a}{\varepsilon}.$$

Если K_1, K_2 — основания перпендикуляров из M на соответствующие директрисы, то

$$\frac{MF_1}{MK_1} = \frac{MF_2}{MK_2} = \varepsilon.$$

Директрисы сопоставляем фокусам с той же стороны оси x. Формула a/ε при $\varepsilon = 0$ не применяется.



Эллипс, парные фокусы и директрисы. Показан один луч $F_1 \to M \to F_2$ и нормаль в M; форма и отражение рассчитаны по уравнению кривой.

Оптическое свойство. Луч из одного фокуса после зеркального отражения от эллипса попадает в другой. Углы падения и отражения отно-

сительно нормали равны. В записи это свойство сообщается геометрически, без полного вывода.

Ещё две формулы Глеб оставляет как полезные свойства:

$$MF_1 = a + \varepsilon x, \qquad MF_2 = a - \varepsilon x.$$

Здесь F_1 — левый фокус, F_2 — правый, x — координата точки M. Порядок фокусов существен для знаков.

12. Гипербола

Каноническое уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a > 0, \quad b > 0.$$

a называют вещественной, b — мнимой полуосью; это названия параметров, сами a, b положительные действительные числа. Вершины находятся в $(\pm a, 0)$, асимптоты:

$$y = \pm \frac{b}{a} x.$$

При больших $|x|, |y|$ единица мала по сравнению с квадратными членами, поэтому $x^2/a^2 - y^2/b^2 \approx 0$: так автор поясняет асимптоты.

Фокусы и эксцентриситет:

$$F_{1,2} = (\mp c, 0), \qquad c = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1.$$

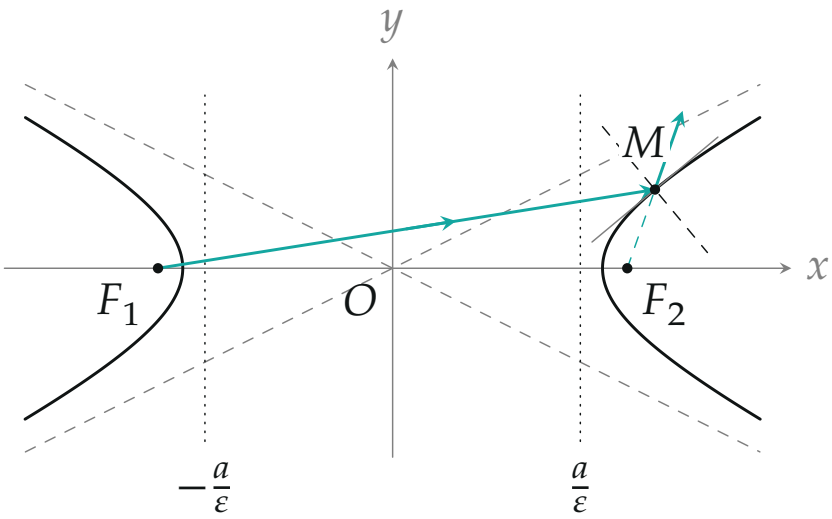
Директрисы снова $x = \pm a/\varepsilon$, но теперь они лежат между вершинами, поскольку $\varepsilon > 1$. Для соответствующих пар фокус–директриса

$$\frac{MF_1}{MK_1} = \frac{MF_2}{MK_2} = \varepsilon.$$

Вместо постоянной суммы расстояний получаем постоянную разность

по модулю:

$$|MF_1 - MF_2| = 2a.$$



Гипербола с асимптотами и директрисами. Отражённый луч уходит от M так, что его обратное продолжение проходит через F_2; пунктир к фокусу — продолжение, а не путь света.

В оптическом свойстве нужно различать сам луч и его продолжение. Для показанного падения от F_1 отражённый луч не идёт в F_2, а выглядит выходящим из него. Это согласуется с равенством углов относительно нормали, отмеченным на доске.

13. Парабола

Глеб выбирает ориентацию вправо:

$$y^2 = 2px, \qquad p > 0.$$

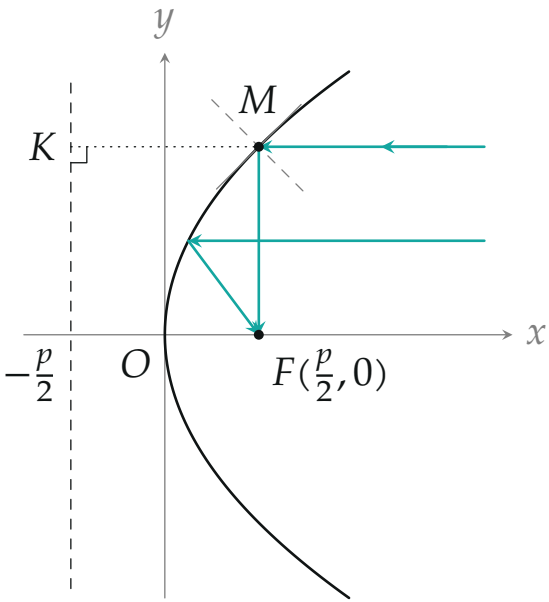
Это та же парабола, но с горизонтальной осью симметрии. Фокус, директриса и эксцентриситет:

$$F = \left(\frac{p}{2}, 0\right), \qquad x = -\frac{p}{2}, \qquad \varepsilon = 1.$$

Для точки M параболы и её проекции K на директрису

$$MF = MK.$$

Именно равенство расстояний является геометрическим смыслом определения. Аналогия автора с c/a для предыдущих кривых здесь лишь поясняет переход к $\varepsilon = 1$: у параболы не вводим конечные полуоси a, b эллипса.



Парабола $y^2 = 2px$: параллельные оси лучи после отражения идут через F; $MF = MK$.

Оптическое свойство. Параллельный оси пучок, падающий на вогнутую сторону, собирается в фокусе. Параллельность должна быть именно оси симметрии, что автор отдельно уточняет.

Главное

Следите за типом результата и знаками произведений. В формулах расстояний сохраняйте модули. Для коник сопоставляйте фокус с его директрисой и различайте сам оптический луч и его продолжение.